Bollettino
Unione Matematica Italiana

Giuseppe Valla

Numerical characters of graded algebras

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **7-B** (2004), n.2, p. 257–274.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2004_8_7B_2_257_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2004.

Bollettino U. M. I.
(8) **7**-B (2004), 257-274

Caratteri numerici delle algebre graduate.

GIUSEPPE VALLA (*)

Summary. – *This is the summary of the plenary talk I gave in Milan at the XVII Meeting of the Unione Matematica Italiana. We focus on some relevant numerical characters of the standard graded algebras and, in some case, we explain their geometric meaning.*

Sunto. – *Questo è il sunto della conferenza da me tenuta a Milano in occasione del XVII Congresso UMI. Si introducono alcuni importanti caratteri numerici delle algebre graduate, se ne studiano il comportamento e, in certi casi, la loro rilevanza geometrica.*

1. – La Funzione e il Polinomio di Hilbert.

Sia $R = k[x_1, \ldots, x_n]$ l'anello dei polinomi su un corpo k che per semplicità supponiamo infinito e di caratteristica 0. Diciamo che A è una **algebra graduata** (standard) se è del tipo $A = R/I$ dove I è un ideale omogeneo di R. Tali sono gli anelli delle coordinate delle varietà algebriche proiettive. È chiaro che A è un R-modulo ciclico graduato e finitamente generato.

Per ogni modulo M graduato e finitamente generato su R, le componenti omogenee M_t di M sono k- spazi vettoriali di dimensione finita.

DEFINIZIONE 1.1. – *Se M è un R-modulo graduato finitamente generato la funzione numerica $H_M \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita per ogni t da*

$$H_M(t) = \dim_k M_t$$

è la **Funzione di Hilbert** *di M.*

La serie di potenze

$$P_M(z) = \sum_{t \in \mathbb{N}} H_M(t)\, z^t$$

è detta la **Serie di Hilbert** di M.

(*) Conferenza tenuta a Milano l'11 settembre 2003 in occasione del XVII Congresso U.M.I.

La Funzione di Hilbert dell'anello delle coordinate di una varietà algebrica V era classicamente detta la **postulazione** di V.

Per esempio per ogni $t \geqslant 0$ si ha

$$H_R(t) = \binom{n+t-1}{n} \quad \text{e} \quad P_R(z) = \frac{1}{(1-z)^n}.$$

La proprietà più rilevante della serie di Hilbert è il fatto che la serie è additiva sulle successioni esatte corte di R-moduli graduati finitamente generati.

Un classico risultato di Hilbert ci assicura che la serie $P_M(z)$ è razionale e, di più, è del tipo

$$P_M(z) = \frac{f(z)}{(1-z)^n}$$

con $f(z) \in \mathbb{Z}[z]$.

È facile vedere che se $M \neq 0$, allora la molteplicità di 1 come radice di $f(z)$ è minore od eguale ad n e quindi si può trovare un unico polinomio

$$h(z) = h_0 + h_1 z + \ldots + h_s z^s \in \mathbb{Z}[z],$$

con le proprietà che $h(1) \neq 0$ e per qualche intero d, $0 \leqslant d \leqslant n$ risulti

$$P_M(z) = \frac{h(z)}{(1-Z)^d}.$$

L'intero d è la **dimensione di Krull** di M.

Per ogni intero $i \geqslant 0$ poniamo

$$e_i := \frac{h^{(i)}(1)}{i!}$$

e

$$\binom{X+i}{i} := \frac{(X+i)(X+i-1)\ldots(X+1)}{i!}.$$

Allora è facile vedere che il polinomio

$$p_M(X) := \sum_{i=0}^{d-1} (-1)^i e_i \binom{X+d-i-1}{d-i-1}$$

ha coefficienti razionali e grado $d-1$; inoltre per ogni $t >> 0$,

$$p_M(t) = H_M(t).$$

Il polinomio $p_M(X)$ si chiama **polinomio di Hilbert** di M e il suo coefficiente direttivo è

$$\frac{h(1)}{(d-1)!}.$$

Ciò implica che $e_0(M) := h(1)$ è un intero positivo che si denota usualmente con $e(M)$ e si chiama la **molteplicità** o il grado di M.

Nel caso in cui M è ciclico su R, ossia $M = R/I$ per qualche ideale omogeneo I non irrilevante, indichiamo con $V := V(I)$ la varietà algebrica proiettiva definita da I in $\mathbb{P}^{n-1}$. Allora se $P_{R/I}(z) = \frac{h(z)}{(1-z)^d}$, possiamo leggere nel polinomio di Hilbert di A, e quindi nella serie di Hilbert, alcuni caratteri numerici molto importanti per la varietà V.

L'intero $d-1$ è la **dimensione** di V, l'intero $e_0 = h(1)$ è il **grado** di V e infine l'intero

$$g := \sum_{j=1}^{s} h_j \binom{j-1}{d-1} = (-1)^{d-1}(p_A(0)-1)$$

è il **genere aritmetico** di V.

Se ad esempio consideriamo il caso di una ipersuperficie $V = \mathcal{Z}(F)$ di grado d in $\mathbb{P}^n$, si ha

$$P_{R/FR}(z) = \frac{(1-z^d)}{(1-z)^{n+1}} = \frac{1+z+\ldots+z^{d-1}}{(1-z)^n}$$

e quindi V ha dimensione $n-1$, grado d e genere aritmetico $\binom{d-1}{n}$.

2. – Il Teorema di Macaulay.

