Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Matteo Franca

Un approccio dinamico allo studio delle soluzioni radiali positive di equazioni quasilineari ellittiche

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **7-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2004), n.3, p. 507–510.

Unione Mastematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2004_8_7A_3_507_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Mastematica Italiana, 2004.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VII-A, Dicembre 2004, 507-510

Un approccio dinamico allo studio delle soluzioni radiali positive di equazioni quasilineari ellittiche.

Matteo Franca

In questa nota si studiano le soluzioni positive con simmetria radiale di alcune equazioni alle derivate parziali ellittiche di tipo quasilineare o nonlineare della forma seguente:

$$\Delta u + f(r, u) = 0 \qquad r = |x|, \quad x \in \mathcal{R}^n \tag{1}$$

oppure

$$\Delta_p u + f(r, u) = 0 \qquad r = |x|, \quad x \in \mathcal{R}^n \tag{2}$$

ove $n \geqslant 3$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ è il Laplaciano in $\mathcal{R}^n$ e $\Delta_p u = div(\nabla u |\nabla u|^{p-2})$ è il p-Laplaciano. Tipicamente la funzione f prende la forma $f(r, u) = K(r) u^q$ per un dato esponente $q \geqslant 1$ e per una fuzione simmetrica $K(\cdot)$ che soddisfa opportune condizioni, ad esempio positività, monotonia, ecc. Più in generale f può prendere la forma $f(r, u) = \sum_i K_i(r) u^{q_i}$. Un caso speciale, ma di notevole interesse, è l'equazione della curvatura scalare: ponendo $p = 2$, $q = \frac{n+2}{n-2}$ (il cosidetto esponente critico di Sobolev), e $f(r, u) = K(r) u |u|^{q-1}$ nell'equazione (1), si ottiene

$$\Delta u + K(r) u |u|^{q-1} = 0 \tag{3}$$

L'equazione precedente si generalizza al caso del p-Laplaciano per $p \neq 2$ ponendo $q = \frac{np}{n-p} - 1$. Anche in questo caso tale valore dell'esponente è critico per l'equazione. Tali equazioni sono state riprese ripetutamente nella letteratura degli ultimi trent'anni, con maggiore enfasi sulle questioni di esistenza, molteplicità e proprietà dei cosiddetti ground states (stati fondamentali) e singular ground states (stati fondamentali singolari), più brevemente G.S. e S.G.S. Un G.S. di un'equazione di tipo (1) o (2) è una soluzione definita e positiva in tutto $\mathcal{R}^n$, che tende a 0 quando $|x|$ tende all'infinito; un S.G.S. è definito e positivo in $\mathcal{R}^n - \{0\}$ e soddisfa le seguenti condizioni

$$\lim_{|x| \to 0} u(x) = \infty \qquad \lim_{|x| \to \infty} u(x) = 0 .$$

Sono di interesse anche le soluzioni $u(x)$ che sono positive per $|x| < R$ rispettivamente $0 < |x| < R$, e tali che $u(x) = 0$ se $|x| = R$ (crossing solutions); ovviamente tali soluzioni risolvono anche un problema del tipo Dirichlet. A partire da un ben noto lavoro di Gidas, Ni e Nirenberg [3], si è sviluppato un proficuo studio dei

G.S. e dei S.G.S. dell'equazione (3) e di alcune altre equazioni del tipo (1). Negli anni successivi si sono visti altri notevoli sviluppi; di particolare rilievo è la classificazione delle soluzioni positive di varie equazioni del tipo (2) dovuta a Kawano, Yanagida e Yotsutani ([5]).

