Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Margherita Guida

Algoritmi di Computer Algebra per curve proiettive

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **7-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2004), n.3, p. 527–529.

Unione Mastematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2004_8_7A_3_527_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Mastematica Italiana, 2004.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VII-A, Dicembre 2004, 527-529

Algoritmi di Computer Algebra per curve proiettive.

MARGHERITA GUIDA

Tra i problemi che sono oggetto di studio della Computer Algebra assume rilevanza il calcolo della funzione di Hilbert e del minimo numero possibile di generatori di una varietà proiettiva.

In questa tesi si considera il problema per curve non-speciali di $\mathbb{P}^r$.

Il primo approccio computazionale a tale questione, è stato presentato per curve razionali in [1], dove si descrive un algoritmo polinomiale che riduce il calcolo della funzione di Hilbert e dei generatori minimali di una curva razionale C a quello della funzione di Hilbert e dei generatori minimali di un insieme di punti di C.

Questo algoritmo è stato implementato nel software POINTS («http://cds.unina.it/~orecchia/gruppo/EPoints.html»), che risulta un utile strumento per lo studio della generazione naturale di curve non-speciali.

Per «generazione naturale» di una curva si intende che le due seguenti proprietà sono soddisfatte: la proprietà di «rango massimo» e la proprietà di «generazione minimale».

DEFINIZIONE 1. – *Sia V una sottovarietà chiusa (possibilmente riducibile) di* $\mathbb{P}^r_K$ *e* $\varrho_V(n)$ *l'applicazione naturale*:

$$\varrho_V(n): H^0(\mathbb{P}^r_K, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r_K}(n)) \rightarrow H^0(V, \mathcal{O}_V(n)) \tag{1}$$

Diciamo che V ha rango massimo se, per ogni intero $n > 0$, $\varrho_V(n)$ *ha rango massimo come applicazione tra spazi vettoriali, cioè, è iniettiva o suriettiva.*

È importante osservare che la proprietà del rango massimo è aperta nello Schema di Hilbert [4], nel senso che se vale per una curva C, allora vale per la curva generale C nella stessa componente irriducibile.

DEFINIZIONE 2. – *Una curva non-speciale C di* $\mathbb{P}^r_K$ *è generata minimalmente se l'applicazione*

$$\sigma(t): H^0(I_C(t)) \otimes H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r_K}(1)) \rightarrow H^0(I_C(t+1))$$

ha rango massimo per ogni $t \geq 0$. *In tal caso, se C ha rango massimo un insieme minimale di generatori omogenei di I(C) ha cardinalità*:

$$\dim_K(I(C)_\alpha) + \dim_K(I(C)_{\alpha+1}) - min\{(r+1)\dim_K(I(C)_\alpha), \dim_K(I(C)_{\alpha+1})\}$$

e C si dice generata naturalmente.

Esistono molti risultati sul rango massimo, ma pochi sulla generazione naturale di curve non-speciali.

In questa tesi si presentano dei risultati sulla generazione naturale di particolari curve non-speciali, che sono unioni nodali di rette: Bamboo e Bamboo chiusi.

Partendo da un lavoro di Ballico-Orecchia [2], prima introduciamo la definizione di curve *dismantled* e poi focalizziamo la nostra attenzione su quelle dette alberi e Bamboo.

DEFINIZIONE 3. – *Sia* $T \subset \mathbb{P}^r$ $(r \geq 3)$ *una curva ridotta e connessa di grado* $deg(T)$ *e genere* g. *Diciamo* T *un albero di grado* d (*o di* d *rette*) *se* $deg(T)=d$, $g = 0$, T *ha solo nodi come singolarità ed ogni componente irriducibile di* T *è una retta.*

Tra gli alberi, che risultano essere delle curve *dismantled* di genere zero e quindi curve non-speciali, distinguiamo i Bamboo.

DEFINIZIONE 4. – *Un Bamboo aperto (o Bamboo)* $Y \subset \mathbb{P}^r$ $(r \geq 3)$ *di grado* d, *è un albero* $Y \subset \mathbb{P}^r$ *di grado* d *tale che esiste un ordinamento delle rette* $A_1, \ldots, A_d$ *di* Y *tale che* $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ *se e solo se* $|i-j| \leq 1$. A_1 (*risp.* A_d) *è detta la retta iniziale (risp. finale) del Bamboo* Y.

Uno dei risultati della tesi è che un Bamboo di grado d, per $d \leq 100$ e $3 \leq r \leq 10$ è sempre generato naturalmente tranne che nei seguenti casi: 5 rette in $\mathbb{P}^3$ e $\mathbb{P}^4$ (Teorema 3.2.2, Teorema 3.2.5 e Teorema 3.2.7).