Presentiamo ora un Teorema fondamentale dovuto a Macaulay (vedi [23]), che descrive esattamente quali funzioni numeriche siano le Funzioni di Hilbert delle algebre graduate. Il teorema di Macaulay dice che per ogni t c'è un limite superiore per $H_A(t+1)$ in termini di $H_A(t)$, e il limite è sharp, nel senso che ogni funzione numerica che lo raggiunge può essere realizzata come la funzione di Hilbert di una algebra graduata R/L ove L è un opportuno ideale monomiale.

Sia d un intero positivo. Si vede facilmente che ogni intero a si può scrivere nella forma

$$a = \binom{k_d}{d} + \binom{k_{d-1}}{d-1} + \ldots + \binom{k_j}{j}$$

ove

$$k_d > k_{d-1} > \ldots > k_j \geqslant j \geqslant 1 \, .$$

Per esempio, se $a = 49$, $d = 4$, si ha

$$49 = \binom{7}{4} + \binom{5}{3} + \binom{3}{2} + \binom{1}{1}.$$

Dati gli interi a e d, poniamo

$$a^{\langle d \rangle} := \binom{k_d + 1}{d + 1} + \binom{k_{d-1} + 1}{d} + \ldots + \binom{k_j + 1}{j + 1}.$$

Quindi, per esempio,

$$49^{\langle 4 \rangle} = \binom{8}{5} + \binom{6}{4} + \binom{4}{3} + \binom{2}{2}.$$

La seguente versione del Teorema di Macaulay è dovuto a Stanley (vedi [27]).

TEOREMA 2.1 (Macaulay). – *Sia* $H : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *una funzione numerica. Esiste una algebra graduata* A *con Funzione di Hilbert* $H_A = H$ *se e solo se* $H(0) = 1$ *e* $H(t+1) \leqslant H(t)^{\langle t \rangle}$ *per ogni* $t \geqslant 1$.

Una funzione numerica che verifica le condizioni del teorema precedente si dice **ammissibile**.

Il seguente esempio dimostra l'efficacia del teorema di Macaulay. Verifichiamo che $1 + 3z + 4z^2 + 5z^3 + 7z^4$ non è la serie di Hilbert di una algebra graduata.

Si ha

$$5 = \binom{4}{3} + \binom{2}{2}, \qquad 5^{\langle 3 \rangle} = \binom{5}{4} + \binom{3}{3} = 6 \, .$$

Ne segue che

$$H(4) = 7 > H(3)^{\langle 3 \rangle}.$$

Nello stesso lavoro Macaulay ha introdotto un algoritmo per costruire, data una funzione numerica ammissibile H, una k-algebra graduata avente quella come Funzione di Hilbert.

Sia $n = H(1)$; fissiamo nell'insieme dei monomi di $R = k[X_1, \ldots, X_n]$ l'ordine **deg-lex.** Questo è l'ordine definito da

$$X_1^{a_1} X_2^{a_2} \ldots X_n^{a_n} > X_1^{b_1} X_2^{b_2} \ldots X_n^{b_n}$$

se e solo se o $\sum a_i > \sum b_i$ o $\sum a_i = \sum b_i$ e per qualche intero $j < n$ si ha

$$a_1 = b_1, \dots, a_j = b_j, a_{j+1} > b_{j+1}.$$

Macaulay ha provato che se per ogni $t \geqslant 0$ cancelliamo i più piccoli $H(t)$ monomi di grado t, i rimanenti monomi generano un ideale I tale che $H_{R/I}(t) = H(t)$ per ogni $t \geqslant 0$.

La parte difficile della dimostrazione è mostrare che, avendosi $H(t+1) \leqslant H(t)^{\langle t \rangle}$, se un monomio M è in I_t, ossia non è stato cancellato a livello t, allora MX_n non è cancellato a livello $t+1$ così che $MX_1, \dots, MX_n \in I$ come richiesto.

Per esempio l'ideale I in $R = k[X_1, X_2, X_3]$ tale che

$$P_{R/I}(z) = \frac{1 + z - 2z^4 + z^5}{(1-z)^2}$$

e costruito con questo algoritmo, è l'ideale

$$I = (X_1^2, X_1 X_2^3, X_1 X_2^2 X_3).$$

L'ideale costruito seguendo questo procedimento è un ideale **lex-segmento**, nel senso che una k-base della sua parte omogenea di grado t è un segmento iniziale di monomi nel dato ordine. Poiché è chiaramente unicamente determinato dalla data funzione numerica ammissibile, è detto **l'ideale lex-segment** associato a tale funzione numerica.

Notiamo che questo risultato formalizza l'intuizione che la parte di grado t di un ideale omogeneo I genera, in grado $t+1$, uno spazio vettoriale di dimensione non troppo piccola.

Il teorema di Macaulay vale per ogni algebra graduata. Non sorprende che ulteriori proprietà dell'algebra graduata pongano ulteriori restrizioni sulla Funzione di Hilbert.

Ad esempio è facile provare i seguenti risultati usando la semplice proprietà che la serie di Hilbert è **sensibile** alle successioni regolari.

Ricordiamo che se M è un R-modulo graduato, una successione $F_1, \dots, F_r$ di elementi omogenei di R è una **successione regolare** per M se $F_1, \dots, F_r$ hanno grado positivo e F_i è un non-zero divisore per $M/(F_1, \dots, F_{i-1})M$ per ogni $i = 1, \dots, r$.

TEOREMA 2.2. – *Sia J l'ideale generato dai polinomi omogenei $F_1, \dots, F_r$ di gradi $d_1, \dots, d_r$ in R. Se M è un R-modulo graduato si ha*

$$P_M(z) \leqslant \frac{P_{M/JM}(z)}{\prod_{i=1}^{r}(1 - z^{d_i})}$$

e vale l'uguale se e solo se $F_1, \dots, F_r$ sono una successione regolare per M.

