Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Daniele Faenzi

Fibrati vettoriali su varietà di Fano.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **7-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2004), n.3, p. 503–506.

Unione Mastematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2004_8_7A_3_503_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Mastematica Italiana, 2004.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VII-A, Dicembre 2004, 503-506

Fibrati vettoriali su varietà di Fano.

DANIELE FAENZI

Strumento fondamentale associato a una varietà proiettiva liscia X sul campo $\mathbb{C}$ è la categoria derivata $\mathrm{D}(X)$ della categoria abeliana dei fasci coerenti $\mathrm{Coh}(X)$. Tale oggetto fornisce il linguaggio opportuno per introdurre i funtori derivati e sussume profonde informazioni sulla varietà X. Si veda [GM96] e [BO95] per definizioni e importanti proprietà.

In pochi casi $\mathrm{D}(X)$ risulta finitamente generata come categoria triangolata; tali casi risultano tuttavia particolarmente interessanti. Paradigmatico è il teorema di Beĭlinson per gli spazi proiettivi, successivamente esteso ad altri casi quali le Grassmanniane, le quadriche, gli spazi proiettivi pesati, oltre a fibrati proiettivi e scoppiamenti di varietà con tale proprietà.

Il teorema di Beĭlinson può essere usato per fornire risoluzioni di fasci e per descrivere spazi di moduli di fibrati su $\mathbb{P}^n$, oltre ad implicare molti risultati classici, ad esempio il teorema delle sizigie di Hilbert e il criterio di spezzamento di Horrocks, il quale afferma che su $\mathbb{P}^n$ un fibrato E è somma di fibrati in rette se e solo se *è aCM, i.e. ha coomologia intermedia nulla* (cioè $\mathrm{h}^i(E(t)) = 0$ per ogni t e per $0 < i < n$). È quindi cruciale classificare i fibrati con tale proprietà coomologica su altre varietà, ancorché solo per spazi proiettivi e quadriche la classe dei fibrati indecomponibili aCM è finita a meno di twist.

Tali questioni sono studiate in particolare nel caso delle tre-varietà X di Fano lisce con $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}$, delle quali è disponibile una classificazione a meno di deformazione (vedasi [IP99] per una loro descrizione esaustiva). Nei casi in cui $\mathrm{D}(X)$ sia finitamente generata si fornisce una risoluzione esplicita della diagonale (equivalente alla struttura di $\mathrm{D}(X)$), e si fa uso di tale descrizione per dare criteri di spezzamento e studiare spazi di moduli di fibrati. Si studiano inoltre fibrati aCM su ipersuperfici e loro risoluzioni, in particolare si classificano per grado e rango bassi.

1. – Fibrati su Ipersuperfici.

Consideriamo una ipersuperficie irriducibile $X = \mathrm{V}(F_X) \subset \mathbb{P}^n$ e sia E un fibrato aCM ri rango r su X. Allora E esteso a zero su $\mathbb{P}^n$ ammette la risoluzione

$$0 \to \bigoplus_{i=1}^{l} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(a_i) \xrightarrow{M} \bigoplus_{j=1}^{l} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(b_j) \to E \to 0$$

ove F_X divide $\det(M)$. Se poi E ammette una 2-forma non degenere simmetrica (risp. antisimmetrica) del tipo $E \otimes E \to \mathcal{O}_X(d+t)$, allora E esteso a zero su $\mathbb{P}^n$ ammette la presentazione del tipo $L^*(t) \xrightarrow{M} L \to F$, ove $L = \oplus\, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(b_j)$, M è simmetrica (risp. antisimmetrica) e $F_X^r = \det(M)$.

Questo ci permette di analizzare fibrati su ipersuperfici di grado basso, nello spirito del lavoro sviluppato da Enrique Arrondo, Laura Costa e Carlo Madonna.

