Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Sarah Sciamannini

Risultati di approssimazione per operatori integrali lineari e nonlineari negli spazi BV_ϕ

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **7-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2004), n.3, p. 575–578.

Unione Mastematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2004_8_7A_3_575_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Mastematica Italiana, 2004.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VII-A, Dicembre 2004, 575-578

Risultati di approssimazione per operatori integrali lineari e nonlineari negli spazi BV_φ.

SARAH SCIAMANNINI

Il concetto di φ-variazione è stato introdotto da L.C. Young nel 1937 [4], è stato successivamente studiato e sviluppato da J. Musielak e W. Orlicz a partire dal 1959 [2] ed è tuttora molto utilizzato in diversi filoni dell'Analisi Matematica.

Lo spazio BV_φ delle funzioni a φ-variazione limitata si è rivelato, in questa tesi, un ambiente interessante per affrontare e risolvere alcuni problemi di approssimazione.

Si sono infatti ottenuti risultati sulla convergenza e sull'ordine di approssimazione per famiglie di operatori integrali. Dapprima sono state trattate famiglie di operatori integrali lineari a nucleo omogeneo e per queste si è fornito un processo unificante per lo studio di alcune classiche famiglie di operatori lineari note in teoria dell'approssimazione. Successivamente abbiamo considerato il caso piú generale di operatori integrali non lineari, sia di tipo convolutivo (Mellin), che di tipo non convolutivo con nucleo omogeneo (Volterra-Hammerstein).

1. – Notazioni e definizioni.

Sia $\varphi : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ una funzione convessa tale che: $\varphi(0) = 0$, $\varphi(u) > 0$ per $u > 0$ e $\dfrac{\varphi(u)}{u} \to 0$, per $u \to 0^+$. La suddetta funzione φ è detta *φ-funzione*.

Definiamo, per $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, la *$\varphi$-variazione* di f come

$$V_\varphi[f, \mathbb{R}_0^+] = \sup_D \sum_{i=1}^n \varphi(|f(t_i) - f(t_{i-1})|)$$

dove $D = \{t_0 < t_1 < \ldots < t_n\} \subset \mathbb{R}_0^+$ è una partizione di $\mathbb{R}_0^+$.

Denotiamo con

$$BV_\varphi(\mathbb{R}_0^+) = \{f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : \exists k > 0 : V_\varphi[kf, \mathbb{R}_0^+] < +\infty\}$$

lo spazio delle funzioni a *φ-variazione limitata* e con $AC_\varphi^{loc}(\mathbb{R}_0^+)$ il sottospazio di $BV_\varphi(\mathbb{R}_0^+)$ delle funzioni f *localmente φ-assolutamente continue*, cioè tali che *esiste $\lambda > 0$ per cui per ogni $J \subset \mathbb{R}_0^+$ intervallo limitato e per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ con la proprietà che per ogni $(\alpha_i, \beta_i) \subset J$, $i = 1, \ldots n$ con $(\alpha_i, \beta_i) \cap (\alpha_j, \beta_j) = \emptyset$, $i \neq j$ e tale che* $\sum_{i=1}^n \varphi(\beta_i - \alpha_i) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^n \varphi(\lambda |f(\beta_i) - f(\alpha_i)|) < \varepsilon$.

Introduciamo ora il concetto di convergenza in φ-variazione che è stato utilizzato per ottenere risultati di approssimazione.

Una successione $\{f_w\}_{w>0} \subset BV_\varphi(\mathbb{R}_0^+)$ è *convergente in φ-variazione* a $f \in BV_\varphi(\mathbb{R}_0^+)$ se esiste un $k>0$ tale che $V_\varphi[k(f_w - f)] \to 0$, per $w \to +\infty$.

2. – Operatori integrali lineari con ipotesi di omogeneità.

Siano $\eta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ e $K : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}_0^+$ funzioni misurabili secondo Lebesgue. Diremo che K è *η-omogenea* se vale la seguente uguaglianza:

$$\eta(t)\,K(sv, tv) = \eta(tv)\,K(s, t) \quad \text{per ogni } s, t, v \in \mathbb{R}^+.$$

Denotiamo con $\mathcal{K}_\eta$ la classe delle funzioni K η-omogenee e sia $\mathbb{K} = \{K_w\}_{w>0} \subset \mathcal{K}_\eta$ una famiglia di nuclei. Definiamo l'operatore integrale lineare:

$$(T_w f)(s) = \int_{\mathbb{R}^+} K_w(s, t)\,f(t)\,dt$$

per ogni $f \in L^0(\mathbb{R}^+)$ (spazio delle funzioni misurabili secondo Lebesgue) per cui $(T_w f)(s)$ è ben definito per ogni $s \in \mathbb{R}^+$ e per ogni $w > 0$.

