Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Anna Gori

Azioni coisotrope di gruppi di Lie compatti su varietà Kähleriane

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **7-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2004), n.3, p. 519–522.

Unione Mastematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2004_8_7A_3_519_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Mastematica Italiana, 2004.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VII-A, Dicembre 2004, 519-522

Azioni coisotrope di gruppi di Lie compatti su varietà Kähleriane.

ANNA GORI

Si studiano le relazioni esistenti tra punti critici del quadrato della mappa momento e orbite di un gruppo di Lie compatto K che agisce in modo Hamiltoniano su di una varietà Kähleriana M. I risultati ottenuti vengono poi applicati all'analisi delle varietà two-orbit e più in generale alle azioni coisotrope su M, determinando una completa classificazione dei gruppi di Lie compatti che agiscono in maniera coisotropa e polare sulle Grassmanniane complesse.

La mappa momento $\mu : M \to \mathfrak{k}^*$, dove $\mathfrak{k}^*$ denota il duale dell'algebra di Lie di K, è introdotta in geometria simplettica in presenza di una azione Hamiltoniana di un gruppo di Lie compatto K su di una varietà M.

È possibile identificare l'algebra di Lie $\mathfrak{k}$ e la sua duale $\mathfrak{k}^*$ tramite un prodotto scalare K-invariante su $\mathfrak{k}$, pertanto l'algebra di Lie $\mathfrak{t}$ di un toro massimale T di K corrisponde ad un sottospazio $\mathfrak{t}^*$ di $\mathfrak{k}^*$. Fissata una Weyl chamber $\mathfrak{t}^*_+$ in $\mathfrak{t}^*$, ricordiamo che questa interseca ogni orbita coaggiunta in un sol punto. L'insieme $\mu(M) \cap \mathfrak{t}^*_+$, indicato con $\Delta(M)$, è detto *moment polytope* o *Kirwan polytope*, ed è un sottoinsieme convesso di $\mathfrak{t}^*$.

L'idea che sia possibile riconoscere una varietà dalla sua immagine tramite la mappa momento è giustificata da una congettura di Delzant [3], dimostrata in casi particolari, che «traduce» proprietà geometriche di un'azione nel linguaggio dei politopi convessi.

Molti autori hanno studiato la convessità di $\Delta(M)$; si vedano F. Kirwan [6] e Heinzner e Huckleberry [4] rispettivamente nel caso compatto e non compatto.

Nel seguito faremo riferimento al risultato di convessità per gruppi di Lie compatti K e varietà simplettiche compatte M, ottenuto in [6], ove vengono usate proprietà della norma del quadrato della mappa momento $f := \|\mu\|^2$, dove $\|\cdot\|$ è la norma indotta dal prodotto scalare su $\mathfrak{k}$.

L'insieme dei punti critici della funzione f presenta, in generale, singolarità tali che f non è una funzione di Bott-Morse non degenere. In [6] tuttavia si prova che l'insieme dei punti critici di f continua ad essere unione disgiunta di un numero finito di chiusi $\{C_\beta \mid \beta \in \mathbf{B}\}$, dove $\mathbf{B}$ è un insieme finito contenuto in $\mathfrak{t}^*_+$, su ciascuno dei quali f assume un valore costante. Ne segue che per ogni $x \in M$ esiste un unico $\beta \in \mathbf{B}$ tale che l'insieme limite $\omega(x)$ per f sia contenuto in C_β. Pertanto M risulta unione dei sottoinsiemi $\{S_\beta \mid \beta \in \mathbf{B}\}$, dove $x \in S_\beta$ se $\omega(x)$ è incluso in C_β. Si dice allora che f induce una *stratificazione* su M.

Il nostro primo obbiettivo è stato quello di usare la funzione f per trovare relazioni tra punti di $\Delta(M)$ e K-orbite in M.

Abbiamo studiato lo strato $S_{\overline{\beta}}$ corrispondente al valore minimo di f senza fare alcuna ipotesi sull'azione del gruppo compatto K su M. In questo contesto si è data una generalizzazione di un risultato ottenuto in [6], provando che se M è Kähler, lo strato minimo ha struttura di fibrato. La nostra dimostrazione vale per varietà Kähler qualunque non necessariamente compatte, sotto l'ipotesi che $\mu(M) \cap \mathfrak{t}_+^*$ sia chiuso e convesso. Più precisamente per una varietà Kähleriana M sotto l'azione olomorfa di un gruppo di Lie riduttivo $G = K^{\mathbb{C}}$ si prova che $S_{\overline{\beta}}$ è equivariantemente isomorfo a $G \times_{P_-(\overline{\beta})} Y_{\overline{\beta}}^{\min}$; dove $P_-(\overline{\beta})$ è un sottogruppo parabolico di G e $Y_{\overline{\beta}}^{\min}$ è un sottoinsieme aperto dello strato $Y_{\overline{\beta}}$ definito su M tramite la funzione altezza $\mu_{\overline{\beta}} := \langle \mu, \overline{\beta} \rangle$, che risulta essere di Bott-Morse.

