Vincenzo Sciacca

Approccio bi-Hamiltoniano alle equazioni KP discrete

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **7-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2004), n.3, p. 571–574.

Unione Mastematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2004_8_7A_3_571_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Mastematica Italiana, 2004.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VII-A, Dicembre 2004, 571-574

Approccio bi-Hamiltoniano alle equazioni *KP* discrete.

VINCENZO SCIACCA

1. – Introduzione.

L'interesse principale di questa tesi è rivolto allo studio di un particolare sistema di equazioni sul reticolo, conosciute come le equazioni *KP* discrete. Queste equazioni costituiscono una gerarchia di infiniti campi ed infiniti tempi e sono costruite sulla base della teoria *KP* sviluppata nel caso continuo, dalla scuola di Kyoto, nell'ambito della teoria delle cosidette equazioni solitoniche. L'importanza della teoria *KP*, consiste nel contenere in un'unica gerarchia di campi commutanti, le proprietà di equazioni Hamiltoniane integrabili infinito dimensionale, ovvero le equazioni di Gelfand-Dichey [2]. Nell'usuale formalismo di Sato, questa teoria è presentata sia in termini della rappresentazione di Lax nell'algebra degli operatori pseudo-differenziali, sia in termini dell'identità biliniare di Hirota attraverso la τ-function. Daltraparte, esiste un ulteriore approccio alla teoria *KP* nel caso continuo, basato sui principi della meccanica Hamiltoniana dei sistemi integrabili, che utilizza concetti come: parentesi di Poisson, gruppi di Lie, azioni su varietà di Poisson. Questo approccio è basato sullo studio delle proprietà geometriche delle varietà bi-Hamiltoniane, sviluppato da Gelfand e Zakharevich; e per tale ragione è conosciuto come l'approccio bi-Hamiltoniano alla teoria *KP* [1]. La teoria *KP* discreta, d'altro canto, non è un problema di discretizazzione delle equazioni *KP*, ma è ancora un problema nell'ambito della teoria dei sistemi integrabili della meccanica classica. Chiaramente, lo studio della *KP* discreta è basato sulla rappresentazione di Lax discreta sull'algebra degli operatori di shift [3]. Quello che viene trattato in questa tesi è un nuovo approccio basato sulla teoria *GZ* della geometria bi-Hamiltoniana di una semplice riduzione della *KP* discreta, che è il sistema di Toda periodico. Le analogie con il caso continuo studiato [1] sono molto evidenti, ma i risultati ottenuti sono al tempo stesso inaspettati. Come nel caso continuo, infatti, l'equazione *KP* discreta è individuata come una legge di conservazione dell'equazione di Toda, usando la teoria della mappa momento. La sorpresa in quest'analisi è la presenza di due mappe momento e quindi due leggi di conservazione, ottenendo sia la *KP* che la sua modificata.

Nella prossima sezione analizzeremo la teoria *GZ* e i concetti fondamentali della geometria bi-Hamiltoniana associata all'equazioni di Toda, determinando le mappe momento e quindi le equazioni *KP*.

Nell'ultima sezione, invece, mostreremo come la teoria della funzione τ di Hirota possa essere ottenuta a partire dallo studio delle proprietà geometriche della varietà bi-Hamiltoniana associata al sistema di Toda, introducendo così un concetto nuovo nella teoria dei sistemi integrabili discreti: l'equazioni *KP* discrete duali. Esse sono espresse, ancora una volta, come leggi di conservazione e permettono di costruire la funzione τ di Hirota come un potenziale Kahleriano associato ad una opportuna metrica di Kahler. Infine, mostreremo il legame tra l'approccio alla teoria KP discreta con la teoria bi-Hamiltoniana e l'approccio classico con gli operatori di Lax discreti.

Chiaramente, questo lavoro non vuole essere una esposizione dettagliata delle idee sopra delineate, e per maggiori dettagli rinviamo il lettore interessato ai lavori [4], [5].

2. – Le gerarchie KP e mKP discrete.