Diremo che un fibrato di rango 2 su X è *relativo* a una sottovarietà Y di codimensione 2 di X se è l'unico fibrato una cui sezione si annulla su Y. Nelle proposizioni seguenti i numeri nella tabella indicano i gradi delle forme omogenee nella matrice.

PROPOSIZIONE 1. – Sulla generica superficie cubica $X \subset \mathbb{P}^3$ esistono precisamente i seguenti fibrati aCM di rango 2:

1. Il fibrato relativo a un punto $p \in X$;
2. Il fibrato relativo a due punti $p, q \in X$, con risoluzione rispettivamente:

$$\text{punto:}\ \begin{array}{|c|ccc|}\hline 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ \hline\end{array} \qquad \text{2 punti:}\ \begin{array}{|c|ccc|}\hline 0 & 2 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ \hline\end{array}$$

3. Il fibrato, relativo a un sottoschema Z di altezza nulla e di grado 5 contenuto in X, con risoluzione lineare 6×6.

Inoltre tali fibrati si estendono agli unici fibrati aCM di rango 2 sulla generica ipersuperficie cubica in $\mathbb{P}^4$.

PROPOSIZIONE 2. – Sulla generica superficie quartica X in $\mathbb{P}^3$ esistono precisamente i seguenti fibrati aCM di rango 2:

1. Il fibrato relativo a un punto $p \in X$;
2. Il fibrato relativo a due punti $p, q \in X$;
3. Il fibrato relativo a un sottoschema Z di altezza nulla e di grado 8, con risoluzioni rispettivamente:

$$\text{punto:}\ \begin{array}{|c|ccc|}\hline 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ \hline\end{array} \qquad \text{2 punti:}\ \begin{array}{|c|ccc|}\hline 0 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \\ \hline\end{array} \qquad Z:\ \begin{array}{|c|ccc|}\hline 0 & 2 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ \hline\end{array}$$

4. Il fibrato E_d, relativo a un sottoschema Z_d di altezza nulla e di grado d con $d = 3, 4, 5$, con risoluzione rispettivamente

$$\text{d = 3:}\ \begin{array}{|c|ccc|}\hline 0 & 3 & 3 & 3 \\ \hline 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ \hline\end{array} \qquad \text{d = 4:}\ \begin{array}{|c|ccc|}\hline 0 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ \hline\end{array} \qquad \text{d = 5:}\ \begin{array}{|c|ccccc|}\hline 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline\end{array}$$

5. Il fibrato, relativo a un sottoschema di altezza nulla e di grado di grado 14, con risoluzione lineare 8×8.

Inoltre tali fibrati si estendono agli unici fibrati aCM di rango 2 sulla generica ipersuperficie quartica in $\mathbb{P}^4$.

Per quanto riguarda le quadriche lisce n-dimensionali, invece, è noto che gli unici fibrati aCM indecomponibili di rango maggiore di 1 sono i fibrati spinoriali. Nella seguente proposizione si danno risoluzioni esplicite ricorsive di tali fibrati prima per n dispari e poi per n pari.

PROPOSIZIONE 3. – Sia S il fibrato spinoriale su $Q = \mathrm{V}(x_0^2 + x_1 x_2 + \ldots + x_n x_{n+1})$, con $n = 2k-1$. Allora la matrice di presentazione M_k di S è costruita ricorsivamente dalle condizioni $\Delta_0 = 1$, $M_0 = x_0$ e dalle formule

$$\Delta_j = \begin{pmatrix} 0 & \Delta_{j-1} \\ (-1)^{j-1}\Delta_{j-1} & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_j = \begin{pmatrix} x_{2j-1}\Delta_{j-1} & M_{j-1} \\ (-1)^{j-1} M_{j-1} & (-1)^j x_{2j}\Delta_{j-1} \end{pmatrix}.$$