In particolare, se $L \in R_1$ è regolare per M, si ha

$$P_{M/LM}(z) = (1-z)P_M(z).$$

Quindi la Funzione di Hilbert di M/LM è la **prima differenza** ΔH_M di H_M, ove si definisce

$$\Delta H_M(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t=0, \\ H_M(t) - H_M(t-1) & \text{altrimenti}. \end{cases}$$

Il seguente teorema è un facile corollario del teorema precedente e del lemma di scansamento graduato.

TEOREMA 2.3. – *Sia $h_0, \dots, h_s$ una sequenza di interi positivi. Esiste un intero d e una algebra graduata Cohen-Macaulay A di dimensione d tale che*

$$P_A(z) = \frac{h_0 + h_1 z + \dots + h_s z^s}{(1-z)^d}$$

se e solo se $(h_0, \dots, h_s)$ è ammissibile.

Una completa caratterizzazione delle Funzioni di Hilbert ammissibili per le algebre ridotte è possibile usando il teorema di sollevamento di Hartshorne.

TEOREMA 2.4. – *Sia $H : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una funzione numerica. Esiste una k-algebra A graduata ridotta con Funzione di Hilbert $H_A = H$ se e solo se o $H = \{1, 0, 0 \dots\}$ o ΔH è ammissibile.*

Per esempio la funzione numerica $H = \{1, 2, 1, 1, 1, \dots\}$ è ammissibile e quindi è la Funzione di Hilbert di una opportuna k-algebra graduata, ma non è la Funzione di Hilbert di una k-algebra ridotta perché la funzione differenza $\{1, 1, -1, 0, 0, \dots\}$ non è ammissibile.

Per le algebre integre Cohen-Macaulay o Gorenstein il problema è aperto e lontano da una soluzione.

Gli unici casi risolti sono quelli delle algebre di Cohen-Macaulay integre di codimensione due (vedi [17]) o Gorenstein di codimensione tre (vedi [27] e [11]), in virtù dei teoremi di struttura che valgono in questi casi.

3. – Le algebre generiche.

Il problema della determinazione della Funzione di Hilbert delle algebre graduate generiche è completamente aperto.

Il valore congetturato per tali funzioni è dovuto a Fröberg (vedi [14]).

Se $F_1, \ldots, F_t$ sono forme generiche di grado $d_1, \ldots, d_t$ in $R = k[X_1, \ldots, X_n]$, e $I = (F_1, \ldots, F_t)$, ci si aspetta

$$P_{R/I}(z) = \left| \frac{\prod(1-z^{d_i})}{(1-z)^n} \right|$$

ove per una serie di potenze $\sum a_i z^i$ con coefficienti interi, indichiamo con $|\sum a_i z^i|$ la serie che si ottiene troncando la serie data al primo coefficiente seguito da un coefficiente non positivo.

La congettura è verificata solo se $n = 2, 3$ (vedi [14] e [2]).

La congettura sarebbe provata se fossimo in grado di descrivere una base di Gröbner, rispetto all'ordinamento revlex, di un ideale di forme generiche. Quello che ci si aspetta è facile da congetturare, ma, al momento, impossibile da verificare.

Ricordiamo che se I è un ideale di R e τ un term order sui monomi di R, indichiamo con $in_\tau(I)$ l'ideale generato da $in(F)$ al variare di $F \in I$. Una **base di Gröbner** di I relativamente a τ è un insieme di elementi $F_1, \ldots, F_r$ in I tali che

$$in_\tau(I) = (in(F_1), \ldots, in(F_r)).$$

4. – Schemi zero-dimensionali.

Anche nel caso di schemi zero-dimensionali, molti problemi legati alla Funzione di Hilbert sono ancora aperti.

In questo paragrafo descriviamo come la conoscenza della Funzione di Hilbert di **punti grassi** possa essere usata per studiare il problema di Waring per polinomi omogenei.

Tale problema consiste nel **determinare per ogni $j \geq 2$ il minimo intero $G(j)$ tale che la forma generica di grado j in $\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_n]$ si possa scrivere come somma di $G(j)$ potenze di forme lineari.**

Questa tematica rientra nel problema della classificazione delle forme canoniche.

Osserviamo che il numero delle forme di grado j in $n+1$ variabili è $\binom{n+j}{j}$, mentre il numero di coefficienti in una somma di G potenze di forme lineari è $(n+1)G$. Quindi ci si aspetta:

$$G(j) = \min\left\{ t \,\middle|\, (n+1)\,t \geq \binom{n+j}{j} \right\}.$$

Ci sono eccezioni: la forma generica di grado 2 in 3 variabili è irriducibile e quindi non può essere la somma di due quadrati.

Un recente teorema di Alexander-Hirschovitz, (vedi [1]), sulla Funzione di

Hilbert di punti grassi ha come conseguenza la prova che $G(j)$ assume davvero il valore aspettato, con l'eccezione di quattro casi completamenti determinati.

Il teorema di Alexander-Hirschovitz dice che la Funzione di Hilbert di un insieme di punti doppi con supporto generico è massimale, cioé si comporta come se lo schema fosse ridotto.

Ricordiamo che se $\wp_1, \ldots, \wp_s$ sono gli ideali che definiscono i punti $P_1, \ldots, P_s$, si indica con $\mathcal{Z} = m_1 P_1 + \ldots + m_2 P_s$ lo schema zero-dimensionale definito dall'ideale

$$\wp_1^{m_1} \cap \wp_2^{m_2} \cap \ldots \cap \wp_s^{m_s}.$$

Tale schema si dice uno schema di punti **grassi** con molteplicità $m_1, \ldots, m_s$.

