Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Luca Grosset

Programmazione della campagna pubblicitaria per l'introduzione di un nuovo prodotto nel mercato: un approccio stocastico

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **7-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2004), n.3, p. 523–525.

Unione Mastematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2004_8_7A_3_523_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Mastematica Italiana, 2004.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VII-A, Dicembre 2004, 523-525

Programmazione della campagna pubblicitaria per l'introduzione di un nuovo prodotto nel mercato: un approccio stocastico.

LUCA GROSSET

1. – Modello generale.

In questo lavoro si è sviluppato un modello stocastico riguardante la pianificazione di una campagna di comunicazione che precede l'introduzione di un prodotto nel mercato giungendo alla formulazione e alla soluzione in forma chiusa di alcuni problemi di controllo ottimo. Tali problemi sono stati studiati utilizzando la teoria del controllo stocastico e sfruttando alcuni risultati recenti di controllo stocastico lineare quadratico, collegati con una generalizzazione dell'equazione di Riccati [4], [1]. I riferimenti principali per il modello, nella letteratura scientifica relativa alle applicazioni della matematica al marketing, sono:

- il modello di Nerlove e Arrow [3], per un'azienda che controlli, attraverso il flusso di pubblicità o di altre forme di comunicazione, l'evoluzione del goodwill di un prodotto e, tramite questo, influenzi (determini) la domanda per il prodotto;
- un modello deterministico studiato da Buratto e Viscolani [2], per le strategie di comunicazione nella preparazione dell'introduzione di un prodotto nel mercato.

Nel modello generale, proposto utilizzando la teoria del controllo stocastico, il controllo è presente in modo naturale nel termine di diffusione e ciò rende il problema matematicamente interessante e sostanzialmente diverso da quello affrontato nell'approccio deterministico. La formulazione matematica del problema analizzato richiede di scegliere i flussi pubblicitari da utilizzare in k canali di comunicazione indipendenti $a_t^1, \dots, a_t^k$ (queste variabili di controllo sono processi adattati, quadrato integrabili, a valori positivi) in modo da massimizzare il profitto atteso (differenza tra i costi pubblicitari sostenuti durante tutta la durata della campagna di lancio, che sono descritti dalle funzioni c^i, e il ricavo finale dipendente solo dal valore del processo goodwill A_t all'istante di lancio T):

$$E\left(-\int_0^T \sum_{i=1}^k c^i(a_t^i)\, dt + u(A_T)\right)$$

L'evoluzione della variabile di stato goodwill A_t (che rappresenta l'immagine del prodotto nel mercato) è descritta da un'equazione differenziale stocastica nella quale i flussi pubblicitari incrementano l'evoluzione media del processo ($\vartheta^i \geqslant 0$), ma introducono anche un'incertezza rappresentata dai k moti browniani indipendenti W_t^i. Inoltre il goodwill decade spontaneamente con coefficiente di decadimento pari a $\delta \geqslant 0$ ed è soggetto ad un ulteriore effetto stocastico, legato alla pubblicità passaparola, ed evidenziato tramite la presenza del moto browniano W_t^A (e dal coefficiente $\sigma_A \geqslant 0$)

$$\begin{cases} dA_t = \left(\sum\limits_{i=1}^{k} \vartheta^i a_t^i - \delta A_t \right) dt + \sigma_A A_t dW_t^A + \sum\limits_{i=1}^{k} \sigma_a^i a_t^i dW_t^i , \\ A_0 = A > 0 \, . \end{cases}$$

La generalità del modello non permette di ottenere soluzioni in forma chiusa e risulta quindi necessario specializzarlo, trattando dei casi particolarmente semplici, ma che mantengano un'interpretazione economica interessante.

2. – Introduzione di un nuovo prodotto nel mercato.

La prima specializzazione viene introdotta per descrivere il problema dell'introduzione nel mercato di un nuovo prodotto mediante l'utilizzo di un unico canale pubblicitario con un funzionale obiettivo crescente nell'utilità attesa, derivante dal valore del goodwill all'istante di lancio T, e decrescente nella spesa totale in comunicazione. Il problema viene risolto nel caso di costi ed utilità quadratici:

$$\max \; E\left(\int_0^T (-\kappa a_t^2/2)\, dt + \gamma A_T^2/2 \right),$$

$$s.a \quad \begin{cases} dA_t = (a_t - \delta A_t)\, dt + \sigma_A A_t dW_t^A + \sigma_a a_t dW_t^a , \\ A_0 = A > 0 \, . \end{cases}$$

In questa situazione la politica pubblicitaria risulta più aggressiva rispetto a quella che si ottiene nel caso puramente deterministico, poiché l'introduzione di elementi di rischio nel sistema viene vista come una possibile opportunità di profitto aggiuntiva.

3. – Marketing mix.

Un secondo caso riguarda il possibile utilizzo di due forme di comunicazione per l'organizzazione di un evento (concerto, workshop,...), caratterizzato da un numero limitato di posti disponibili, per il quale si vuole che la domanda sia il più vicino possibile alla soglia di congestione, ancora compatibilmente con la spesa totale in comunicazione:

$$\min\ E\left(\int_0^T (\kappa a_t^2 + \beta v_t^2)\,dt + \gamma(A_T - \overline{A})^2\right),$$

$$s.a \quad \begin{cases} dA_t = (\vartheta a_t + \varrho v_t)\,dt + \sigma a_A\,dW_t^A, \\ A_0 = A > 0\,. \end{cases}$$

Il problema viene risolto nel caso di funzione costo e funzione di penalità quadratiche: i risultati ottenuti permettono di confrontare l'efficacia dei due canali pubblicitari e di stabilire quanto il rischio connesso con il canale stocastico influenzi il suo utilizzo. Inoltre si osserva come, anche supponendo che il costo del canale stocastico diventi nullo, il problema continui ad essere ben posto (invece nelle stesse ipotesi l'analogo problema deterministico diventa singolare). Questo accade poiché, nel caso stocastico, il rischio connesso con l'azione del decisore può essere interpretato come un costo aggiuntivo.

BIBLIOGRAFIA

[1] AIT RAMI M., MOORE J.B. e ZHOU X.Y., *Indefinite Stochastic Linear Quadratic Control And Generalized Differential Riccati Equation*, SIAM Journal on Control and Optimization, **40** (2001), 1298-1311.

[2] BURATTO A. e VISCOLANI B., *New Product Introduction: Goodwill, Time and Advertising Cost*, Mathematical Methods of Operations Research, **55** (2002), 55-68.

[3] NERLOVE M. e ARROW J.K., *Optimal Advertising Policy Under Dynamic Conditions*, Economica, **29** (1962), 129-142.

[4] YONG J. e ZHOU X.Y., *Stochastic Controls, Hamiltonian Systems and HJB Equation*, Springer, New York (1999).

Università degli Studi di Padova, Dipartimento di Matematica Pura e Applicata
e-mail: grosset@math.unipd.it
Dottorato in Matematica Computazionale
(sede amministrativa: Università di Padova) - Ciclo XIV
Direttore di ricerca: Prof. Bruno Viscolani, Università degli Studi di Padova