
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

FRANCA MANTESE

Teoria Tilting e Cotilting per algebre di Artin e anelli associativi

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 7-A—La
Matematica nella Società e nella Cultura (2004), n.3, p. 543–546.*

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2004_8_7A_3_543_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2004_8_7A_3_543_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Teoria Tilting e Cotilting per algebre di Artin e anelli associativi.

FRANCESCA MANTESE

Nell'ambito della teoria degli anelli ha grande rilevanza lo studio delle categorie di moduli loro associati. Queste infatti sono esattamente le rappresentazioni dell'anello come anello degli endomorfismi di un gruppo abeliano. Anelli non isomorfi possono avere le medesime rappresentazioni; due anelli con le stesse rappresentazioni si dicono Morita equivalenti e le loro categorie di moduli si dicono equivalenti. Anelli Morita equivalenti, come ad esempio ogni anello R e l'anello $M_n(R)$ delle matrici quadrate di ordine n a coefficienti in R , hanno in comune tutte le proprietà che si possono esprimere in termini di moduli, come la noetherianità o l'artinianità. Altre proprietà cruciali, come ad esempio la commutatività, non sono invarianti per equivalenze di Morita.

La teoria dei moduli tilting nasce nell'ambito dello studio di equivalenze tra categorie di moduli. Formalizzata per la prima volta in un celebre lavoro di Brenner e Butler [1] per moduli finitamente generati su algebre di Artin, è stata successivamente generalizzata a moduli su anelli associativi arbitrari da vari autori [2].

Uno degli aspetti principali della teoria tilting consiste nel fornire una profonda generalizzazione delle equivalenze di Morita. Seguendo la definizione introdotta da Brenner e Butler, un modulo finitamente generato T_A su un'algebra di Artin A è un modulo *tilting* se la sua dimensione proiettiva è al più uno, se non ha estensioni con se stesso e se esiste una sequenza esatta $0 \rightarrow A \rightarrow T' \rightarrow T'' \rightarrow 0$, con T' e T'' addendi diretti di una somma diretta di finite copie di T . Ogni modulo tilting T_A dà luogo a una teoria della torsione $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ in $\text{mod } A$ e a una teoria della torsione $(\mathcal{S}, \mathcal{E})$ in $\text{mod } \Gamma$, dove Γ è l'anello degli endomorfismi di T_A . Queste due teorie della torsione sono coinvolte in una coppia di equivalenze $\mathcal{T} \leftrightarrow \mathcal{E}$ e $\mathcal{F} \leftrightarrow \mathcal{S}$ indotte dai funtori $\text{Hom}_A(T, -)$, $T \otimes_\Gamma -$, $\text{Ext}_A^1(T, -)$, e $\text{Tor}_\Gamma^1(T, -)$. Questo cruciale risultato è noto come Teorema Tilting o Teorema di Brenner e Butler; dagli anni ottanta in poi, ha svolto un ruolo centrale in vari settori della teoria della rappresentazione delle algebre di Artin. Se il modulo T_A è proiettivo, si ottiene una classica equivalenza di Morita. Nel caso più generale, invece, le due algebre A e Γ non risultano Morita equivalenti, bensì correlate tra loro in modo più debole e complesso. In particolare A e Γ spartiscono tra loro alcuni invarianti ma differiscono in modo essenziale per certi altri. Ad esempio, i gruppi di Grothendieck delle due algebre hanno lo stesso rango e Γ ha dimensione globale finita se e solo se questo è il caso per A . Può accadere invece che una delle due algebre abbia tipo di rappresentazione finito e l'altra no.