Siano poi S e S' i fibrati spinoriali su $Q = \mathrm{V}(x_1 x_2 + x_3 x_4 + \ldots + x_0 x_{n+1})$, con $n = 2k$. Allora S' and S'' sono dati dalle matrici $M = M_k$ ed $N = N_k$ con

$$\Delta_j = \begin{pmatrix} 0 & \Delta_{j-1} \\ (-1)^{j-1}\Delta_{j-1} & 0 \end{pmatrix} \qquad \Delta_0 = 1, \quad M_0 = x_0, \quad N_0 = x_{n+1}$$

e

$$M_j = \begin{pmatrix} x_{2j-1}\Delta_{j-1} & M_{j-1} \\ (-1)^{j-1} N_{j-1} & (-1)^j x_{2j}\Delta_{j-1} \end{pmatrix}, \qquad N_j = \begin{pmatrix} x_{2j-1}\Delta_{j-1} & N_{j-1} \\ (-1)^{j-1} M_{j-1} & (-1)^j x_{2j}\Delta_{j-1} \end{pmatrix}.$$

2. – Varietà tridimensionali con $\mathrm{D}(X)$ finitamente generata.

In questa sezione si daranno alcuni risultati circa le varietà tridimensionali X con $\mathrm{D}(X)$ finitamente generata, nel caso $\mathrm{Pic}(X) \cong \mathbb{Z}$. Tali varietà sono esattamente 4 e sono legate alle uniche orbite del gruppo $\mathsf{SL}(2, \mathbb{C}) = \mathsf{SL}(W)$ la cui chiusura è liscia. Tali orbite sono:

i) $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(\mathrm{Sym}^3 W)$ chiusura dell'orbita di $x^3 + y^3$;

ii) $Q_3 \subset \mathbb{P}(\mathrm{Sym}^4 W)$ chiusura dell'orbita di $x^4 + xy^3$;

iii) $V_5 = \mathbb{G}(\mathbb{C}^2, \mathrm{Sym}^4 W) \cap \mathbb{P}(\mathrm{Sym}^6 W)$ chiusura dell'orbita di $x^5 y - xy^5$;

iv) $U_{22} \subset \mathbb{P}(\mathrm{Sym}^{12} W)$ chiusura dell'orbita di $xy(x^{10} + 11x^5y^5 - y^{10})$. Per $\mathbb{P}^3$ e Q_3 si rimanda a risultati noti in letteratura. Le definizioni e i risultati circa le rimanenti varietà sono i seguenti.

DEFINIZIONE 4. – Sia $V_5 = \mathbb{G}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^4) \cap H_1 \cap H_2 \cap H_3 \subset \mathbb{P}^6$ e siano U e Q i fibrati universale e quoziente (di rango 2 e 3) su V_5. Si ha $\deg(V_5) = 5$, $K_{V_5} \cong \mathcal{O}_{V_5}(-2)$.

Il seguente teorema, legato al lavoro di Orlov in [Orl91], può essere dimostrato facendo uso dell'azione di $\mathsf{SL}(2, \mathbb{C})$ oppure della struttura di certi anelli Gorenstein Artiniani.

TEOREMA 5. – *Il fascio* $\mathcal{O}_\Delta \in \mathrm{Coh}(V_5 \times V_5)$ *ammette le due risoluzioni*

$$(1) \qquad 0 \to U(-1) \boxtimes U \to Q^*(-1) \boxtimes Q^* \to \mathcal{O}(-1) \boxtimes \Omega^1_{\mathbb{P}^6}(1)_{|V_5} \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_\Delta \to 0$$

$$(2) \qquad 0 \to \mathcal{O}(-1, -1) \to U \boxtimes \wedge^2 Q^* \to Q^* \boxtimes U \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_\Delta \to 0$$

Da (2) *otteniamo che un fascio senza torsione* F *su* V_5 *spezza come somma di fibrati in rette se e solo se per ogni* $t \in \mathbb{Z}$, *si ha* $\mathrm{H}^1(F \otimes Q^*(t)) = 0$ *e* $\mathrm{H}^2(F \otimes U(t)) = 0$.