TEOREMA 4.1. – *Sia $\mathcal{Z} = 2P_1 + \ldots + 2P_s$ con $P_1, \ldots, P_s$ punti generici. Se A è l'anello delle coordinate di $\mathcal{Z}$, allora*

$$H_A(t) = \min\left\{ s(n+1), \binom{n+t}{n} \right\}$$

eccetto che nei casi seguenti:

$$s = 5, n = 2 \quad s = 9, n = 3 \quad s = 14, n = 4 \quad s = 7, n = 4 .$$

Il fatto cruciale è che $G(j)$ è il minimo degli interi s tali che esistono s punti generici $P_1, \ldots, P_s$ in $\mathbb{P}^n$ tali che

$$H_{R/I}(j) = \binom{n+j}{j} = H_R(j)$$

dove I è l'ideale che definisce lo schema di punti doppi $2P_1 + \ldots + 2P_s$.

Ad esempio la forma generica di grado 4 in 3 variabili non è la somma di 5 potenze (caso $n = 2, j = 4$): per 5 punti di $\mathbb{P}^2$ passa una conica e quindi c'è una quartica non nulla in I_4.

Come applicazione del Teorema precedente si ha

TEOREMA 4.2. – *Per ogni $j \geqslant 3$ si ha*

$$G(j) = \min\left\{ t \,\middle|\, (n+1)\, t \geqslant \binom{n+j}{j} \right\}$$

eccetto per i seguenti quattro casi:

$j = 4$ $n = 2$ *quando* $G = 6$ *invece che* $G = 5$,
$j = 3$ $n = 4$ *quando* $G = 8$ *invece che* $G = 7$,
$j = 4$ $n = 3$ *quando* $G = 10$ *invece che* $G = 9$,
$j = 4$ $n = 4$ *quando* $G = 15$ *invece che* $G = 14$.

Problema rilevante è quindi lo studio della funzione di Hilbert di punti grassi, anche per le interessanti applicazioni a problemi di tipo diverso tra cui il problema del **symplectic packing**, vedi Mc Duff-Polterovich in [24].

5. – Dimensione omologica, depth e numeri di Betti.

La Funzione di Hilbert non sempre è sensibile alle proprietà geometriche degli schemi considerati.

È facile vedere che 4 punti generici di $\mathbb{P}^2$ hanno la stessa Funzione di Hilbert di 4 punti speciali, ad esempio tre dei quali siano allineati.

Ma mentre nel primo caso l'ideale che definisce lo schema ha due soli generatori, nel secondo di generatori ce ne sono tre.

Ci vogliono quindi caratteri numerici più raffinati. In questo paragrafo ci occupiamo delle risoluzioni libere graduate minimali e dei caratteri numerici che questa costruzione suggerisce. L'idea ancora una volta è dovuta a Hilbert.

Per calcolare la postulazione degli anelli di invarianti, Hilbert aveva osservato che ogni modulo graduato M finitamente generato su $R = k[X_1, \ldots, X_n]$ da elementi omogenei $m_1, \ldots, m_r$ di gradi $d_1, \ldots, d_r$ rispettivamente, è quoziente di un modulo libero graduato e quindi si può presentare con una successione esatta

$$0 \to K \to L = \bigoplus_{i=1}^{r} R(-d_i) \xrightarrow{f} M \to 0$$

ove si pone $R(-d)_m = R_{m-d}$ e si indica con K il nucleo di f. Si ha

$$K = \{(F_1, \ldots F_r) \in R^r \mid \sum F_i m_i = 0\}$$

e si dice che K è il **modulo delle sizigie** di $m_1, \ldots, m_r$.

La Funzione di Hilbert del modulo libero graduato $L = \bigoplus_{i=1}^{r} R(-d_i)$ è facilmente calcolabile,

$$P_L(z) = \sum_{i=1}^{r} P_{R(-d_i)}(z) = \sum_{i=1}^{r} P_R(z)\, z^{d_i} = \frac{\sum_{i=1}^{r} z^{d_i}}{(1-z)^n}$$

e quindi il problema del calcolo di $P_M(z)$ si riduce al calcolo della Funzione di Hilbert di K.

Ma K è ancora finitamente generato su R e quindi si può iterare il procedimento ottenendo una **risoluzione libera graduata** di M, ossia un complesso esatto di R-moduli liberi graduati e omomorfismi omogenei

$$\ldots \to F_h \to F_{h-1} \to \ldots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0 .$$

Il celeberrimo **Teorema delle sizigie di Hilbert** ci assicura che al più dopo n passi il nucleo che si trova è libero e quindi il procedimento termina.

Se ad ogni passo scegliamo un sistema di generatori minimali per i successivi moduli delle sizigie, troviamo una risoluzione libera graduata **minimale** di M che possiamo scrivere

$$0 \to \bigoplus_{j \geqslant 0} R(-j)^{\beta_{h,j}} \to \bigoplus_{j \geqslant 0} R(-j)^{\beta_{h-1,j}} \to \ldots \to \bigoplus_{j \geqslant 0} R(-j)^{\beta_{0,j}} \to M \to 0$$

per opportuni interi non negativi $\beta_{i,j}$.

Quelli positivi tra gli interi $\beta_{i,j}$, sono detti i **numeri di Betti graduati** di M e non dipendono dalla risoluzione minimale scelta: infatti

$$\beta_{i,j} = \dim_k Tor_i^R(k, M)_j.$$

Gli interi j tali che $\beta_{i,j} \neq 0$, ossia quelli che compaiono effettivamente nella risoluzione con opportuna molteplicità positiva, sono detti gli **shifts** in posizione i della risoluzione.

