Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Emanuela Sasso

Calcolo funzionale e operatori massimali per il semigruppo di Laguerre

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **7-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2004), n.3, p. 567–570.

Unione Mastematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2004_8_7A_3_567_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Mastematica Italiana, 2004.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VII-A, Dicembre 2004, 567-570

Calcolo funzionale e operatori massimali per il semigruppo di Laguerre.

Emanuela Sasso

Nella tesi abbiamo studiato il calcolo funzionale per l'operatore di Laguerre $\mathcal{L}_\alpha$ e la limitatezza di una classe di operatori massimali associati all'estensione olomorfa del semigruppo di Laguerre $\{\mathcal{M}_z^\alpha = e^{-z\mathcal{L}_\alpha}\colon \Re z \geq 0\}$.

L'operatore $\mathcal{L}_\alpha$ è il «Laplaciano» autoggiunto su $L^2(\mathbf{R}_+^d, \mu_\alpha)$, dove μ_α è la misura di probabilità di Laguerre di tipo α su $\mathbf{R}_+^d$. È ben noto che la risoluzione spettrale di $\mathcal{L}_\alpha$ è

$$\mathcal{L}_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} n\, \mathcal{P}_n^\alpha,$$

dove $\mathcal{P}_n^\alpha$ è la proiezione ortogonale sullo spazio generato dai polinomi di Laguerre di grado n e tipo α in d variabili. Supponiamo che $M : \mathbf{N} \to \mathbf{C}$ sia una successione limitata. Per la teoria spettrale, l'operatore $M(\mathcal{L}_\alpha)$ definito da

$$M(\mathcal{L}_\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} M(n)\, \mathcal{P}_n^\alpha,$$

è limitato su $L^2(\mathbf{R}_+^d, \mu_\alpha)$ con norma $|||M(\mathcal{L}_\alpha)|||_2 = \|M\|_\infty$. Diciamo che $M(\mathcal{L}_\alpha)$ è *l'operatore spettrale* associato al *moltiplicatore spettrale* M. Un problema classico è determinare condizioni necessarie e sufficienti su M, che implichino la limitatezza $L^p(\mathbf{R}_+^d, \mu_\alpha)$ dell'operatore $M(\mathcal{L}_\alpha)$. In questo contesto una linea di ricerca si concentra nell'individuare condizioni generali per amplie classi di operatori, quali gli operatori settoriali, i generatori di semigruppi di diffusione, gli operatori di Laplace-Beltrami sulle varietà. Un'altra linea di ricerca, alla quale appartiene questo lavoro, punta a trovare condizioni ottimali per operatori specifici. Si può menzionare in merito il lavoro di J. Garcìa-Cuerva et al. [2] sull'operatore di Ornstein-Uhlenbeck, che è stato il punto di partenza per la nostra ricerca. Esiste, infatti, una ben nota relazione tra l'operatore di Laguerre di tipo α semi-intero e quello di Ornstein-Uhlenbeck, cioè l'operatore autoaggiunto

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\Delta + x\cdot\nabla$$

su $L^2(\mathbf{R}^n, \gamma)$, dove γ è la misura Gaussiana. In [1], gli autori dimostrano e utilizzano questa relazione per ottenere nel caso di Laguerre, con particolari valori del parametro, risultati già noti per Ornstein-Uhlenbeck . Con questa tesi abbiamo esteso i risultati sul calcolo funzionale per ogni multi-indice α a componenti positive.

In particolare, abbiamo provato che, se $p \neq 2$, non esiste l'analogo dei teoremi classici di Hörmander sui moltiplicatori. Infatti per ogni $p \neq 2$, esiste un moltiplicatore spettrale M_p, tale che $M_p(\mathcal{L}_\alpha)$ non si estende a un operatore limitato su L^p, pur essendo la restrizione di una funzione analitica in un intorno del semiasse positivo e che soddisfa condizioni di tipo Hörmander sulle derivate. Noi abbiamo mostrato che se l'estensione olomorfa del moltiplicatore soddisfa condizioni di tipo Hörmander sulla frontiera di un fissato settore, la cui scelta dipendente dalla regione di olomorfia del semigruppo, allora $M_p(\mathcal{L}_\alpha)$ è limitato su L^p. Indichiamo con $H^\infty(\mathbf{S}_\theta)$ lo spazio delle funzioni olomorfe e limitate sul settore $\mathbf{S}_\theta = \{z : |\arg z| \leq \theta\}$ e con $H^\infty(\mathbf{S}_\theta, J)$ lo spazio delle funzioni olomorfe nel settore $\mathbf{S}_\theta$ e che soddisfano condizioni di tipo Hörmander sulla frontiera del settore, cioè tali che

