Bollettino Unione Matematica Italiana

Luigi Ambrosio

Problema di trasporto e equazione di Cauchy per campi vettoriali a variazione limitata

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **7-B** (2004), n.3, p. 529–543.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2004_8_7B_3_529_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2004.

Bollettino U. M. I.
(8) **7**-B (2004), 529-543

Problema di trasporto e equazione di Cauchy per campi vettoriali a variazione limitata.

LUIGI AMBROSIO (*)

Sunto. – *In questa conferenza descrivo alcuni recenti sviluppi relativi al problema dell'unicità per l'equazione differenziale ordinaria e per l'equazione di continuità per campi vettoriali debolmente differenziabili. Descrivo infine un'applicazione di questi risultati a un sistema di leggi di conservazione.*

Summary. – *In this talk I will illustrate some recent progress on the uniqueness problem for the transport equation and the ordinary differential equation associated to a weakly differentiable vector field. An application to a system of conservation laws will also be illustrated.*

1. – Introduzione.

In questo intervento vorrei brevemente descrivere le linee guida del mio recente lavoro [6], nel quale studio la buona positura del problema di Cauchy per l'equazione di trasporto e per l'equazione differenziale ordinaria nel caso in cui il campo vettoriale $b(t, x)$ abbia poca regolarità rispetto alle variabili spaziali, e precisamente una regolarità di tipo BV (variazione limitata). Questi risultati estendono la teoria di DiPerna-Lions [21], nella quale era stata considerata una regolarità di tipo $W^{1,p}$. L'estensione al caso BV risulta cruciale per l'applicazione, descritta nell'ultimo paragrafo, a un particolare sistema di leggi di conservazione considerato da Bressan in [12] e poi in due miei lavori [7], [8], il primo con De Lellis e il secondo con Bouchut e De Lellis.

2. – Breve descrizione e storia del problema.

Iniziamo col descrivere il problema da due diversi punti di vista, tra loro però strettamente collegati.

(*) Conferenza tenuta a Milano il 13 settembre 2003 in occasione del XVII Congresso U.M.I.

2.1. *Il punto di vista Lagrangiano.*

Dato un campo di velocità $b(t, x): [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, vorremmo condizioni che assicurino «l'unicità generica» delle soluzioni del problema di Cauchy

$$\text{(ODE)} \qquad \begin{cases} \dot{\gamma}(t) = b(t, \gamma(t)) \\ \gamma(0) = x\,. \end{cases}$$

In mancanza di unicità, anche generica, vorremmo comunque un principio di selezione delle soluzioni che sia stabile rispetto all'approssimazione di b mediante campi più regolari b_h: in particolare si vorrebbe che

$$\exists \lim_{h \to \infty} \gamma_h(x, t) \qquad \text{in } C([0, T]; \mathbb{R}^d) \text{ per } \mathcal{L}^d\text{-q.o. } x\,,$$

ove $\gamma_h(x, \cdot)$ sono le soluzioni classiche del problema di Cauchy approssimante.

Non supporremo che $b(t, \cdot)$ sia di Lipschitz ma, per evitare fenomeni di esplosione in tempo finito, supporremo che $|b|$ sia globalmente limitato. Questa ipotesi può essere indebolita in vari modi, introducendo però delle complicazioni tecniche che renderebbero più complessa questa esposizione: l'ipotesi più generale al momento nota è:

$$\text{(1)} \qquad \frac{b}{1 + |x|} \in L^1([0, T]; L^1(\mathbb{R}^d)) + L^1([0, T]; L^\infty(\mathbb{R}^d))\,.$$

2.2. *Il punto di vista Euleriano.*

Consideriamo il problema di Cauchy per l'equazione di trasporto (in forma conservativa)

$$\text{(PDE)} \qquad \frac{d}{dt}\mu_t + D_x \cdot (b\mu_t) = 0, \qquad \mu_0 = \mathcal{L}^d \llcorner A, \qquad t \in [0, T]$$

per un'opportuna famiglia di misure μ_t parametrizzate dal tempo. Vogliamo studiare la buona positura di questo problema e ottenere un principio di confronto per le soluzioni.