Ad esempio la risoluzione

$$0 \to R(-3) \oplus R(-4) \to R(-2)^2 \oplus R(-3) \to R \to R/I \to 0$$

ha come numeri di Betti $\beta_{1,2} = 2$, $\beta_{1,3} = 1$ e $\beta_{2,3} = \beta_{2,4} = 1$ e come shifts i numeri

2 con molteplicità 2, 3 con molteplicità 1 in posizione 1,

3 e 4 con molteplicità 1 in posizione 2.

Le considerazioni precedenti mostrano che la lunghezza di ogni risoluzione libera graduata minimale di M non dipende dalla risoluzione. Pertanto ha senso la seguente definizione.

DEFINIZIONE 5.1. – *Diciamo dimensione omologica di un modulo graduato M finitamente generato su R la lunghezza di una (ogni) risoluzione libera graduata minimale di M. Tale intero sarà denotato con $hd_R(M)$.*

Un teorema fondamentale di **Auslander-Buchsbaum** (vedi [6]) prova che

$$hd(M) + depth(M) = n$$

ove $depth(M)$ indica la **profondità** di M, ossia il massimo numero di elementi di R che formano una successione regolare per M. Questo teorema precisa dunque di quanto la lunghezza di una risoluzione libera graduata minimale differisca da n.

DEFINIZIONE 5.2. – *Se M è un modulo graduato finitamente generato su R, diciamo che M è* **Cohen-Macaulay** *se $depth(M) = \dim(M)$, ossia se la dimensione omologica coincide con la codimensione.*

Nell'esempio dei 4 punti generici la risoluzione è

$$0 \to R(-4) \to R(-2)^2 \to R \to R/I \to 0$$

Nel caso non generico è

$$0 \to R(-3) \oplus R(-4) \to R(-2)^2 \oplus R(-3) \to R \to R/I \to 0 .$$

Gli anelli delle coordinate di questi due schemi sono entrambi Cohen-Macaulay.

Un esempio di varietà il cui anello di coordinate **non è Cohen-Macaulay** è dato da due rette sghembe in $\mathbb{P}^3$.

Ad esempio $A = k[X, Y, Z, T]/(X, Y) \cap (Z, T)$ ha dimensione 2 ma la sua risoluzione ha lunghezza 3 e quindi $depth(A) = 1$,

$$0 \to R(-4) \to R(-3)^4 \to R(-2)^4 \to R \to R/I \to 0 .$$

I numeri di Betti ovviamente determinano la Funzione di Hilbert, ma una stessa Funzione di Hilbert può corrispondere a moduli che hanno diversi numeri di Betti.

Un teorema recente di Bigatti e Hulett (vedi [4] e [19]) asserisce però che se L è il lex-segmento con una data Funzione di Hilbert H, i numeri di Betti di R/L sono maggiori o eguali ai corrispondenti numeri di Betti di ogni altra algebra graduata con Funzione di Hilbert H.

Ciò implica che la risoluzione di ogni algebra graduata A con Funzione di Hilbert assegnata H si ottiene **per cancellazione** dalla risoluzione dell'algebra R/L ove L è il lex-segmento individuato da H.

Il problema di determinare quali di queste risoluzioni sono poi ammissibili, è un problema difficile da risolvere (vedi [5], [10]).

Una questione centrale nel *programma di trovare una connessione tra la geometria di una varietà e la struttura della risoluzione del suo anello di coordinate* è il chiedersi quali siano i numeri di Betti nel caso di punti generici distinti dello spazio proiettivo.

Per i numeri di Betti di punti generici ci sono dei valori aspettati che sono determinati dal supporre che certe mappe siano di **rango massimo** (vedi [21]). Recentemente F. Schreyer ha però scoperto, computazionalmente, che per 11 punti di $\mathbb{P}^6$ tali valori non sono realizzati. D. Eisenbud e S. Popescu in [13] hanno poi spiegato questa patologia usando le tecniche combinatoriche delle trasformate di Gale. Notare che per $n + 4$ punti di $\mathbb{P}^n$ i numeri di Betti sono quelli aspettati (vedi [9]).

Recenti lavori di M. Green (vedi [15]) hanno mostrato come proprietà dei numeri di Betti di R/I riflettano profonde proprietà geometriche della varietà corrispondente.

Se ad esempio $\mathcal{C}$ è una curva liscia di genere g che non è iperellittica, si ha una immersione

$$\mathcal{C} \to \mathbb{P}^{g-1}.$$

Un classico teorema di Petri dice che se la curva non è trigonale, nè una quintica piana, l'ideale di $\mathcal{C}$ è generato da quadriche. Green ha congetturato che la risoluzione dell'anello delle coordinate di $\mathcal{C}$ dipende dalle serie lineari che $\mathcal{C}$ possiede.

Più precisamente la congettura della **curva canonica** dice che l'indice di Clifford $\mathit{Cliff}(\mathcal{C})$ di $\mathcal{C}$ è maggiore di p se e solo se la risoluzione è lineare nelle prime p posizioni, ossia se e solo se per ogni $i \leqslant p$ vale $\beta_{i,j} = 0$ per ogni $j \neq i+1$.

6. – La regolarità di Castelnuovo-Mumford.

Un altro importante carattere numerico che si può associare alle algebre graduate è la **regolarità di Castelnuovo-Mumford**.

Il germe dell'idea della regolarità è presente nei lavori di Castelnuovo, ed infatti era una delle cose che Zariski insegnava ai suoi allievi (tra cui Mumford). Mumford ha formalizzato per primo questo concetto nell'ambito della teoria dei fasci coerenti. Ma si può definire la regolarità in termini puramente algebrici.