$$\sup_{R>0} \int_R^{2R} |\lambda^j D^j M_\theta(\lambda)|^2 \frac{d\lambda}{\lambda} \leq C^2 \qquad \forall j \in \{0, 1, \ldots, J\}.$$

Il nostro risultato principale è riportato nel seguente teorema.

TEOREMA 1. – *Supponiamo $\alpha \geq 0$. Sia $\phi_p^* = \arcsin|2/p - 1|$, per $1 < p < \infty$, $p \neq 2$ e M una successione limitata. Assumiamo che esista una funzione olomorfa e limitata $\widetilde{M}$ tale che*

$$\widetilde{M}(k) = M(k), \qquad \forall k \in \mathbf{N} \backslash \{0\}.$$

Allora

(*i*) *se $\widetilde{M} \in H^\infty(\mathbf{S}_{\phi_p^*}, 4)$, allora $M(\mathcal{L}_\alpha)$ si estende ad un operatore limitato su $L^q(\mu_\alpha)$, $p \leq q \leq p'$;*

(*ii*) *se $\widetilde{M} \in H^\infty(\mathbf{S}_{\phi_p^*})$, allora $M(\mathcal{L}_\alpha)$ si estende ad un operatore limitato su $L^q(\mu_\alpha)$, $p < q < p'$;*

(*iii*) *se $\psi < \phi_p^*$, allora esiste una funzione M, che decresce esponenzialmente all'infinito, che appartiene a $H^\infty(\mathbf{S}_\psi, J)$, per ogni $J \geq 0$, tale che $M(\mathcal{L}_\alpha)$ non si estende ad un operatore limitato su $L^p(\mu_\alpha)$.*

La dimostrazione del teorema si riduce all'analisi della norma delle potenze immaginarie dell'operatore di Laguerre, collegandole al semigruppo di Laguerre (v. [4]). Uno degli strumenti utilizzati per la dimostrazione è stata una variazione della teoria classica di Calderón-Zygmund sugli integrali singolari applicata agli spazi di misura polinomiale.

Inoltre, è stato necessario dimostrare l'ipercontrattività del semigruppo di Laguerre, riportata nel seguente risultato.

TEOREMA 2. – *Sia $\alpha \geq 0$. Valgono i seguenti risultati*

(*i*) *per ogni p in $(1, 2]$, l'operatore $\mathcal{M}_t^\alpha$ è limitato da $L^p(\mu_\alpha)$ in $L^2(\mu_\alpha)$ se e solo se $t \geq |\log(p-1)|$;*

(ii) per ogni p in $[1, \infty)$ l'operatore $\mathcal{M}_z^\alpha$ è limitato in $L^p(\mu_\alpha)$ se e solo se $z \in \mathbf{E}_p$, con

$$\mathbf{E}_p = \left\{ x + iy \in \mathbf{C} : \left| \sin \frac{y}{2} \right| \leqslant \tan \phi_p \sinh \frac{x}{2} \right\}.$$

Si può notare che la regione di olomorfia per il semigruppo di Laguerre coincide con quella del semigruppo di Ornstein-Uhlenbeck a meno di una costante di dilatazione. Infatti, la dimostrazione del teorema si basa sulla relazione fra due semigruppi per i valori semi-interi del parametro α.