Per $K_w \in \mathcal{K}_\eta$ e $\delta \in]0, 1[$, poniamo

$$A_w := \int_{\mathbb{R}^+} z^{-1}(\eta(z))^{-1} K_w(1, z)\,dz, \qquad A_w^\delta := \int_{|z-1|>\delta} z^{-1}(\eta(z))^{-1} K_w(1, z)\,dz.$$

Diciamo che la famiglia $\mathbb{K} \subset \mathcal{K}_\eta$ è *singolare* se:

$(K_w.1)$ $\sup_{w>0} A_w = A < +\infty$ e $\lim_{w\to+\infty} A_w = 1$;

$(K_w.2)$ per ogni $\delta \in]0, 1[$, risulta $\lim_{w\to+\infty} A_w^\delta = 0$.

Sussiste il seguente:

Teorema *Sia $\mathbb{K} = \{K_w\}_{w>0} \subset \mathcal{K}_\eta$ una famiglia di nuclei singolare. Se $g(t) = t\eta(t)\,f(t) \in AC_\varphi^{loc}(\mathbb{R}_0^+)$, esiste $\lambda > 0$ tale che*:

$$\lim_{w\to\infty} V_\varphi[\lambda(T_w f - g)] = 0.$$

Osserviamo che questa teoria, elaborata in [3], estende alcuni risultati sulla convergenza in φ-variazione ottenuti da C. Bardaro-G. Vinti [1] nel 1991 per operatori di tipo momento, che sono un caso particolare degli operatori sopra definiti.

Per studiare l'ordine di approssimazione introduciamo la seguente classe:

$$\Gamma = \{\gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}_0^+ \mid \gamma(1) = 0,\ \gamma(s) \neq 0 \text{ per } s \neq 1,\ \gamma \text{ continua in } s = 1\}.$$

Fissata $\gamma \in \Gamma$ e posto, per $s > 0$, $\tau_s f(t) = f(st)$, $t \in \mathbb{R}_0^+$ (operatore omotetico), consideriamo le classi:

$$Lip_\gamma(V_\varphi) = \{f \in BV_\varphi(\mathbb{R}_0^+) : \exists \nu > 0 : V_\varphi[\nu(\tau_s f - f)] = \mathcal{O}(\gamma(s)), \text{ per } s \to 1\} \quad \text{e}$$

$$\mathcal{X} = \{\xi : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ \mid \xi(0) = 0,\ \xi(u) > 0 \text{ per } u > 0,\ \xi \text{ continua in } u = 0\}.$$

Sia $\xi \in \mathcal{X}$ fissata. Diremo che la famiglia $\mathbb{K} \subset \mathcal{K}_\eta$ è *ξ-singolare* se:

i) esistono $A, B > 0$, tali che $B \leq A_w \leq A$, per ogni $w > 0$;

ii) $\Omega_w = \mathcal{O}(\xi(w^{-1}))$ per $w \to +\infty$, dove $\Omega_w = |A_w - 1|$, per $w > 0$;

iii) per ogni $\delta \in]0, 1[$, $A_w^\delta = \mathcal{O}(\xi(w^{-1}))$, per $w \to +\infty$.

TEOREMA 2. – *Fissate* $\gamma \in \Gamma$ *e* $\xi \in \mathcal{X}$, *sia* $\mathbb{K} = \{K_w\}_{w>0} \subset \mathcal{K}_\eta$ *una famiglia di nuclei* ξ*-singolare. Supponiamo che esista un* $\delta > 0$ *tale che:*

$$\int_{|z-1|<\delta} z^{-1} K_w(1, z)(\eta(z))^{-1} \gamma(z)\, dz = \mathcal{O}(\xi(w^{-1})), \quad per\ w \to +\infty.$$

Se $g(t) = t\eta(t) f(t) \in Lip_\gamma(V_\varphi)$, *allora esiste un* $\lambda > 0$ *tale che*:

$$V_\varphi[\lambda(T_w f - g)] = \mathcal{O}(\xi(w^{-1})), \quad per\ w \to +\infty.$$

Come esempi di operatori integrali a cui è possibile applicare i precedenti risultati, si possono considerare gli operatori di convoluzione di tipo Mellin, che come casi particolari contengono gli operatori di tipo momento, e alcune classi di operatori di convoluzione di ordine frazionario [3].

3. – Estensione agli operatori nonlineari.

I problemi principali che si incontrano nel passaggio dal caso lineare al caso nonlineare consistono essenzialmente nella necessità di introdurre una opportuna definizione di singolarità.