Se M è un R-modulo graduato e finitamente generato diciamo che $r = \mathit{reg}(M)$ se r è il minimo intero tale che per ogni $i \geqslant 0$ e per ogni $j > r$ si ha

$$\mathit{Tor}_i^R(k, M)_{i+j} = 0 .$$

Si ha subito

$$\mathit{reg}(M) = \max_{i,j} \{d_{i,j} - i\}$$

ove $d_{i,j}$ sono gli shifts in posizione i nella risoluzione libera graduata minimale di M.

Diremo che M è m-regolare se $m \geqslant \mathit{reg}(M)$.

Notiamo che la definizione è concepita in modo che se M è m-regolare, allora M è generato da elementi di grado $\leqslant m$.

Si ha facilmente che M è m-regolare se e solo se

$$\mathit{Ext}_R^i(M, R)_t = 0$$

per ogni $i \geqslant 0$ e per ogni $t \leqslant -m-i-1$.

Per **dualità locale**, (vedi [6]), si ottiene

$$\mathit{reg}(M) = \max\{i+j \mid \mathcal{H}_{\mathfrak{M}}^i(M)_j \neq 0\} = \min\{m \mid \mathcal{H}_{\mathfrak{M}}^i(M)_t = 0 \;\; \forall i \text{ e } \forall t \geqslant m-i+1\},$$

ove $\mathcal{H}^i_{\mathfrak{M}}(M)$ indica l'i-mo modulo di **coomologia locale** di M rispetto all'ideale massimale irrilevante $\mathfrak{M} = (X_1, \dots, X_n)$ di R.

Un noto Teorema di Serre, (vedi [6]), ci assicura che

$$H_M(t) = p_M(t) \quad \forall\, t \geq reg(M) + 1\,.$$

Quindi $reg(M)$ ha un interesse geometrico intrinseco perchè può essere considerato come un **bound universale** per certi caratteri numerici delle algebre graduate quali

- **il grado massimo delle sizigie**
- **il grado massimo in cui sono non nulli i moduli di coomologia locale**
- **il punto in cui Funzione e Polinomio di Hilbert coincidono.**

Uno dei problemi più studiati riguarda la seguente congettura di **Eisenbud-Goto** (vedi [12]).

Se $\wp$ è un ideale primo non degenere di $R = k[X_1, \dots, X_n]$, di codimensione h allora

$$reg(R/\wp) \leq e(R/\wp) - h + 1\,.$$

La congettura è stata provata solo per le varietà di dimensione al più tre, (vedi [18] e [22]).

7. – Algebra locale.

Lo studio delle singolarità di una varietà affine ha la controparte algebrica nello studio degli **anelli locali**.

Tre algebre giocano un ruolo essenziale, non solo nel processo di scoppiamento di una varietà affine $Spec(A, m)$ lungo la sottovarietà definita da I, ma anche nello studio dei caratteri numerici dell'ideale I.

L'**Algebra di Rees** di A relativamente ad I

$$\mathcal{R} = \bigoplus_{n \geq 0} I^n t^n.$$

L'**anello graduato associato** ad I

$$gr_I(A) := \bigoplus_{n \geq 0} (I^n / I^{n+1}) = \mathcal{R}/I\mathcal{R}\,.$$

La **fibra speciale**

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{n \geq 0} (I^n / mI^n) = \mathcal{R}/m\mathcal{R}\,.$$

In questo ambito i problemi sono ancora più complicati. Non sappiamo caratterizzare le Funzioni di Hilbert di anelli locali Cohen-Macaulay di dimensione uno, che sono poi gli anelli delle singolarità delle curve affini.

La Funzione di Hilbert di un anello locale (A, m) è per definizione la Funzione di Hilbert dell'algebra graduata $gr_m(A)$ ma, nel passaggio da A a $gr_m(A)$, le buone proprietà si possono perdere.

Ad esempio l'anello $A = k[[t^4, t^5, t^{11}]]$ è un anello locale integro , e quindi Cohen-Macaulay, di dimensione uno, ma il suo graduato associato è l'algebra

$$gr_m(A) = k[X, Y, Z]/(XZ, YZ, Z^2, Y^4)$$

che non è Cohen-Macaulay. Questo segue dal fatto che

$$(X, Y, Z) = 0 : \overline{Z} \in Ass(gr_m(A))$$

ma anche dal fatto che la sua Serie di Hilbert è

$$P(z) = \frac{1 + 2z + z^3}{1 - z}.$$

Sulla scia dei lavori pionieristici di Northcott degli anni 50, le ricerche in questo ambito si sono rivolte ad approfondire la conoscenza della Funzione di Hilbert di un anello locale Cohen-Macaulay, anche in relazione con i suoi coefficienti di Hilbert e i caratteri numerici del corrispondente cono tangente.

Ma tante rimangono le questioni ancora da approfondire. Abbiamo esempi di anelli locali Cohen-Macaulay di dimensione uno la cui funzione di Hilbert non è monotona. Ma non sappiamo se ciò è possibile anche nel caso delle intersezioni complete.

8. – Aspetti computazionali.

Alcuni dei caratteri numerici introdotti si possono calcolare usando ideali **generati da monomi**.

Se τ è un term order sui monomi di R, ed I un ideale omogeneo di R, si può considerare l'ideal $in_\tau(I)$ generato dai monomi massimi di tutti gli elementi di I.

L'ideale $in_\tau(I)$ si può calcolare conoscendo una **Base di Gröbner** di I, la quale a sua volta si calcola mediante il celeberrimo **algoritmo di Buchberger** (vedi [7]).