Da (1) *otteniamo che un fibrato aCM semistabile F su V_5 ammette la risoluzione*

$$0 \to U^a \to (Q^*)^b \oplus \mathcal{O}^c \to F \to 0$$

Se F è stabile allora $c=0$. Se $c_1(F) \neq 0$ allora $c=0$. Se $c_1(F) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{rk}(F)$ allora $F \cong \mathrm{H}^1(Q^* \otimes F) \otimes U$.

DEFINIZIONE 6. – Sia U il 3-sottofibrato universale su $\mathbb{G}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^7)$. Definiamo $X = V_{22}$ come luogo degli zeri di tre generiche sezioni indipendenti di $\wedge^2 U^*$.

Nella famiglia di tali oggetti esiste una varietà speciale quasi-omogenea per l'azione di $\mathsf{SL}(2, \mathbb{C})$ che è detta U_{22} (vedi (iv) nell'elenco).

Si ha $K_X \cong \mathcal{O}_X(-1)$, $\deg(X) = 22$. Denotiamo con U e Q i fibrati universali ristretti a X. X ammette immersioni in $\mathbb{G}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^8)$ e in $\mathbb{G}(\mathbb{C}^5, \mathbb{C}^{14})$. Denotiamo con E e K rispettivamente i sottofibrati universali ristretti a X. Tali fibrati risultano essere stabili ed aCM e sono legati a differenti descrizioni di X, come insieme degli esagoni polari a una quartica piana, o come insieme delle cubiche gobbe annullate da un net di quadriche nello spazio proiettivo duale.

TEOREMA 7. – *La generica varietà $X = V_{22}$ ammette la seguente risoluzione di $\mathcal{O}_\Delta$*

$$0 \to E \boxtimes E \to U \boxtimes K \to Q^* \boxtimes U \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_\Delta \to 0$$

Nel caso di U_{22} si può ottenere tale risultato usando l'azione di $\mathsf{SL}(2, \mathbb{C})$. Per il caso generale è necessario prendere in esame i fibrati istantoni su $\mathbb{P}^3$ con $c_2 = 3$. Alcune dimostrazioni si ricollegano al lavoro di Schreyer in [Sch01], mentre altri passaggi sono legati a [Kuz96]. Lo studio ha come punto finale la descrizione dei fibrati aCM di rango 2 su X, in fase di ultimazione con Enrique Arrondo.

BIBLIOGRAFIA

[BO95] ALEXEI I. BONDAL e DMITRI O. ORLOV, *Semiorthogonal decomposition for algebraic varieties*, http://arXiv.org/abs/alg-geom/9506012, 1995.

[GM96] SERGEI I. GELFAND e YURI I. MANIN, *Methods of homological algebra*, Springer-Verlag, Berlin, 1996, Translated from the 1988 Russian original. MR 97j:18001

[IP99] VASILII A. ISKOVSKIKH e YURI. G. PROKHOROV, *Fano varieties*, Algebraic geometry, V, Encyclopaedia Math. Sci., vol. 47, Springer, Berlin, 1999, pp. 1-247. MR 2000b:14051b

[Kuz96] ALEXANDER G. KUZNETSOV, *An exceptional set of vector bundles on the varieties V_{22}*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh., **92**, no. 3 (1996), 41-44. MR 97m:14040

[Orl91] DMITRI O. ORLOV, *Exceptional set of vector bundles on the variety V_5*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh., no. 5 (1991), 69-71. MR 95f:14080

[Sch01] FRANK-OLAF SCHREYER, *Geometry and algebra of prime Fano 3-folds of genus 12*, Compositio Math., **127**, no. 3 (2001), 297-319.

Dipartimento di Matematica, Università di Firenze
E-mail: faenzi@math.unifi.it
Dottorato in Matematica, (sede amministrativa: Università di Firenze) - Ciclo XV
Direttore di ricerca: Prof. Giorgio Ottaviani, Università di Firenze