La teoria dei moduli tilting e delle equivalenze da essi indotte è suscettibile di

una naturale dualizzazione, nota in letteratura come teoria dei moduli *cotilting* [3]. Nel caso di un'algebra di Artin l'esistenza di una dualità canonica di Morita tra i moduli finitamente generati implica che la teoria dei moduli *cotilting* finitamente generati sia esattamente duale a quella dei moduli *tilting* finitamente generati. Perciò essa non fornisce, in questo contesto, alcun nuovo contenuto. Profondamente diverso è il caso in cui i moduli considerati non siano finitamente generati o gli anelli in gioco non siano artiniani con dualità di Morita. In questo contesto più generale i bimoduli *cotilting* costituiscono un'ampia generalizzazione dei bimoduli di Morita; inoltre la teoria da essi generata è tanto più complessa del caso *tilting* almeno quanto più complessa è la teoria delle dualità di Morita rispetto a quella delle equivalenze di Morita.

La tesi è costituita da due parti: la prima parte (capitoli 1, 2, 3 e 4) si inserisce nel contesto della teoria *cotilting* per anelli associativi arbitrari, la seconda (capitoli 5, 6 e 7) in quello della teoria *tilting* per algebre di Artin.

Nel primo capitolo si affronta subito una tematica centrale delle dualità *cotilting*: l'esistenza di una aggiunzione tra i funtori *Ext* contravarianti. Si individuano condizioni minimali – in termini di *Ext*-ortogonalità di una classe associata ai moduli riflessivi – che garantiscono l'esistenza di una trasformazione naturale tra i moduli ed i corrispondenti *Ext*-biduali. Questo nuovo approccio consente la formulazione di un teorema di dualità di tipo *cotilting* estremamente generale, e chiarifica molti dei risultati presenti in letteratura, nei quali sono trattate distinte aggiunzioni costruite ad hoc su opportune classi di moduli. Vi è una intrinseca dicotomia in teoria della torsione: il caso ereditario e quello non ereditario. Un modulo *tilting* non proiettivo genera sempre una teoria della torsione non ereditaria; al contrario vi sono alcune importanti classi di moduli *cotilting* non iniettivi che cogenereano teorie della torsione ereditarie. Il problema della caratterizzazione dei *cotilting* ereditari e dello studio delle loro dualità viene per la prima volta affrontato nel secondo capitolo di questa tesi. Si dimostra una stretta analogia tra questo caso e quello di una dualità di Morita. In particolare si ottengono buone proprietà di chiusura per le sottocategorie coinvolte dalla duplice dualità, e si prova che esse sono generanti. Altra peculiarità viene ad essere la rappresentabilità del funtore *Ext* tramite un funtore *Hom* contravariante associato ad un modulo canonico. Si dimostra inoltre che un modulo *cotilting* su un'algebra di Artin risulta ereditario se e solo se esso è ereditario sull'algebra dei suoi endomorfismi. Un problema basilare ancora aperto è quello della caratterizzazione delle sottocategorie abeliane piene massimali che sono oggetto della doppia dualità *cotilting*. Nel primo capitolo si è dimostrato che la migliore approssimazione alla soluzione di questo problema orbita attorno alla conoscenza dei moduli che sono *Hom*-riflessivi. Pertanto nel terzo capitolo si affronta lo studio della *Hom*-riflessività, attraverso strumenti di tipo algebrico-topologico che introducono una nuova nozione di tipo compattezza lineare ed una proprietà di densità. Come applicazione, si ottiene una completa caratterizzazione dei moduli *Hom*-riflessivi associati ad un *cotilting* ereditario in termini di compattezza lineare relativa. Il quarto capitolo

analizza in astratto il problema della determinazione di «buone» dualità tra categorie di moduli. L'aggettivo di bontà riguarda l'ampiezza e le proprietà di chiusura delle sottocategorie in dualità. Si evince che un ragionevole carattere di bontà si riflette proprio in proprietà algebriche di tipo cotilting sul bimodulo canonico associato. In particolare per un'algebra di Artin si ottiene esattamente la nozione di bimodulo cotilting. I risultati contenuti in questo capitolo motivano l'ampiezza della letteratura esistente in teoria della dualità cotilting.