Un teorema di facile dimostrazione prova che

$$H_{R/I} = H_{R/in_\tau(I)}.$$

È importante certamente ricordare alcune delle numerose conseguenze che la conoscenza di una base di Gröbner può comportare.

- Calcolo dei moduli delle sizigie e quindi di una risoluzione graduata minimale di R/I.

- Operazioni elementari quali intersezioni, colons , annullatori, nuclei e pullbacks.
- Depth di un modulo.
- Teoria della eliminazione.
- Localizzazione e saturazione.
- Sistemi di equazioni polinomiali.

La semplicità di queste idee fondamentali contrasta con la potenza delle applicazioni. Questo connubio di semplicità e potenza ha motivato in questi ultimi anni studi profondi di carattere teorico e computazionale che hanno dato un forte rilancio a tanti temi di Algebra Commutativa che qui non c'è spazio per ricordare.

La ricerca in Algebra Commutativa e Geometria Algebrica ha fortemente beneficiato della comparsa di sistemi specializzati di Computer Algebra, quali Macaulay, CoCoA (vedi [8]), Singular. Basati su implementazioni molto raffinate dell'algoritmo di Buchberger, tali sistemi hanno dato la possibilità di studiare esempi, calcolare caratteri numerici, esplorare oggetti che prima erano assolutamente inaccessibili. La cosa più fascinosa di questi sistemi è che la loro potenza emerge mescolando profonde idee della Matematica e della Computer Science.

9. – Gin(I) e Combinatorica.

Se consideriamo un ideale omogeneo I e operiamo su I con una trasformazione lineare generica g, possiamo considerare l'ideale iniziale di $g(I)$ rispetto all'ordinamento degrevlex.

Si ottiene un ideale monomiale $Gin(I)$ che si chiama **Generic initial ideal** e che ha queste proprietà:

- $H_{R/I} = H_{R/Gin(I)}$
- $depth(R/I) = depth(R/Gin(I))$
- $reg(R/I) = reg(R/Gin(I))$, (vedi [3]).

In questo ultimo caso, se la caratteristica è 0, la regolarità coincide con il massimo dei gradi dei generatori di Gin(I).

Inoltre l'ideale $Gin(I)$ è **Borel fisso** nel senso che se B è il sottogruppo di $Gl(n, k)$ costituito dalle matrici triangolari superiori, allora

$$g(Gin(I)) = Gin(I), \quad \forall g \in B .$$

Il calcolo di Gin(I), le sue proprietà e le connessioni tra i suoi caratteri numerici e quelli della corrispondente varietà hanno fortemente rafforzato le interazioni tra la Algebra Commutativa e la Combinatorica.

La rilevanza di questo concetto nella ricerca di Algebra Commutativa e Geometria Algebrica è espresso molto bene in questa frase di Green:

Using Gin(I) one can separate the Geometry and the Combinatorics (vedi [16]).

Queste ricerche si inseriscono in quella che si può definire la **Algebra Commutativa Combinatorica**, una nuova ed importante branca della Algebra Commutativa creata da Hochster e Stanley nella metà degli anni settanta. Gli oggetti combinatorici considerati sono i **complessi simpliciali** a cui si fanno corrispondere quegli oggetti algebrici che sono gli **anelli di Stanley-Reisner**. Il numero di facce di un complesso simpliciale è legato alla Funzione di Hilbert del corrispondente anello di Stanley-Reisner.

Questo è la base di ulteriori investigazioni che sono culminate nella prova di Stanley della **Upper Bound Conjecture for simplicial spheres** (vedi [28]).

I concetti di algebre Cohen-Macaulay, Gorenstein, la coomologia locale, la Funzione di Hilbert sono strumenti cruciali per risolvere problemi puramente combinatorici.

10. – Finitezza delle Funzioni di Hilbert.

Una interessante applicazione del concetto di Gin(I) è data da queste considerazioni.

Sia $\mathcal{C}$ una classe di algebre graduate quozienti dell'anello di polinomi $R = k[X_1, \dots, X_n]$. Se si ha

$$reg(R/I) \leqslant t \quad \forall R/I \in \mathcal{C},$$

allora

$$t \geqslant reg(R/I) = reg(R/Gin(I).$$

Ma, per definizione, $reg(R/Gin(I)$ è maggiore od eguale al massimo dei gradi dei generatori di $Gin(I)\ -1$. Siccome ci sono solo un numero finito di monomi di grado $\leqslant t+1$ in R, e siccome $H_{R/I} = H_{R/Gin(I)}$, si conclude che **sono in numero finito le Funzioni di Hilbert delle algebre in** $\mathcal{C}$.

Quindi ogni volta che siamo capaci di trovare un limite superiore alla regolarità di tutte le algebre di una data famiglia $\mathcal{C}$, siamo capaci di provare che sono in numero finito le possibili Funzioni di Hilbert degli elementi di $\mathcal{C}$.

Ad esempio sono in numero finito le Funzioni di Hilbert delle algebre graduate che sono Cohen-Macaulay e hanno una data molteplicità e dimensione.

Il risultato non vale se non si assume la proprietà di essere Cohen-Macaulay.

Ad esempio sia

$$A_r := k[X, Y]/(X^2, XY^r).$$

Allora si ha

$$e(A_r) = 1, \ dim(A_r) = 1, \ reg(A_r) = r.$$

Usando questa idea e un cruciale risultato di Mumford, si può provare che è limitata la regolarità di tutte le algebre ridotte di fissata molteplicità e dimensione. Questo risultato è stato provato da Kleiman, (vedi [20]), ed è un punto cruciale nella costruzione dello schema di Hilbert o di Picard.

Notiamo che l'ipotesi di essere ridotte è essenziale.