Per completare l'analisi del calcolo funzionale associato all'operatore di Laguerre, abbiamo studiato i moltiplicatori tipo trasformata di Laplace. Diciamo che M è una funzione *tipo trasformata di Laplace* se

$$M(k) = k \int_0^\infty \phi(t)\, e^{-kt}\, dt, \qquad k > 0,$$

dove ϕ è una funzione olomorfa e limitata sul semiasse positivo. Dalla teoria generale di Littlewood-Paley per i semigruppi segue che $M(\mathcal{L}_\alpha)$ è limitata su tutti gli spazi $L^p(\mu_\alpha)$, con $1 < p < \infty$. Noi abbiamo ottenuto anche la stima debole $(1, 1)$.

Infine abbiamo ottenuto che l'olomorfia nel settore è risultata una condizione necessaria per i moltiplicatori, la cui norma è invariante rispetto alle dilatazioni.

Nella seconda parte della tesi abbiamo studiato su alcune classi di operatori massimali associati al semigruppo di Laguerre olomorfo. Per enunciare più precisamente il risultato ottenuto, occorre premettere alcune notazioni. Come abbiamo già notato, il semigruppo di Laguerre $\mathcal{M}_t^\alpha$ si può estendere per i valori complessi del parametro t e l'operatore risultante $\mathcal{M}_z^\alpha$ è ben definito e limitato su $L^2(\mu_\alpha)$, per ogni z con $\Re z \geqslant 0$ e $\alpha \geqslant 0$. Inoltre, per il Teorema 2, è ben definita la famiglia di operatori massimali

$$\mathcal{M}_{\alpha, p} f(x) = \sup_{z \in \mathbf{E}_p} \left| \mathcal{M}_z^\alpha f(x) \right|.$$

Lo scopo della nostra ricerca è stato quello di studiare la limitatezza $L^q(\mu_\alpha)$ di questi operatori. Siccome $\mathbf{E}_p = \mathbf{E}_{p'}$, quando p e p' sono coniugati, è sufficiente ridursi a $1 \leqslant p \leqslant 2$. I risultati si riferiscono, però, solo al caso uni-dimensionale. Abbiamo ottenuto che

TEOREMA 3. – *(i) L'operatore $\mathcal{M}_{\alpha, 1}$ è di tipo debole 1 e di tipo forte q, per ogni q in $(1, \infty]$.*

(ii) Se $1 < p < 2$, allora $\mathcal{M}_{\alpha, p}$ è di tipo forte q, con $p < q < p'$. Mentre è di tipo debole p, se $p < \dfrac{2\alpha + 2}{\alpha + 3/2}$, ma non è di tipo debole p, se $p > \dfrac{2\alpha + 2}{\alpha + 3/2}$.

(iii) Se $\alpha \notin \dfrac{2\mathbf{N} - 1}{2}$, l'operatore $\mathcal{M}_{\alpha, 2}$ non è di tipo debole 2.

Per migliorare i risultati precedenti bisogna considerare l'operatore massimale associato alla regione $\mathbf{E}_p$ privata di un intorno del punto critico appartenente alla frontiera di $\mathbf{E}_p$ con parte immaginaria $i\pi$.

Anche in questo caso il punto di partenza sono stati i risultati ottenuti per la classe corrispondente di operatori massimali associati al semigruppo di Laguerre (v. [3]), anche se non è stato possibile utilizzare metodi di interpolazione complessa.

BIBLIOGRAFIA

[1] C. Gutièrrez, A. Incognito, J. Torrea, *Riesz Transforms*, g-functions and multipliers for Laguerre semigroup, *Houston J. Math.*, **27** (2001), 579-592.
[2] J. Garcìa-Cuerva, G. Mauceri, S. Meda, P. Sjögren, J. Torrea, *Functional calculus for Ornstein-Uhlenbeck Operator*, J. Funct. Anal., **183** (2001), 413-450.
[3] J. Garcìa-Cuerva, G. Mauceri, S. Meda, P. Sjögren, J. Torrea, *Maximal operators for the holomorphic Ornstein-Uhlenbeck semigroup*, preprint.
[4] S. Meda, *A general multiplier theorem*, Proc. Amer. Math. Soc., **110** (1990), 639-647.

Dipartimento di Matematica, Università di Genova; e-mail: sasso@dima.unige.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Genova) - Ciclo XIV
Direttore di ricerca: Prof. Giancarlo Mauceri, Università di Genova