3.1. *Operatori convolutivi nonlineari di tipo Mellin.*

Consideriamo operatori integrali della forma:

$$(\widetilde{T}_w f)(s) = \int_0^{+\infty} K_w(t, f(st))\, dt, \qquad s \in \mathbb{R}_0^+, \quad w > 0,$$

dove la famiglia di nuclei $\mathbb{K} = \{K_w\}_{w>0} \subset \mathcal{K}$, cioè $K_w \colon \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è della forma $K_w(t, u) = L_w(t) H_w(u)$, $t \in \mathbb{R}_0^+$, $u \in \mathbb{R}$, con $L_w \in L^1(\mathbb{R}_0^+)$, $L_w \geq 0$ e $H_w \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soddisfa la seguente condizione di tipo Lipschitz: $|H_w(u) - H_w(v)| \leq \psi(|u - v|)$, $u, v \in \mathbb{R}$, dove $\psi : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ è una φ-funzione. Se poniamo

$$A_w := \|L_w\|_1 = \int_0^{+\infty} L_w(t)\, dt, \qquad A_w^\delta := \int_{|t-1|>\delta} L_w(t)\, dt,$$

per $0 < \delta < 1$, diremo che $\mathbb{K}$ è *singolare* in $BV_\varphi(\mathbb{R}_0^+)$ se:

($\widetilde{K}_w.1$) esiste un $A > 0$ tale che $0 < A_w \leq A$, per ogni $w > 0$;

($\widetilde{K}_w.2$) per ogni $\delta \in]0, 1[$, risulta $\lim_{w \to +\infty} A_w^\delta = 0$;

($\widetilde{K}_w.3$) posto $G_w(u) = H_w(u) - u$, per ogni $u \in \mathbb{R}$, $w > 0$, esiste un $\lambda > 0$ tale che:

$$V_\varphi[\lambda G_w; J] \to 0, \quad \text{per } w \to +\infty,$$

per ogni $J \subset \mathbb{R}$ intervallo limitato.

Diremo che la terna di funzioni $\{\varphi, \gamma, \psi\}$ è «*properly directed*» se per ogni $\lambda > 0$, esiste $C_\lambda > 0$ tale che $\varphi(C_\lambda \psi(u)) \leq \gamma(\lambda u)$, per ogni $u \geq 0$.

Sussiste il seguente risultato di approssimazione:

TEOREMA 3. – *Sia* $f \in AC_{\varphi}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_0^+) \cap BV_{\gamma}(\mathbb{R}_0^+)$ *e* $\{\varphi, \gamma, \psi\}$ *sia «properly directed». Sia* $\mathbb{K} = \{K_w\}_{w>0} \subset \mathcal{K}$ *singolare in* $BV_{\varphi}(\mathbb{R}_0^+)$. *Allora esiste* $\mu > 0$ *tale che*:

$$\lim_{w \to +\infty} V_{\varphi}[\mu(\widetilde{T}_w f - f)] = 0.$$

3.2. *Operatori nonlineari di Volterra-Hammerstein.*

Consideriamo la seguente famiglia piú generale di operatori:

$$(VH_w f)(s) = \int_0^s K_w(s, t, f(t))\, dt, \quad s \in \mathbb{R}^+, \quad w > 0,$$

con nuclei $\mathbb{K} = \{K_w\}_{w>0} \subset \mathcal{K}'$, cioè $K_w : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è della forma $K_w(s, t, u) = L_w(s, t) H_w(u)$, $(s, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, $u \in \mathbb{R}$, e $L_w \geqslant 0$ è η-omogenea, con $L_w \in L^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$ e $H_w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soddisfa $H_w(0) = 0$ e la condizione di Lipschitz del caso Mellin. Posto $h(t) = t\eta(t)$, e assumendo ipotesi di singolarità analoghe al caso Mellin, vale il seguente risultato di approssimazione:

TEOREMA 4. – *Sia* $f \in BV_{\varphi+\gamma}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_0^+)$, $h \in BV_{\varphi}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_0^+)$ *con* $hf \in AC_{\varphi}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_0^+)$ *e* $\{\varphi, \gamma, \psi\}$ *sia «properly directed». Sia* $\mathbb{K} = \{K_w\}_{w>0} \subset \mathcal{K}'$ *singolare in* $BV_{\varphi}(\mathbb{R}_0^+)$.

Allora esiste $\mu > 0$ *tale che:*

$$\lim_{w \to +\infty} V_{\varphi}^b[\mu(VH_w f - hf)] = 0.$$

dove $V_{\varphi}^b[f] = V_{\varphi}[f, [0, b]]$, *e* $[0, b]$ *è un arbitrario intervallo di* $\mathbb{R}_0^+$.

BIBLIOGRAFIA

[1] C. BARDARO e G. VINTI, *On convergence of moment operators with respect to* φ*-variation*, Applicable Analysis, **41** (1991), 247-256.

[2] J. MUSIELAK e W.ORLICZ, *On generalized variations, I*, Studia Math., **18** (1959), 11-41.

[3] S. SCIAMANNINI e G. VINTI, *Convergence and rate of approximation in* BV_{φ} *for a class of integral operators*, Approximation Theory and its Applications, **17 (4)** (2001), 17-35.

[4] L. C. YOUNG, *Sur une généralization de la notion de variation de puissance* p^{ieme} *bornée au sens de M. Wiener et sur la convergence des séries de Fourier*, C. R. Acad. Sci. Paris, **204** (1937), 470-472.

Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Perugia
e-mail: ssciamannini@yahoo.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Firenze) - Ciclo XIV
Direttore di Ricerca: Prof. Gianluca Vinti, Università di Perugia