Il punto di partenza è la teoria della mappa momento per il reticolo di Toda in R^{2m}, che nel formalismo di Flaschka si esprimo nelle seguenti equazioni:

$$\left\{\begin{aligned} \dot{a}_n &= a_n\left(\frac{\partial H}{\partial b_n}(b_n+\lambda)-\frac{\partial H}{\partial b_{n+1}}(b_{n+1}+\lambda)+\frac{\partial H}{\partial a_{n-1}}a_{n-1}-\frac{\partial H}{\partial a_{n+1}}a_{n+1}\right)\\ \dot{b}_n &= \left(\frac{\partial H}{\partial a_{n-1}}a_{n-1}-\frac{\partial H}{\partial a_n}a_n\right)(b_n+\lambda)+\frac{\partial H}{\partial b_{n+1}}a_n-\frac{\partial H}{\partial b_{n-1}}a_{n-1}\end{aligned}\right. \tag{1}$$

Le funzioni di Casimir associate a (1), possono essere espresse come il prodotto di N densità Hamiltoniane $h(n)=h(n,\,a,\,b;\,\lambda)$ nella forma $H=h(1)\cdot h(2)\cdot\ldots\cdot h(N)$; dove le funzioni $h(n,\,a,\,b;\,\lambda)$ sono soluzione del seguente sistema di Riccati:

$$h(n)\cdot h(n+1)=(b_{n+1}+\lambda)\cdot h(n)+a_n. \tag{2}$$

L'equazioni di Riccati definisce la mappa momento associata al reticolo di Toda, secondo la teoria GZ velle varietà bi-Hamiltoniane.

L'evoluzione temporale della mappa momento, lungo le orbite della gerarchia-GZ associata al fascio di Poisson (1), è espressa secondo il seguente analogo discreto

$$\frac{\partial h(n)}{\partial t_i}=h(n)(H^{(i)}(n+1)-H^{(i)}(n)) \tag{3}$$

delle legge di conservazione locale viste nella teoria KdV. Le due sostanziali differenze, consistono nella presenza di una derivata logaritmica per la densità Hamiltoniana; segno di un passaggio da una trattazione algebrica ad una gruppale, e la naturale sostituzione dell'operatore di divergenza con la differenza finita delle correnti $H^{(i)}(n)$.

Un'analisi dettagliata del sistema di Riccati, mostra l'esistenza di due soluzioni distinte $h(n)=\lambda+\mathcal{O}(1)$ e $k(n)=\mathcal{O}(\lambda^{-1})$. Esistono, quindi, due diveri tipi di correnti. Per ognuna di esse è possibile definire una opportuna formula delle correnti, introducendo (sempre a partire dal sistema di Riccati) una versione discreta dei monomi di Faá di Bruno:

$$h^{(i+1)}(n)=h^{(i)}(n+1)\,h(n). \tag{4}$$

Tali monomi costituiscono una base nello spazio delle serie di Laurent troncate dall'alto, associate al punto $h(n)$. L'introduzione della base di Faá di Bruno permette la decomposizione dello spazio delle serie di Laurent in due sottospazi complementari e la formula delle correnti ottenuta è analoga al caso continuo: $H^{(i)}(n) = \pi_+(\lambda^i)$. In tal modo (e ripetendo gli stessi ragionamenti per la densità $k(n)$), si è ottenuto una formulazione indipendente dal reticolo di Toda da cui si era partiti, ottenendo le seguenti equazioni nello spazio delle serie di Laurent troncate dall'alto:

$$\frac{\partial h(n)}{\partial t_i} = h(n)(\Delta - 1)\,\pi_+(\lambda^i), \tag{5}$$

$$\frac{\partial k(n)}{\partial t_i} = k(n)(\Delta - 1)\,\pi'_+(\lambda^i). \tag{6}$$

La prima è la gerarchia *KP* discreta, mentre la seconda è la gerarchia modificata; entrambe ottenute da uno studio sistematico delle equazioni di Toda.

3. – Equazioni *KP* discrete duali e la funzione τ di Hirota.

Mostriamo adesso come la teoria della funzione τ di Hirota possa essere inquadrata nel contesto bi-Hamiltoniano. Come si è visto nella precedente sezione, la teoria della *KP* discreta può essere interpretata come la teoria di Cartan per un riferimento mobile, costituito dai monomi di Faá di Bruno associati alle densità Hamiltoniane nello spazio delle serie di Laurent. La prossima idea consiste nell'associare una base duale, rispetto ad una opportuna forma duale

$$\langle h^{(i)}(n), h_{(j)}(n)\rangle = \operatorname{res}_\lambda h^{(i)}(n)\, h_{(j)}(n) = \delta^{\,i+1}_{-j}. \tag{7}$$

In questo modo, dalla teoria *KP* rimane associata una teoria *KP* duale, che è lo studio dell'evoluzione della base duale. Tale equazioni possono ancora essere formulate come leggi di conservazione locale

$$\frac{\partial h_{(1)}(n)}{\partial t_i} = h_{(1)}(n)(H^*_{(i)}(n+1) - H^*_{(i)}(n)); \tag{8}$$

mediante l'introduzione delle correnti duali $H^*_{(i)}(n)$, le quali soddisfano le seguenti proprietà.

