Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Raffaella Giova

Schemi alle differenze finite per problemi di diffusione-trasporto a trasporto dominante

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **7-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2004), n.3, p. 515–518.

Unione Mastematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2004_8_7A_3_515_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Mastematica Italiana, 2004.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VII-A, Dicembre 2004, 515-518

Schemi alle differenze finite per problemi di diffusione-trasporto a trasporto dominante.

RAFFAELLA GIOVA

È noto che problemi ai limiti che coinvolgono equazioni alle derivate parziali, intervengono nella modellistica di numerosi problemi di interesse fisico, ingegneristico, applicativo in genere. Nella maggior parte dei casi, la ricerca di una soluzione analitica di tali problemi risulta essere impraticabile, per cui è di interesse individuare tecniche numeriche per la determinazione di soluzioni approssimate. È compito dell'analista numerico verificare, poi, che la successione delle soluzioni approssimate converga alla soluzione esatta del problema assegnato, e che gli algoritmi prosposti possano essere di fatto implementati a costi ragionevoli.

La tesi è stata rivolta all'individuazione di opportune tecniche di discretizzazione, al loro studio teorico e alla conseguente implementazione, per i seguenti problemi ai limiti di tipo *diffusione-trasporto*:

$$\begin{cases} -\varepsilon u'' + \beta u'(x) = f & \text{in }]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} -\varepsilon \Delta u + \vec{\beta} \cdot \vec{\nabla} u = f & \text{in } \Omega =]0,1[\times]0,1[\\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

(rispettivamente nel caso monodimensionale e bidimensionale), con condizioni al contorno di tipo Dirichlet.

Per l'approssimazione delle suddette equazioni sono stati in prevalenza studiati metodi alle differenze finite, anche se alcune idee possono essere applicate anche al caso di altri metodi. Più precisamente, l'attenzione è stata rivolta principalmente al caso in cui i problemi in questione sono in regime di *trasporto dominante*, nell'ipotesi, cioè, in cui il coefficiente di viscosità ε è piccolo rispetto a quello di trasporto $|\vec{\beta}|$.

Per essere più esatti, ricordiamo che, nel caso delle differenze finite con parametro di discretizzazione h, un problema di diffusione-trasporto si dice a trasporto dominante quando

$$h > \frac{2\varepsilon}{|\vec{\beta}|}$$

quando, cioè, la risoluzione numerica non è sufficiente ad ottenere l'accuratezza necessaria per seguire l'evoluzione dei cosiddetti *boundary layers*, generando di conseguenza soluzioni approssimate affette da oscillazioni.

Dato che in situazioni di questo tipo le più elementari tecniche numeriche si rivelano del tutto inaccurate, sorge la necessità di sviluppare metodi più raffinati, quali quelli presi in considerazione in questa tesi.

Partendo da queste considerazioni il lavoro è stato organizzato nel seguente modo.

Nel **capitolo 1** sono stati presentati i problemi ai limiti su cui si è investigato, sia nella loro formulazione classica, sia in quella variazionale. Più precisamente, dopo una breve introduzione sulle origini fisiche di questi problemi si enunciano e dimostrano alcune proprietà della loro soluzione. Infine si riportano diversi risultati noti di analisi matematica e analisi numerica utili per alcune dimostrazioni riportate nei capitoli successivi.

Nei **capitoli 2** e **3** si studia la discretizzazione del problema rispettivamente monodimensionale e bidimensionale. Nella prima parte dei due capitoli si dimostra che, in entrambi i casi, tecniche numeriche come *differenze finite centrate* o *metodo di Galerkin* (che viene presentato nel caso particolare del *metodo degli elementi finiti*) sono poco soddisfacenti nel caso in cui ci si trovi in regime di trasporto dominante. Essi producono, infatti, per ogni fissato h, soluzioni che divergono oscillando per $\varepsilon \to 0$.

Un classico metodo che elimina le oscillazioni (soddisfacendo quindi ad un *principio di massimo* nel discreto) è quello noto come *metodo upwind*, che è equivalente al metodo delle differenze finite centrate associato, però, ad un problema avente un parametro di viscosità più grande ($\varepsilon +$ *viscosità artificiale*). Malgrado ciò, questo metodo produce soluzioni affette da eccessiva viscosità, ed inoltre presenta un ordine di convergenza solo lineare.

Lo scopo è stato, dunque, quello di determinare degli schemi che fossero stabilizzati rispetto al parametro ε (che producessero cioè soluzioni limitate e non oscillanti per $\varepsilon \to 0$, ad h fissato), e che nel contempo conservassero un buon grado di accuratezza.

Tra le tecniche numeriche recentemente studiate vi sono quelle che propongono l'utilizzo di nodi di *collocazione* diversi dai nodi scelti per rappresentare la soluzione discreta.

Seguendo l'idea sviluppata in [1] nell'ambito dei metodi spettrali, successivamente estesa in [2] e utilizzata, poi, nell'ambito delle differenze-finite per lo studio del caso monodimensionale in [3], sono stati proposti e analizzati schemi alle differenze-finite basati su due differenti griglie di nodi. Più precisamente, l'idea seguita nella seconda parte dei capitoli **capitoli 2** e **3** è la seguente. Si supponga di avere un operatore L lineare e invertibile e di voler approssimare la soluzione u del problema $Lu = f$, per una data funzione f, mediante una discretizzazione $\vec{L}_h$ dell'operatore, basata su tecniche puntuali del tipo differenze-finite o metodi spettrali. La soluzione u_h apparterrà ad uno spazio discreto X_h.