Per provare ciò abbiamo costruito e implementato in C++ un algoritmo (Algorithm 5), che dati d ed r calcola un Bamboo di grado d di $\mathbb{P}^r$ e verifica usando il software POINTS se é generato naturalmente.

Ovviamente tale tecnica dimostrativa non risulta sufficiente per i casi eccezionali, che sono stati provati con considerazioni teoriche.

I risultati ottenuti ci suggeriscono di congetturare che un Bamboo generale di grado d di $\mathbb{P}^r$ è generato naturalmente se e solo se la coppia (d, r) è diversa da (5,3), (5,4). È interessante studiare i Bamboo perchè abbiamo provato (Teorema 3.2.1) che la generazione naturale dei Bamboo determina quella di una curva generale liscia di genere zero in $\mathbb{P}^r$.

Pertanto i risultati ottenuti sulla generazione naturale dei Bamboo ci permettono di generalizzare quelli sulle curve lisce di genere zero di $\mathbb{P}^r$.

TEOREMA 1. – *Una curva* C *di* $\mathbb{P}^r$, *generale non-speciale liscia irriducibile di genere zero e grado* d, *è generata naturalmente per* $d \leq 100$ *e* $3 \leq r \leq 10$ *tranne che nei seguenti casi* $d = 5$, $r = 3$ *e* $d = 5$, $r = 4$.

Un risultato simile si ottiene per i Bamboo chiusi.

DEFINIZIONE 5. – *Si dice Bamboo chiuso* $Y \subset \mathbb{P}^r$ $(r \geq 3)$ *di grado d, una curva ridotta connessa nodale di grado d tale che ogni componente irriducibile è una retta ed esiste un ordinamento delle rette* $A_1, \ldots, A_d$ *di Y tale che* $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ *se e solo se* $|i-j| \leq 1$ *oppure* $|i-j| = d-1$.

Abbiamo dimostrato che un Bamboo chiuso di grado $d \leq 100$ è generato naturalmente in $\mathbb{P}^r$, per ogni $3 \leq r \leq 10$ (Teorema 3.3.1).

Anche in questo caso per provare il risultato abbiamo costruito e implementato in C++ un algoritmo (Algorithm 6) che dati d ed r calcola un Bamboo chiuso di grado d di $\mathbb{P}^r$ e verifica la generazione naturale usando il software POINTS. Da ciò segue la congettura che ogni Bamboo chiuso è generato naturalmente.

Inoltre, abbiamo dimostrato che la generazione naturale dei Bamboo chiusi determina quella di una curva ellittica generale irriducibile di $\mathbb{P}^r$ (Teorema 3.3.2).

Da qui l'interesse di studiare Bamboo chiusi, poichè sulla generazione naturale di curve ellittiche sono noti risultati solo per curve di grado $d \leq 30$ [3].

Pertanto, il risultato ottenuto ci permette di estendere quelli sulla generazione naturale di [3].

TEOREMA 2. – *Una curva C di* $\mathbb{P}^r$, *generale non-speciale liscia irriducibile di genere uno e grado d, è generata naturalmente per* $d \leq 100$ *e* $3 \leq r \leq 10$.

Nell'ultima parte della tesi si analizza brevemente il caso delle unioni disgiunte di Bamboo chiusi, e si trova un risultato analogo a quello provato in [3] sulla generazione naturale di unioni disgiunte di curve ellittiche di $\mathbb{P}^r$.

BIBLIOGRAFIA

[1] ALBANO G., CIOFFI F., ORECCHIA F., e RAMELLA I., *Minimally generating ideals of rational parametric curves in polynomial time*, J. Symbolic Comput., **30,2** (2000), 137-149.

[2] BALLICO, E., e ORECCHIA, F., *Reducible projective curves: postulation and hyperplane section*, Int. J. Pure Appl. Math., **1,3** (2002), 317-342.

[3] CHIANTINI, L., CIOFFI, F., e ORECCHIA, F., *Computing minimal generators of ideals of elliptic curves*, Applications of algebraic geometry to coding theory, physics and computation (Eilat, 2001), vol. 36 of *NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem.*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (2001), 23-35.

[4] HARTSHORNE, R., e HIRSCHOWITZ, A., *Smoothing algebraic space curves*, Algebraic geometry, Sitges (Barcelona), 1983, **1124** of *Lecture Notes in Math.* Springer, Berlin (1985), 98-131.

Dipartimento di Matematica e Applicazioni «R. Caccioppoli»
Università degli Studi di Napoli «Federico II»; e-mail: maguida@unina.it
Dottorato in Matematica Applicata ed Informatica
(sede amministrativa: Università di Napoli «Federico II») - Ciclo XIV
Direttore di ricerca: Prof. F. Orecchia, Università degli Studi di Napoli «Federico II»