La seconda parte della tesi si inserisce all'interno di una nuova e importante direzione nello studio dei moduli tilting finitamente generati su algebre di Artin: il legame con alcune classiche congetture di tipo omologico [4]. In particolare, nel quinto capitolo si studia il problema del completamento di un modulo tilting *almost complete*. Un modulo M si dice *almost complete tilting* se esiste un modulo indecomponibile X tale che $M \oplus X$ è un modulo tilting. In quanti modi è possibile completare un tale modulo ad un modulo tilting? La congettura che ciò possa essere fatto solo in un numero finito di modi è una conseguenza della *finitistic dimension conjecture* (l'estremo superiore della dimensione proiettiva dei moduli finitamente generati con dimensione proiettiva finita è finito), ed a sua volta implica la *generalized Nakayama conjecture* (in una corisoluzione iniettiva minimale dell'algebra, ogni iniettivo indecomponibile compare come addendo diretto). Si determina il numero di complementi dei moduli tilting almost complete per particolari classi di algebre di Artin, dimostrando che questo è funzione del rango del gruppo di Grothendieck dell'algebra. In particolare si fornisce una dimostrazione diretta della validità della «generalized Nakayama conjecture» nel caso di un'arbitraria algebra monomiale. Inoltre viene smentita una recente congettura di Happel riguardo il massimo numero di completamenti non isomorfi; si fornisce una nuova migliore stima di tale numero, valida per tutte le algebre con due semplici e con tipo di rappresentazione finito.

Il sesto capitolo tratta una generalizzazione dei moduli tilting e cotilting al caso di dimensione proiettiva (rispettivamente iniettiva) infinita, introdotta da Wakamatsu [5]. Si fornisce un teorema di corrispondenza tra questi moduli e opportune sottocategorie di moduli finitamente generati: ciò estende un celebre risultato di Auslander-Reiten [6] noto per moduli tilting classici. Si introduce inoltre una nuova corrispondenza, che ad ogni modulo tilting/cotilting nel senso di Wakamatsu associa due teorie della cotorsione nella categoria dei moduli finitamente generati, le quali trovano una naturale estensione nell'intera categoria dei moduli. Il settimo capitolo riguarda i moduli Wakamatsu-tilting di dimensione proiettiva finita. È un problema aperto se questa classe di moduli coincida con quella dei moduli tilting classici. Una risposta affermativa implicherebbe la validità della *generalized Nakayama conjecture*. Si dimostra che ciò è vero se e solo se la categoria associata, tramite la corrispondenza studiata nel sesto capitolo, fornisce buone approssimazioni nella categoria dei moduli finitamente generati. Come applicazione si dimostra che questo è verificato per quelle algebre in cui vale la *finitistic dimension conjecture*.

BIBLIOGRAFIA

- [1] S. BRENNER e M. BUTLER, *Generalization of the Bernstein-Gelfand-Ponomarev reflection functors*, Lecture Notes in Math., **832** (1980), 103-169.
- [2] R. R. COLBY e K. R. FULLER, *Tilting and torsion theory counter equivalences*, Comm. Algebra, **17** (1995), 4833-4849.
- [3] R. COLPI, *Cotilting bimodules and their dualities*, LNPAM, **210** (2000), 81-93.
- [4] D. HAPPEL, *Selforthogonal modules*, Abelian groups and modules, Math. Appl., **343** (1995), 257-276.
- [5] T. WAKAMATSU, *On modules with trivial self-extensions*, J. Algebra, **114** (1988), 106-114.
- [6] M. AUSLANDER e I. REITEN, *Applications of contravariantly finite subcategories*, Adv. Math., **86** (1991), 111-152.

Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata, Università di Padova
e-mail: fmantese@math.unipd.it

Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Padova) - Ciclo XIV
Direttore di ricerca: Prof. R. Colpi, Università di Padova