Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Guglielmo Lulli

Algoritmi per problemi di programmazione stocastica a numeri interi

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **7-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2004), n.3, p. 535–538.

Unione Mastematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2004_8_7A_3_535_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Mastematica Italiana, 2004.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VII-A, Dicembre 2004, 535-538

Algoritmi per problemi di programmazione stocastica a numeri interi.

GUGLIELMO LULLI

Molte applicazioni relative a problemi di finanza, scheduling, instradamento, localizzazione e pianificazione della produzione, solo per citare alcuni esempi, sono formalizzate come problemi di ottimizzazione combinatoria. Nella realtà, al momento di prendere le decisioni, questi problemi si avvalgono di parametri indeterminati (e.g. domanda, tempi di esecuzione, etc.) ed il loro valore è rilevato nel tempo, quando alcune decisioni sono già poste in essere. L'impossibilità di prevedere il valore di tali parametri ha portato allo sviluppo di modelli di programmazione stocastica a numeri interi (SMIP) ovvero problemi di programmazione lineare a numeri interi in cui alcuni parametri del problema sono incerti. Il ricorso a tale classe di modelli è sempre più comune. In molte applicazioni (vedi Birge [1]) è stata dimostrata la superiorità delle decisioni indicate da modelli stocastici rispetto a quelle indicate dai corrispondenti modelli deterministici, inoltre lo sviluppo di nuovi algoritmi, la scoperta di proprietà teoriche e la disponibilità di potenti risorse di calcolo hanno reso possibile la soluzione di tali problemi di ottimizzazione.

In conformità con molti lavori presenti in letteratura, assumiamo che il vettore delle variabili casuali ξ (che descrivono i parametri incerti del problema) ha un insieme di supporto finito, ovvero che $\Xi = (\xi^1, \dots, \xi^r)$ con probabilità $p^1, \dots, p^r$. Questa ipotesi consente di rappresentare l'incertezza per mezzo di scenari $s \in \mathcal{S} = \{1, \dots, r\}$. Uno scenario è la realizzazione del vettore delle variabili casuali corrispondente ad un atomo elementare $\xi \in \Xi$. La relazione tra scenari è rappresentata per mezzo di un albero degli scenari, che cattura l'evoluzione di tutte le informazioni nel tempo (vedi Rockafellar e Wets [5]). I problemi di programmazione stocastica hanno l'obiettivo di individuare delle decisioni che devono essere implementate prima di conoscere il valore assunto dalla variabile casuale ottimizzando il valore atteso della funzione obiettivo. Queste decisioni sono indicate in letteratura come decisioni «here-and-now». Come in altre aree dell'ottimizzazione i requisiti di interezza sulle variabili decisionali hanno rilevanti implicazioni sulle proprietà strutturali del problema e di conseguenza sulla progettazione di algoritmi.

Ad ogni scenario $s \in \mathcal{S}$ (insieme degli scenari) è associato un vettore delle decisioni $x(\xi^s) = (x_1(\xi^s), \dots, x_T(\xi^s))$. Definendo $\underline{x}_t(\xi^s) = (x_1(\xi^s), \dots, x_t(\xi^s))$ come il vettore di tutte le decisioni prese dallo stadio 1 allo stadio t, e $\underline{\xi}_t^s = (\xi_1^s, \dots, \xi_t^s)$ come il vettore dei valori assunti dalla variabile casuale nello stesso intervallo, un prototipo di problema di programmazione stocastica multistadio può essere rappresentato come un problema di programmazione lineare a numeri interi (problema di programmazione matematica deterministico equivalente) del seguente tipo:

$$\begin{array}{llr}
min & \sum_{s \in \mathcal{S}} p^s \left[\sum_{t=1}^{T} c_t(\xi_t^s)\, x_t(\xi^s) \right] & \\
s.t. & W_1 x_1(\xi^s) \leq h_1(\xi_1^s) & \forall s \in \mathcal{S}. \\
& T_{t+1}(\underline{\xi}_{t+1}^s)\, \underline{x}_t(\xi^s) + W_{t+1} x_{t+1}(\xi^s) \leq h_t(\underline{\xi}_{t+1}^s) & \forall s \in \mathcal{S},\ \forall t \in \mathcal{T}. \\
& x_t(\xi^s) = \left[\sum_{u \in \mathcal{B}_t^s} p^u x_t(\xi^u) \right] / \sum_{u \in \mathcal{B}_t^s} p^u & \forall s \in \mathcal{S},\ \forall t \in \mathcal{T}. \\
& x_t(\xi^s) \in \mathbf{X}_t & \forall s \in \mathcal{S},\ \forall t \in \mathcal{T}.
\end{array} \tag{1}$$

dove $\mathcal{B}_t^s$ è l'insieme di scenari indistinguibili dallo scenario s allo stadio t, cioè l'insieme di tutti gli scenari u per cui $\xi_\tau^u = \xi_\tau^s$ per tutti $\tau = 1, \dots, t$. L'insieme $\mathbf{X}_t$ definisce l'insieme di restrizioni che richiedono ad alcune o tutte le variabili decisionali di essere intere. Supponiamo che $T_t(\underline{\xi}_t)$, W_t, $c_t(\xi_t)$, $h_t(\underline{\xi}_t)$ siano matrici e vettori razionali di dimensioni appropriate per tutte le realizzazioni di ξ e per tutti gli stadi del problema. Se la matrice di ricorsione W_t non dipende dal vettore delle variabili casuali, cioè è determinata per ogni stadio t, come nella formulazione riportata, allora il problema di programmazione stocastica è detto con *ricorsione fissa.* Se inoltre, il problema è ben posto a prescindere dalle decisioni prese nel primo stadio ed dai valori assunti dalla variabile casuale allora il problema si dice con *ricorsione fissa completa.* La presenza dei vincoli (1), detti di «non anticipazione» in quanto assicurano che le decisioni dipendono soltanto dall'informazione disponibile senza anticipare il futuro (i valori che assumerà il vettore delle variabili casuali), è ciò che contraddistingue i problemi di programmazione stocastica dal loro corrispondente problema deterministico. È importante notare, che rilassando i suddetti vincoli, possiamo risolvere ogni problema (deterministico) relativo a ciascun scenario indipendentemente dagli altri.

In questa tesi, studiamo problemi SMIP generici, in cui possono esserci un numero qualsiasi di variabili intere in qualsiasi o in tutti gli stadi di decisione e senza restrizioni sul numero e sul tipo dei parametri incerti del problema. Il contributo di questa tesi è triplice. Proponiamo tecniche sia esatte che euristiche per risolvere questa classe generale di problemi. Forniamo una trattazione unificata che consente di formulare problemi multistadio di tipo ricorsivo che problemi con vincoli probabilistici ed infine in questa tesi vengono considerati per la prima volta problemi stocastici di dimensione dei lotti in cui l'incertezza è presente sia sulla domanda che sulla struttura dei costi.

1. – Algoritmi di risoluzione.

Per risolvere i problemi stocastici all'ottimo abbiamo progettato un algoritmo che utilizza la metodologia branch-and-price, combinazione del metodo di decomposizione di Dantzig-Wolfe (anche noto come metodo per generazione di colonne) e del metodo di branch-and-bound. L'applicazione della metodologia branch-and-price a problemi SMIP è un approccio nuovo in quest'area di ricerca. Diverse motivazioni hanno spinto all'uso di tale metodologia, tra le altre, consente di decomporre il problema in una collezione di sottoproblemi deterministici, uno per ciascun scenario, coordinati da un problema cosiddetto «master». Nel problema master, oltre ai canonici vincoli di convessità (la soluzione è una combinazione convessa delle colonne) abbiamo i vincoli di non anticipazione e le condizioni di interezza sulle variabili. I sottoproblemi sono indipendenti l'uno dall'altro ed ereditano ogni particolare struttura associata al problema deterministico. Inoltre, questo tipo di approccio consente di trattare problemi con vincoli probabilistici del tipo

$$\sum_{s \in S} p_s \cdot \mu_s \geqslant q .$$

allo stesso modo di problemi con ricorsione completa. Dove q rappresenta il livello di servizio o il grado di affidabilità richiesta della soluzione e μ_s è una variabile binaria, che assume valore 1 se lo scenario s è incluso nella soluzione e 0 altrimenti. Nel risolvere problemi con vincoli probabilistici, questi sono considerati nel problema master. I risultati computazionali ottenuti dimostrano la qualità della metodologia proposta per risolvere problemi SMIP con particolare struttura.

