
BOLLETTINO

UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

MONICA GENTILI

Minimizzazione di funzioni submodulari per la localizzazione di sensori su reti di traffico

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 7-A—La
Matematica nella Società e nella Cultura (2004), n.3, p. 511–514.*

Unione Matematica Italiana

http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2004_8_7A_3_511_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Minimizzazione di funzioni submodulari per la localizzazione di sensori su reti di traffico.

MONICA GENTILI

I flussi di traffico su una rete stradale sono generati dai viaggi effettuati da veicoli privati, commerciali o altre tipologie di veicoli, per andare da un punto origine (O) ad un punto di destinazione (D), i.e. rotta che collega O a D. Il monitoraggio in tempo reale sia delle caratteristiche principali dei flussi (ad esempio volume di flusso, probabilità di svolta alle intersezioni, densità del flusso, lunghezza delle code, ecc.), che del movimento di classi speciali di veicoli (autoambulanze, autobus, camion, ecc.) fornisce un valido strumento di supporto alla pianificazione ed alla gestione di reti di traffico. Localizzare sensori (presso le intersezioni di una rete di traffico o lungo gli archi stradali) permette di conoscere le caratteristiche dei flussi relativi alla porzione di rete monitorata. Ad esempio, le spire ad induzione, installate sotto la pavimentazione stradale, *contano* tutti i veicoli che passano sopra di esse fornendo così informazioni sul volume del flusso. Se una coppia di spire viene installata su un arco stradale (ad un'opportuna distanza) è possibile rilevare, oltre al volume del flusso, anche la velocità e la densità del flusso che transita sull'arco.

Problemi di notevole rilevanza applicativa, collegati alla localizzazione di sensori su una rete di traffico, possono essere inquadrati nelle seguenti tre classi:

- determinare una stima dei volumi di flusso tra tutti i punti origine e tutti i punti destinazione (stima della matrice O/D);
- determinare una stima dei volumi di flusso sugli archi della rete non direttamente monitorati;
- determinare una stima dei volumi di flusso delle rotte utilizzate dagli utenti sulla rete.

La bontà e la robustezza della stima ottenuta dipende da un lato, dalla localizzazione dei sensori (*dove* e *quanti* sensori sono localizzati) e, dall'altro lato, dai modelli e dai procedimenti di stima utilizzati. Da un'attenta analisi della letteratura emerge che molti contributi si sono concentrati sullo sviluppo di metodi e modelli per determinare una stima dei volumi di traffico (in particolare una stima della matrice O/D), mentre, il problema decisionale di *localizzare* in maniera *ottimale* sensori sulla rete è stato oggetto di poca analisi ([1], [2], [3], [4]).

Il lavoro di tesi si concentra sull'analisi di questa seconda tipologia di problemi. In particolare, sono oggetto di studio il problema di localizzare sensori in maniera ottima per (i) la stima dei volumi di flusso delle rotte utilizzate dagli utenti e (ii) la stima dei volumi di flusso sugli archi della rete non direttamente monitorati.

Sono state prese in considerazione tre diverse tipologie di sensori: (i) sensori di tipo attivo (*active sensors*), localizzati sugli archi della rete, che permettono l'identificazione dei singoli veicoli in transito, (ii) sensori di tipo visuale (*image sensors*), localizzati sui nodi della rete, per esempio telecamere poste ad incroci stradali, che permettono la determinazione delle probabilità di svolta ad un incrocio, ed infine (iii) i più comuni ed utilizzati sensori di conteggio (*counting sensors*), localizzati sugli archi o sui nodi della rete, che *contano* i veicoli che passano su una sezione stradale restituendo i volumi di flusso sugli archi monitorati.

Il lavoro di ricerca ha portato alla definizione di tre nuove tipologie di problemi di cui sono state studiate le proprietà strutturali, e per le quali sono stati definiti algoritmi risolutivi di tipo esatto ed approssimato.

Il primo problema affrontato, *Sensor Location on Arc Problem (SLAP)*, riguarda la localizzazione dei sensori di tipo attivo per determinare i volumi di flusso delle rotte. Il problema è stato definito come quello di *trovare il minimo numero di sensori da localizzare sugli archi della rete, in modo da aggiungere equazioni lineari (ogni sensore permette di aggiungere un insieme predefinito di equazioni) ad un sistema dato di equazioni lineari ed ottenere una matrice dei coefficienti di rango pieno*. Poiché, da un punto di vista applicativo, su una rete stradale vi possono essere già localizzati sensori di conteggio, sono stati individuati tre possibili scenari a seconda che sensori di conteggio siano presenti (1) su tutti gli archi della rete (*SLAP-tot*), (2) su un sottoinsieme di archi (*SLAP-par*), o, (3) su nessun arco (*SLAP-zero*). Nella tesi si dimostra che il problema, nella sua versione generale, è NP-Completo. Istanze del problema risolubili in tempo polinomiale, sono state individuate sotto l'ipotesi che ogni arco sia attraversato esattamente da due rotte. In questo caso, è possibile risolvere il problema in modo esatto utilizzando un grafo ausiliario, il *grafo intersezione delle rotte*. Più in particolare, data una rete di trasporto $\Gamma = (N, A)$ ed un insieme di rotte $\mathcal{R} = (R_1, R_2, \dots, R_p)$ definite su di essa, il grafo intersezione delle rotte $G = (N, E)$ è tale che ogni vertice $v \in V$ corrisponde ad una rotta R_v ed esiste un arco $(u, v) \in E$ se le corrispondenti rotte R_u ed R_v hanno un arco in comune. Si dimostra che risolvere *SLAP-zero* su Γ è equivalente a risolvere il problema di coprire i vertici di G con il minimo numero di archi (*Vertex Covering by Edges Problem (VCE)*), problema risolubile in tempo polinomiale. Mentre, risolvere *SLAP-par* e *SLAP-tot* su Γ è equivalente a risolvere una generalizzazione del *VCE* su G il *Generalized Vertex Covering by Edges Problem (GVCE)*: dato un grafo $G = (V, E)$ ed una partizione dei vertici $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_k\}$, $P_i \cap P_j = \emptyset \forall i, j = 1, 2, \dots, k$ e $i \neq j$, $\bigcup_{i=1, \dots, k} P_i = V$, trovare il minimo numero di archi che coprono tutti gli insiemi