Un metodo classico per lo studio delle soluzioni radiali delle equazioni di tipo (1) consiste nell'introdurre una cosiddetta trasformata di Fowler. Tale trasformata dà luogo ad un sistema dinamico (non-autonomo se f dipende in modo esplicito da r); le soluzioni $u(r)$ di (1) corrispondono alle traiettorie di tale sistema dinamico. È stato osservato in [4] che alcui metodi ben noti nell'abito dei sistemi dinamici (varietà invarianti, funzioni di Mel'nikov ed altri), possono essere applicati al sistema dinamico che corrisponde all'equazione della curvatura scalare (3) quando $K(r) = 1 + \varepsilon k(r)$ (problema di Kazdan-Warner) e quando $K(r) = k(r^{\varepsilon})$ (perturbazione singolare), se ε ha valori piccoli. Questi risultati rappresentano il punto di partenza per il lavoro svolto.

Uno dei contributi più importanti della mia tesi è proprio l'introduzione di una «trasformata di Fowler», valida per molte equazioni della forma (2) anzichè della forma (1), quindi che hanno un p-Laplaciano al posto di un Laplaciano. Nel caso dell'equazione

$$\Delta u + K(r)\, u\,|u|^{q-1} = 0 \tag{4}$$

con $q = \dfrac{np}{n-p} - 1$, la trasformata ha la forma

$$\begin{gathered} x_1 = u(r) r^{\alpha} \qquad x_2 = u'(r)\,|u'(r)|^{p-2} r^{\beta} \\ r = e^t \quad \phi(t) = K(e^t) \quad \alpha = \frac{n-p}{p} \quad \beta = \frac{n(p-1)}{p} \end{gathered} \tag{5}$$

e il sistema dinamico non-autonomo è determinato dall'equazione differenziale

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2\,|x_2|^{\frac{2-p}{p-1}} \\ -\phi(t)\, x_1\,|x_1|^{q-1} \end{pmatrix}$$

L'evoluzione e il comportamento asintotico delle soluzioni di (6) possono essere studiati mediante metodi dinamici e topologici. Questo approccio offre un punto di vista nuovo sul problema e permette di combinare l'utilizzo di concetti tipici di un contesto variazionale con tecniche dinamiche. In particolare un secondo contributo importante consiste nell'utilizzo sistematico di una versione dinamica dell'identità di Pohozaev, che è uno dei principali strumenti di indagine per lo studio di soluzioni positive di (2). Nel contesto dell'equazione (6) la funzione appropriata è

$$H(x(t);\, t) := \alpha x_1 x_2 + \frac{p-1}{p}\,|x_2|^{\frac{p}{p-1}} + \phi(t)\,\frac{|x_1|^{q+1}}{q+1}\,.$$

Si noti che derivando si ottiene la seguente espressione

$$\frac{d}{dt} H(x(t), t) = \frac{d}{dt} \phi(t) \frac{|x_1|^{q+1}}{q+1}.$$

Pertanto nel caso autonomo H è un integrale primo del sistema e questo permette di tracciare ogni traiettoria sul piano $x_1 - x_2$; nel caso monotono H diventa una funzione di Ljapunov. Partendo da queste considerazioni, anche tramite l'utilizzo di stime derivanti dal confronto del problema autonomo con quello non-autonomo, è possibile «localizzare» le soluzioni della (6) in un'opportuna zona del piano $x_1 - x_2$, e da ciò ottenere delle informazioni concernenti le soluzioni positive della (4). Un procedimento analogo permette di studiare le soluzioni positive di molte altre equazioni sia della forma (1) che (2). È degno di nota, a mio avviso, il fatto che un analogo della funzione H era già noto per il sistema ottenuto da (3) tramite la Fowler «classica»; tuttavia le sue proprietà non erano state sfruttate a fondo. Pertanto, studiando problemi generalizzati del tipo (2) è stato possibile fornire nuovi risultati anche per equazioni del tipo (1).