La caratterizzazione precedente di $S_{\overline{\beta}}$ può essere usata per introdurre una stratificazione di M in maniera diversa. Infatti si possono applicare i risultati ottenuti per lo strato minimo $S_{\overline{\beta}}$ al suo complementare $Y := M \backslash S_{\overline{\beta}}$, che risulta chiuso e G-invariante. Se M è compatta si puo' infatti provare che $S_{\overline{\beta}}$ è aperto nella topologia di Zariski, pertanto Y è analitico ed unione di componenti irriducibili che hanno immagine convessa e chiusa. Applicando i risultati ottenuti a Y, o più precisamente alle sue componenti irriducibili, si trova la stratificazione cercata su M.

Si sono analizzate successivamente le K-orbite che corrispondono al massimo di f, nel caso di varietà compatte, provando che se M è Kähler e su di essa agisce in maniera Hamiltoniana un gruppo di Lie di isometrie compatto e connesso e $x \in M$ realizza il massimo di f, l'orbita $K \cdot x$ è complessa. Da questo risultato si ottiene una caratterizzazione delle varietà Kähler compatte M sulle quali la funzione f è costante. Vale infatti il seguente

TEOREMA 1. – *Sia M una varietà Kähler K-Hamiltoniana compatta, sulla quale agisce un gruppo compatto K di isometrie. La funzione f è costante se e solo se M è biolomorficamente e K-equivariantemente isometrica al prodotto di una varietà bandiera e una varietà Kähler compatta su cui K agisce banalmente.*

Ammetteremo nel seguito che l'azione di K sia quasi-omogenea.

Ricordiamo che se (M, g) è una varietà Kähler compatta con forma Kähler ω e K è un sottogruppo compatto del suo gruppo di isometrie, si dice che M è $K^{\mathbb{C}}$-*quasi omogenea* se $K^{\mathbb{C}}$ ha un'orbita aperta in M.

Nel caso di azioni quasi omogenee si mostra facilmente che, se Ω indica la G-orbita aperta, allora necessariamente Ω è contenuta nello strato $S_{\overline{\beta}}$.

Il risultatao seguente descrive cosa accade se due punti critici di f appartengono ad Ω.

PROPOSIZIONE 1. – *Sia M una varietà compatta complessa e K un gruppo di Lie semisemplice compatto connesso di trasformazioni olomorfe su M, tale che $K^{\mathbb{C}}$ abbia un'orbita aperta su M; se ω è una forma Kähler K-invariante, allora esiste un'altra forma Kähler K-invariante ω' coomologa a ω e la cui mappa mo-*

mento ha la proprietà che due punti critici per $\|\mu\|^2$, *che appartengono alla stessa G-orbita, appartengono anche alla stessa K-orbita.*

Quando il complemento N della G-orbita aperta è omogeneo, la varietà M è detta *two-orbit*. Akhiezer [1] ha classificato le varietà two-orbit nel caso N ipersuperficie complessa, mentre S. Cupit-Foutou [2] ha completato tale classificazione per G riduttivo. Questo problema è stato da noi affrontato al fine di ricavare una nuova classificazione seguendo un diverso approccio di tipo simplettico.