della partizione. Si dimostra che *GVCE* è risolubile in tempo polinomiale. Quindi, sulla base di questi risultati è stato presentato un algoritmo polinomiale per risolvere in maniera esatta le tre istanze del problema. Inoltre, viene presentato un algoritmo di tipo greedy per la risoluzione del problema nel caso più generale (che tuttavia si dimostra trovare la soluzione ottima per *SLAP-tot* nel caso vi siano esattamente due rotte su ogni arco).

Il secondo problema affrontato (*IMAGES*) riguarda la localizzazione di sensori visuali sulle intersezioni di una rete di trasporto per determinare i volumi di flusso delle rotte. Come per il problema precedente sono state definite tre diverse classi di istanze del problema (*IMAGES-zero*, *IMAGES-tot*, e *IMAGES-par*) a seconda del numero di sensori di conteggio già localizzati sulla rete, e sono state inoltre individuate speciali istanze polinomiali.

Anche *IMAGES*, come *SLAP*, può essere definito come il problema di trovare il minimo numero di sensori da localizzare sui nodi della rete, in modo da aggiungere equazioni lineari ad un sistema dato per ottenere una matrice dei coefficienti di rango pieno. La sostanziale differenza tra *SLAP* ed *IMAGES* consiste nella tipologia degli insiemi di equazioni associate ai sensori.

Il tentativo di chiarire meglio il legame tra i due problemi e la loro relazione con la letteratura esistente ha portato alla definizione di un nuovo problema combinatorio *The Full Rank Submatrix Extension Problem with Few Colors* che contiene *SLAP* ed *IMAGES* come casi particolari. Più nel dettaglio, sia data una matrice L 0-1 con m righe e p colonne, $m > p$, tale che $\text{rango}(L) = p$, sia R l'insieme dei suoi vettori riga, $\mathcal{C} = \{1, 2, \dots, c\}$ un insieme di colori e $\pi : R \rightarrow \mathcal{C}$ una funzione che associa un colore ad ogni riga: si vuole determinare un sottoinsieme $S \subseteq R$ tale che (i) la sottomatrice L_S con $|S|$ righe e p colonne ottenuta considerando i vettori in S abbia $\text{rango}(L_S) = \text{rango}(L) = p$, e, (ii) il numero di colori diversi utilizzati dagli elementi di S sia minimo.

Il problema viene formulato come la minimizzazione di una funzione submodulare (nello specifico la funzione rango di un matroide di partizione) su una famiglia di insiemi costituita dalle basi di un matroide matricale definito sull'insieme R delle righe di L .

Infine il terzo problema preso in considerazione riguarda la localizzazione del minimo numero di sensori di conteggio sulle intersezioni di una rete di trasporto per la determinazione dei volumi di flusso sugli archi della rete non direttamente monitorati. Per studiare la complessità del problema, noto in letteratura come *Sensor Location Problem (SLP)*, è stato definito un nuovo equivalente problema il *Dominating Paths problem (DPP)* che nella tesi si dimostra essere NP-Completo. Sono stati inoltre individuate classi polinomiali del problema per speciali tipologie di grafo (nello specifico per cammini, pettini e cicli) i cui algoritmi risolutivi hanno permesso la definizione di un algoritmo approssimato per il caso generale.

BIBLIOGRAFIA

- [1] L. BIANCO, G. CONFESSORE, P. REVERBERI, *A network based model for traffic sensor location with implications on O/D matrix estimates*, *Transportation Science*, **35**, 1 (2001), 50-60.
- [2] W. H. K. LAM, H. P. LO, *Accuracy of O-D estimates from traffic counts*, *Traffic Engineering and Control*, **31** (1990), 358-367.
- [3] H. YANG, Y. IIDA, T. SASAKI, *An analysis of the reliability of an Origin/Destination trip matrix estimated from traffic counts*, *Transportation Research B*, **25** (1991), 351-363.
- [4] H. YANG, J. ZHOU, *Optimal Traffic Counting locations for Origin-destination matrix estimation*, *Transportation Research*, **32B**, 2 (1998), 109-126.

Dipartimento di Statistica Probabilità e Statistiche Applicate,
Università di Roma «La Sapienza»; e-mail: monica.gentili@uniroma1.it
Dottorato in Ricerca Operativa (sede amministrativa):
Università di Roma «La Sapienza» - Ciclo XV
Direttore di Ricerca: Prof. G. Di Pillo, Università di Roma «La Sapienza»