Questo approccio ha portato in particolare ad un raffinamento delle stime sul comportamento asintotico delle soluzioni e ad una classificazione dei S.G.S., che sono particolarmente difficili da rilevare con tecniche variazionali. In [1] sono raccolti risultati di questa natura, ottenuti per il problema (4), sia per il caso critico, che sottocritico e supercritico, sotto opportune ipotesi di monotonia sulla $K(r)$. È interessante notare che il caso critico, che presenta particolari difficoltà dal punto di vista variazionale per una perdita di compatezza del problema, viene ad essere il caso più semplice con un approccio dinamico. Infatti i risultati più interessanti riguardano proprio l'equazione (4), nel caso perturbativo, per la quale è stato possibile una classificazione delle soluzioni positive, singolari e non, sia nel caso di perturbazioni singolari che per il problema di Kazdan-Warner. Per il problema con perturbazioni singolari si dimostra che l'esistenza di un punto critico non degenere di $K(r)$ è condizione sufficiente per l'esistenza di G.S. a decadimento rapido. Inoltre è stato possibile classificare G.S., S.G.S. e crossing solutions per un'ampia famiglia di potenziali $K(r)$. Alcuni di questi riultati sono nuovi anche per l'equazione con il Laplaciano classico. Le dimostrazioni fanno uso di una funzione di Mel'nikov, strettamente imparentata con la funzione H e proseguono e completano il lavoro iniziato con [4]. Anche in questo caso si è utilizzata la teoria della varietà invariante e una generalizzazione della costruzione dei «ferri di cavallo» di Smale per provare l'esistenza di un insieme di punti caratterizzati da comportamento caotico per (6). Si è quindi provato che l'esistenza di tale insieme era equivalente ad un insieme di cardinalità non numerabile di S.G.S. con decadimento lento. È degno di nota il fatto che sono stati ottenuti risultati anche per il caso in cui il potenziale $K(r)$ cambi di segno. Lo studio di questa equazione è proseguito anche a tesi ultimata e ha portato a generalzzare alcuni risultati di natura perturbativa al caso «in the large».

Nella tesi si prende in esame anche la seguente equazione

$$\Delta_p u - K^1(r)\, u|u|^{q_1-1} + K^2(r)\, u|u|^{q_2-1} = 0 \tag{7}$$

dove K^1 e K^2 sono opportune funzioni positive $q_1 < q_2$ e $n > p > 1$. Le soluzioni positive dell'equazione (7) presentano una struttura più ricca e quindi più complessa. Infatti il termine $-K^1(r)\, u|u|^{q_1-1}$ spinge le soluzioni $u(r)$ a crescere, mentre il termine $K^2(r)\, u|u|^{q_2-1}$ le spinge a calare. La rapidità della crescita o della decrescita dipende dagli esponenti q_i. Si è preso in esame il caso $q_1 \leqslant \frac{np}{n-p} - 1 \leqslant q_2$. Utilizzando tecniche di sistemi dinamici è stato possibile estendere al caso non-autonomo condizioni di non esistenza per G.S. già note per il caso autonomo e classificare i S.G.S. Si sono inoltre trovate condizioni sufficienti per l'esistenza di G.S. e S.G.S. con precise stime del relativo comportamento asintotico.

BIBLIOGRAFIA

[1] Franca M., *Classification of positive solutions of p-Laplace equation with a growth term*, to appear in Arch. Math.

[2] Franca M. e Johnson R., *Ground states and singular ground states for quasilinear partial differential equations with critical exponent in the perturbative case*, to appear in Adv. Nonlinear Studies.

[3] Gidas B., Ni W., e Nirenberg L., *Symmetry and related properties via the maximum principle*, Comm. Math. Phys., **68** (1979), 209-243.

[4] Johnson R., Pan X.B. e Yi Y.F., *The Melnikov method and elliptic equation with critical exponent*, Indiana Math. J., **43** (1994), 1045-1077.

[5] Kawano N., Yanagida E. e Yotsutani S., *Structure theorems for positive radial solutions to* $div(|Du|^{m-2}Du) + K(|x|)\, u^q = 0$ *in* $\mathcal{R}^n$, J. Math. Soc. Japan, **45** (1993), 719-742.

Dipartimento di Matematica, Università di Firenze
e-mail: franca@math.unifi.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Firenze) - Ciclo XV
Direttore di ricerca: Prof. Russell Johnson, Università di Firenze