Si considerano, allora, due insiemi di nodi nel dominio di definizione di u:

il primo $\vec{x}_h$ utilizzato per rappresentare la soluzione;
il secondo $\vec{\tau}_h$ usato per collocare l'equazione.

Si costruisce, poi, l'operatore discreto in modo che: $\vec{L}_h v \approx (Lv)(\vec{\tau}_h)$, per ogni v appartenente ad un'opportuna classe di funzioni.

Come nella maggior parte degli schemi di collocazione i nodi $\vec{x}_h$ e $\vec{\tau}_h$ possono coincidere, ma è possibile ottenere risultati migliori quando il secondo insieme è scelto in modo opportuno (in funzione della griglia $\vec{x}_h$ e dell'operatore L); ad esempio, realizzando una discretizzazione di tipo *superconsistente*. In tal caso, la griglia $\vec{\tau}_h$ è tale che il vettore differenza $\vec{L}_h v - (Lv)(\vec{\tau}_h)$ è nullo non solo per le funzioni appartenenti allo spazio X_h di approssimazione (proprietà che potremmo definire di *consistenza standard*), ma anche per altre funzioni, in modo che la soluzione discreta u_h appartenga automaticamente ad uno spazio la cui dimensione globale è maggiore del numero di gradi di libertà necessari nella costruzione di u_h stessa.

Dopo aver studiato il caso unidimensionale corrispondente all'operatore $L = -\varepsilon \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta \dfrac{\partial}{\partial x}$, cioè aver visto che è possibile determinare una griglia di collocazione superconsistente, ed averne esaminato i vantaggi, si è esteso il risultato al caso bidimensionale, ossia al caso in cui l'operatore è del tipo $L = -\varepsilon \Delta + \vec{\beta} \cdot \vec{\nabla}$.

Si osservi che, seppure l'idea da cui si parte è la stessa, le tecniche utilizzate nel caso bidimensionale non sono una semplice estensione di quelle del caso unidimensionale.

Nel caso bidimensionale, infatti, partendo dall'idea che il problema da risolvere sia quello di un'opportuna identificazione dei punti di collocazione $\vec{\tau}_h$ diversi dai punti $\vec{x}_h$, sono stati studiati attentamente i coefficienti relativi alla *viscosità artificiale* ed è stata introdotta una quantità, che nel caso modimensionale corrisponderebbe alla variazione totale, che permette di controllare le eventuali oscillazioni esibite dalla soluzione discreta.

Dall'analisi qualitativa dei grafici relativi a questi due indicatori si è intuito come dovesse essere scelta la griglia di collocazione in modo da minimizzare la viscosità evitando, al tempo stesso, l'insorgere di oscillazioni.

È stato, quindi, proposto nel **capitolo 4** un algoritmo per l'individuazione dei punti di collocazione basato sulle proprietà di superconsistenza, ed è stato verificato che i nodi così ottenuti coincidono, in linea di massima, con le osservazioni sperimentali fatte nel **capitolo 3**.

Si è verificato, con ulteriori prove numeriche, che lo schema alle differenze a cui conduce questa scelta dei nodi di collocazione produce di fatto approssimazioni soddisfacenti. Questo è dimostrato non solo dai grafici delle soluzioni discrete prodotte da questo nuovo schema, ma anche dal confronto che è stato fatto tra lo *spettro* della matrice associato a questo schema e quello della matrice associata allo schema alle differenze centrate. È stato, infine, riportato un teorema di stabilità che giustifica dal punto di vista teorico le scelte dei nodi di collocazione che, in base agli esiti numerici, vengono ritenute ottimali. Per quanto riguarda la convergenza, tenendo conto del risultato di stabilità e del fatto che tutti gli errori di approssimazione che intervengono decadono come h^2 ci si aspetta che lo schema numerico proposto abbia una rapidità di convergenza del secondo ordine, anche se non sono riportate stime dell'errore.

BIBLIOGRAFIA

[1] FUNARO, D., *Spectral Elements for Transport-Dominated Equations*, SIAM J. Numer. Anal. 30, **6** (1993), 1664-1676.
[2] FUNARO, D., *A new Scheme for the Approximation of Advection-Diffusion Equations by Collocation*, Lecture Notes In Computational Science and Engineering, Volume 1, Springer-Verlag, New York (1997).
[3] FUNARO, D., *A note on second-order finite-differences schemes on uniform meshes for advection-diffusion equations*, Numer. Methods PDEs, **15** (1999), 581-588.

Dipartimento di Matematica e Applicazioni «R. Caccioppoli»
Università degli Studi di Napoli «Federico II»; e-mail: rgiova@unina.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa:
Università di Napoli «Federico II») - Ciclo XIV
Direttore di ricerca: Prof. Daniele Funaro, Univ. degli Studi di Modena e Reggio Emilia