Se infatti si considera una retta L di $\mathbb{P}^3$, una superficie liscia S di grado $n+1$ e si considera la curva , non ridotta, corrispondente al divisore $2L$ su S, l'anello delle coordinate è

$$A_n = k[X_0, X_1, X_2, X_3]/(X_0^2, X_0X_1, X_1^2, X_0F - X_1G)$$

con $F, G \in k[X_2, X_3]$, $deg(F) = deg(G) = n$. Allora si ha

$$dim(A_n) = 2, \ deg(A_n) = 2, \ reg(A_n) = n, \ P_{A_n}(z) = \frac{1 + 2z - z^{n+1}}{(1-z)^2}.$$

Questo problema è stato affrontato anche nel caso locale. Recentemente Srinivas e Trivedi hanno provato che sono in numero finito le Funzioni di Hilbert degli anelli locali Cohen-Macaulay di data molteplicità e dimensione (vedi [26]).

Una estensione al caso non Cohen-Macaulay è studiata in [25].

Resta molto interessante il problema di determinare un buon bound alla regolarità dell'anello graduato associato ad un anello locale Cohen-Macaulay.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. Alexander - A. Hirschowitz, *La méthod d'Horace éclaté: Application à l'interpolation en degré quatre*, Inv. Math., **107** (1992), 585-602.
[2] D. Anick, *Thin algebras of embedding dimension three*, J. Algebra, **100** (1986), 235-259.
[3] D. Bayer - M. Stillman, *A criterion for detecting m-regularity*, Invent. Math., **87** (1987), 1-11.
[4] A. M. Bigatti, *Upper bounds for the Betti numbers of a given Hilbert Function*, Comm. Algebra, **21** (7) (1993), 2317-2334.
[5] M. Brignone - G. Valla, *On the resolutions of certain level algebras*, preprint (2003).
[6] W. Bruns - J. Herzog, *Cohen-Macaulay rings*, Cambridge studies in advanced mathematics, 39, 1993.
[7] B. Buchberger, *An algorithmic criterion for the solvability of algebraic system of equations*, Aequationes Math., **4** (1970), 374-383.

[8] A. Capani - G. Niesi - L. Robbiano, *A system for doing Computations in Commutative Algebra* (1995). Available via anonymous ftp from cocoa.dima.unige.it
[9] M. P. Cavaliere - M. E. Rossi - G. Valla, *The Green-Lazarsfeld conjecture for $n+4$ points in $\mathbb{P}^n$*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, **49** (1991), 175-195.
[10] H. Charalambous - E. G. Evans, *Resolutions with a given Hilbert Function*, Contemporary Math., **159** (1994), 19-26.
[11] E. De Negri - G. Valla, *The h-vector of a Gorenstein codimension three domain*, Nagoya Math. J., **138** (1995), 113-140.
[12] D. Eisenbud - S. Goto, *Linear free resolutions and minimal multiplicity*, J. Algebra, **88** (1984), 89-133.
[13] D. Eisenbud - S. Popescu, *The projective geometry of the Gale transform*, J. Algebra, **230** (2000), 127-173.
[14] R. Fröberg, *An inequality for Hilbert series of graded algebras*, Math. Scand., **56** (1985), 117-144.
[15] M. Green, *Koszul cohomology and the Geometry of projective varieties*, J. Diff. Geom. (1984), 125-171.
[16] M. Green, *Generic Initial ideals, Six Lectures on Commutative Algebra (Bellaterra)*, Progr. Math. 166, Birkhäuser Basel (1998), 119-186.
[17] L. Gruson - C. Peskine, *Genre des courbes de l'espace projectif, Algebraic Geometry*, Lect. Notes Math., **687** (1978), Springer.
[18] L. Gruson - R. Lazarsfeld - C. Peskine, *On a theorem of Castelnuovo and the equations defining space curves*, Inv. Math., **72** (1983), 491-506.
[19] H. A. Hulett, *Maximum Betti numbers of homogeneous ideal with a given Hilbert Function*, Comm. Algebra, **21** (7) (1993), 2335-2350.
[20] S. Kleiman, *Les théoremes de finitude pour le foncteur de Picard,Exposè XIII. In Thé orie des Intersections et Théorem de Riemann-Roch (SGA VI)*, Springer Lect. Notes in Math., **225** (1971), 616-666.
[21] A. M. Lorenzini, *The minimal resolution conjecture*, J. Algebra, **156** (1993), 5-35.
[22] R. Lazarsfeld, *A sharp Castelnuovo bound for smooth surfaces*, Duke Math. J., **55** (1987), 423-429.
[23] F. S. Macaulay, *Some properties of enumeration in the theory of modular systems*, Proc. London Math. Soc., **26** (1927), 531-555.
[24] D. McDuff - L. Polterovich, *Symplectic packings and Algebraic Geometry*, Inv. Math., **115** (1994), 405-429.
[25] M. E. Rossi - N. V. Trung - G. Valla, *Castelnuovo-Mumford regularity and extended degree*, Trans. Amer. Math. Soc., **355**, no. 5 (2003), 1773-1786.
[26] V. Srinivas - V. Trivedi, *On the Hilbert Function of a Cohen-Macaulay ring*, J. Algebraic Geom., **6** (1997), 733-751.
[27] R. Stanley, *Hilbert Functions of graded algebras*, Adv. in Math., **28** (1978), 57-83.
[28] R. Stanley, *The Upper Bound conjecture and Cohen-Macaulay rings*, Studies in Appl. Math., **54** (1975), 135-142.

Dipartimento di Matematica, Università di Genova
Via Dodecaneso 35, 16146 Genova, Italia; valla@dima.unige.it

Pervenuta in Redazione
il 5 novembre 2003