Prima di tutto, esse sono delle serie di Laurent, essendo $H^*_{(i)}(n) = i\lambda^{i-1} + \sum_{l \geq 1} \frac{H^*_{il}(n)}{\lambda^{l+1}}$. Inoltre, esse verificano l'equazione

$$\frac{\partial H^*_{(i)}(n)}{\partial t_j} = \frac{\partial H^*_{(j)}(n)}{\partial t_i}, \tag{9}$$

che caratterizza la commutatività dei flussi della gerarchia *KP*. Infine, soddisfano la seguente sorprendente proprietà di simmetria

$$H^*_{ij}(n) = H^*_{ji}(n). \tag{10}$$

Le ultime due, garantiscono l'esistenza di una funzione $\tau(n; t_1, t_2, \ldots)$, tale che

$$H^*_{ij}(n) = \frac{\partial^2}{\partial t_i \, \partial t_j} \log\tau(n; t_1, t_2, \ldots). \tag{11}$$

Questa funzione, opportunamente riscalata è la funzione τ_n di Hirota.

Il collegamento con la teoria *KP* discreta, mediante gli operatori di Lax discreti, è determinato dal cambiamento di base nello spazio delle serie di Laurent. Infatti, fino adesso si è utilizzato una rappresentazione spaziale con la base dei monomi di Faá di Bruno mobile e la base standard λ^j fissa; adesso si utilizza una rappresentazione solidale, con la base dei Faá di Bruno fissa e la base standard delle potenze di λ diventa mobile. Introducendo la mappa lineare

$$\phi_n(h^{(i)}(n)) = \Delta^i, \tag{12}$$

tra lo spazio delle serie di Laurent e lo spazio degli operatori di shift ($\Delta q(k) = q(k+1)$); le equazioni (5) sono equivalenti alle seguenti equazioni

$$\frac{\partial L}{\partial t_i} = [L, (L^i)_+], \tag{13}$$

dove $L = \phi_n(\lambda) = \Delta + q_1(k)\Delta^{-1} + q_2(k)\Delta^{-2} + \ldots$. Le equazioni (13) sono le equazioni *KP* discrete nel formalismo di Lax.

Ringraziamenti: Vorrei esprimere i miei ringraziamenti al Prof. F. Magri e al Prof. A. M. Greco, per avermi introdotto alla teoria dei sistemi integrabili e per il loro appoggio morale e scientifico. Un particolare ringraziamento, anche, al Dott. P. Casati, al Prof. G. Falqui, al Prof. M. Pedroni, al Prof. G. Zubelli, al Prof. M. Sammartino, al Dott. L. Seta e alla Dott.essa M. C. Lombardo; per le stimolanti discussioni, il loro incoraggiamento e la loro amicizia.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. Falqui, F. Magri, M. Pedroni, *BiHamiltonian geometry, Darboux covering and linearization of KP hierarchy*, Commun. Math. Phys., **197** (1998), 303-324.

[2] L. A. Dickey, *Soliton equations and Hamiltonian systems*, World Scientific Singapore (1991).

[3] B. Kupershmidt, *Discrete Lax equations and differential-difference calculus*, Asterisque, Societe Mathematique de France (1985).

[4] V. Sciacca, *The Differential-Difference KP Hierarchy and the Momentum Mapping of the Toda System*, Journal of Nonlinear Mathematical Physics, **10** (2003), 209-222.

[5] V. Sciacca, *Differential-Difference Dual KP Equations and Hirota τ function*, Preprint del Dipartimento di Matematica ed Appl. di Palermo, **198** (2003).

Dipartimento di Matematica ed Applicazioni, Università di Palermo
e-mail: sciacca@math.unipa.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Palermo) - Ciclo XIV
Direttore di ricerca: Prof. A. M. Greco, Università di Palermo