Abbiamo studiato, in particolare, l'insieme dei punti critici di f applicando risultati standard della teoria di Morse e ottenendo informazioni sulla coomologia e la coomologia K-equivariante di M. Vale infatti il seguente

TEOREMA 2. – *Sia M una varietà Kähler compatta e K un gruppo di Lie compatto e connesso di isometrie che agisce su M in maniera Hamiltoniana. Se il complessificato G di K agisce su M con due orbite allora*

i) K è semisemplice e M è algebrica proiettiva e semplicemente connessa.

ii) i numeri di Hodge $h^{p,q}(M) = 0$ se $p \neq q$;

iii) la funzione $f: M \to \mathbb{R}$ è di Bott-Morse; ha due sole sottovarietà critiche date dalla G-orbita chiusa N, su cui f assume il massimo e dalla K-orbita S, che realizza il minimo. Il polinomio di Poincaré $P_M(t)$ di M soddisfa

$$P_M(t) = t^k \cdot P_N(t) + P_S(t) - (1+t)R(t),$$

dove k è la codimensione reale di N in M e $R(t)$ è un polinomio con coefficienti interi positivi. In particolare $\chi(M) = \chi(N) + \chi(S)$;

iv) se $\chi(M) > \chi(N)$, allora f è una funzione di Bott-Morse perfetta

v) La serie di Poincaré K-equivariante di M è data da

$$P_M^K(t) = t^k \cdot P_N^K(t) + P_S^K(t).$$

Cupit-Foutou, nella sua classificazione, ha risolto una congettura di Luna, provando che le varietà two-orbit sono sferiche. Un teorema di Huckleberry and Wurzbacher [5] stabilisce che questa proprietà è equivalente al fatto che K agisca sulle varietà two-orbit in modo coisotropo. Ricordiamo che se (M, g) è Kähler con forma ω e K è un sottogruppo del suo gruppo di isometrie, allora l'azione di K detta *coisotropa* se le orbite principali sono coisotrope rispetto a ω. Le varietà two-orbit sono pertanto uno degli esempi più semplici di azioni coisotrope.

Usando tecniche simili a quelle applicate per provare il Teorema si sono determinate proprietà topologiche e coomologiche per varietà Kähler su cui K agisce in modo coisotropo. In particolare si è provato che se K' è un sottogruppo chiuso di un gruppo di Lie compatto K e K' agisce coisotropicamente su M anche K agisce allo stesso modo. Come conseguenza, si possono classificare i gruppi di Lie compatti che agiscono in maniera coisotropa su di una varietà M, seguendo una sorta di metodo «telescopico» restringendoci ai sottogruppi massimali di gruppi che agiscono transitivamente, passando poi ai sottogruppi massimali di gruppi che agiscono in modo coisotropo e così via.

Abbiamo applicato la tecnica precedente per dare la completa classificazione dei sottogruppi compatti di $\mathrm{SU}(n)$ che agiscono coisotropicamente sulle Grassmanniane complesse $Gr(k, n)$.

Ricordiamo infine che l'azione isometrica di un gruppo K è detta *polare* su M se esiste una sottovarietà Σ, detta *sezione*, che interseca ogni K-orbita ed è ortogonale alle K-orbite nei punti di intersezione. Se la sezione è piatta l'azione è detta *iperpolare*. Le azioni polari costituiscono una classe piuttosto ampia di azioni coisotrope, infatti Podestá e Thorbergsson [7] hanno provato che un'azione polare su di una varietà omogenea irriducibile compatta Kähler è coisotropa. Pertanto, una volta definita la lista completa dei gruppi che agiscono in maniera coisotropa su $Gr(k, n)$, abbiamo anche determinato quali fra queste risultino polari, provando, allo stesso tempo, che tutte queste azioni sono iperpolari. I risultati di tale classificazione sono troppo estesi per poter essere riportati in questa nota.

BIBLIOGRAFIA

[1] Akhiezer D. N., *Equivariant completions of homogeneous algebraic varieties by homogeneous divisors*, Ann. Glob. Anal. Geom., **2** (1983), 49-78.
[2] Cupit-Foutou S., *Classification of two-orbits varieties*, preprint (2002).
[3] Delzant T., *Classification des actions hamiltoniennes completement integrables de rang deux,* Ann. Global Anal. Geom., 8 (1990), 87-112.
[4] Heinzner P., Hukleberry, A.T., *Kählerian potentials and convexity properties of the moment map*, Invent. Math., **126** (1996), 65-84.
[5] Huckleberry A.T., Wurzbacher, T., *Multiplicity-free complex manifolds,* Math. Analen, **286** (1990), 261-280.
[6] Kirwan F., *Convexity properties of the moment mapping III*, Invent. Math., **77** (1984), 547-552.
[7] Podestà F., Thorbergsson G., *Polar and Coisotropic Actions on Kähler Manifolds,* Trans. Am. Math. Soc., **354** (2002), 236-238.

Università degli studi di Firenze; e-mail: gori@math.unifi.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Firenze) - Ciclo XV
Relatore: Prof. Fabio Podestà, Università di Firenze