Per risolvere esempi di problemi di grandi dimensioni, in termini di numero di scenari considerati, abbiamo proposto una procedura euristica che risolve problemi SMIP con ricorsione completa. Questo algoritmo implementa una procedura di approssimazione del problema basata sulla considerazione di un sottoinsieme degli scenari. Tale euristica è stata chiamata «metodo di aggiornamento degli scenari». Il sottoinsieme degli scenari che approssima il problema è aggiornato ad ogni iterazione aggiungendo quegli scenari che determinano una variazione significativa della funzione obiettivo. Questa procedura ha trovato ispirazione dal metodo di contaminazione proposto da Dupačová [2] per problemi di programmazione stocastica lineari. A differenza dei lavori sul metodo di contaminazione, abbiamo applicato la procedura a problemi a numeri interi, progettato ed implementato l'algoritmo e fornito dei risultati computazionali.

2. – Il problema di dimensionamento dei lotti.

Le procedure proposte, sia esatte che euristiche, sono state applicate al problema di dimensionamento dei lotti. Il problema di dimensionamento dei lotti ricopre un ruolo importante nell'ambito della pianificazione della produzione ed in quanto tale, è stato ampiamente studiato in letteratura. In questa tesi, abbiamo affrontato la versione stocastica del problema, in cui sia la domanda che i costi di produzione, di magazzino ed i costi fissi sono parametri incerti del problema. Inoltre, nella versione studiata la produzione è un multiplo del lotto minimo. Il problema è stato formulato utilizzando sia le variabili di Manne [4] che quelle di Krarup-Bilde [3] utilizzate per formulare il problema di dimensionamento dei lotti nel caso deterministico. Contrariamente a quanto avviene nel caso deterministico in cui le variabili di Krarup-Bilde descrivono il guscio convesso delle soluzioni, in ambiente stocastico le due formulazioni risultano equivalenti. Inoltre aspetti più strettamente gestionali sono stati studiati analizzando il trade-off esistente tra costi di produzione e/o magazzino e la possibilità di non evasione della domanda. In particolare, per apprezzare maggiormente i metodi proposti che consentono di risolvere problemi sia con ricorsione completa che con vincoli probabilistici abbiamo effettuato un'analisi sul trade-off esistente tra costo e livello di servizio o affidabilità della soluzione.

BIBLIOGRAFIA

[1] BIRGE J.R., *Stochastic Programming Computation and Applications*, INFORMS Journal of Computing, **9** (1997), 111-133.
[2] DUPAČOVÁ J., *Postoptimality for Multistage stochastic linear programs*, *Annals of Operations Research*, **56** (1995), 65-78.
[3] KRARUP J. e BILDE O., *Plant location, set covering and economic lot size: An o(mn) algorithm for structured problems*, Research Report, IMSOR, The Technical University of Denmark, (1975).
[4] MANNE A.S., *Programming of Lot Sizes*, Management Science, **4** (1958), 115-135.
[5] ROCKAFELLAR R.T. e WETS R.J.B., *Scenarios and policy aggregation in optimization under uncertainty*, Mathematics of Operations Research, **16** (1991), 119-147.

Dipartimento di Statistica, Probabilità e Statistiche Applicate,
Università di Roma «La Sapienza»; e-mail: guglielmo.lulli@uniroma1.it
Dottorato in Ricerca Operativa
(sede amministritiva: Università di Roma «La Sapienza») - Ciclo XV
Direttore di ricerca: Prof. Gianni Di Pillo, Università di Roma «La Sapienza»