2.3. *Alcune indicazioni bibliografiche.*

Per entrambi i problemi, in forma Lagrangiana o Euleriana, ci interessa stabilire principi di buona positura quando $b(t, \cdot)$ è debolmente differenziabile, i.e. appartiene o a uno spazio di Sobolev o allo spazio BV delle funzioni a variazione limitata. Il primo lavoro nel quale questa problematica viene affrontata è quello di DiPerna-Lions [21], dove viene considerata una dipendenza di tipo Sobolev, e in [26] Lions considera il caso in cui il campo sia «Sobolev a tratti». Nei lavori [14], [15] di Cellina e Cellina-Vornicescu si studiano invece inclusioni differenziali $\dot{\gamma}(t) \in A(\gamma(t))$, con A

massimale monotono, e quindi BV. In tal caso gli autori ottengono unicità per $\mathcal{L}^d$-quasi ogni dato iniziale.

Un fondamentale lavoro è quello di Bouchut, nel quale si risolve il problema per equazioni del II ordine $\gamma''(t) = b(t, \gamma(t))$ e più in generale per alcune equazioni di tipo Hamiltoniano (sfruttando, come vedremo, nel prossimo paragrafo, una struttura particolare del campo). Nel lavoro [16] (si veda anche [17]) di Colombini-Lerner si considera una classe particolare di campi BV, da loro chiamati co-normali, che si riducono a campi simili a quelli considerati da Bouchut dopo un cambiamento (locale) di coordinate bilipschitziano. Infine, in [6] ho ottenuto il caso generale, imponendo solo regolarità BV e assoluta continuità della divergenza rispetto a $\mathcal{L}^d$.

La letteratura in questo campo è comunque molto ampia, e la bibliografia qui elencata non pretende affatto di essere esauriente. Segnaliamo comunque i lavori [22], [23], contenenti altri risultati di unicità nel caso 2-dimensionale, e i lavori [28] e [10], dove vengono considerati campi soddisfacenti una condizione di Lipschitz unilatera.

Le condizioni ottimali sul campo vettoriale b non sono al momento note, ma esistono comunque alcuni controesempi, che per brevità non discuteremo, ma che comunque delimitano in qualche modo il campo di indagine: oltre ai due controesempi in [21] ricordiamo anche i lavori [1], [18], [20].

2.4. *Regolarizzazione anisotropa dell'equazione di trasporto*

Nel fondamentale lavoro [11] di Bouchut è considerata un'equazione di trasporto, nota come equazione di Vlasov, il cui campo ha una struttura particolare. Precisamente si ha

$$f_t + \nabla_x f \cdot \xi + \nabla_\xi \cdot [E(t, x)\, f] = 0$$

dove $f = f(t, x, \xi)$ e

$$b(t, x, \xi) = (\xi, E(t, x)), \qquad E(t, \cdot) \in BV.$$

Si noti che il campo ha divergenza nulla rispetto alle variabili spaziali (x, ξ), e che si ha bassa regolarità solo delle ultime componenti, rispetto al primo gruppo di variabili.

In questo tipo di formalismo rientra immediatamente un problema di Cauchy del II ordine, non appena lo scriviamo in forma Hamiltoniana. Si ha infatti

$$x''(t) = c(t, x(t)), \quad p := x'(t), \quad (x'(t), p'(t)) = b(t, x(t), p(t))$$

con

$$b(t, x, p) := (p, c(t, x))$$

e quindi

$$\nabla_{x,p} B(t, x, p) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \mathcal{M} & 0 \end{pmatrix}.$$

Questa struttura speciale del campo di velocità è struttata in [11] facendo una regolarizzazione *anisotropa* del PDE, basata sui nuclei di convoluzione

$$\varrho_{\varepsilon,\delta}(x, p) := \varrho_\varepsilon(x)\, \varrho_\delta(p)$$

con $\varepsilon \ll \delta$. Il risultato è poi stato esteso da Colombini-Lerner [17] a una classe particolare di campi BV, che si riducono a quelli del tipo di Bouchut con un cambiamento (locale) di coordinate bilipschitziano.

Nella teoria sviluppata in [6] non si fanno ipotesi particolari sulla struttura del campo, supponendo solo che ci sia regolarità BV rispetto alle variabili spaziali, e che la divergenza del campo $b(t, \cdot)$ sia assolutamente continua per $\mathcal{L}^1$-q.o. $t \in [0, T]$:

$$b \in L^1_{\text{loc}}([0, T]; BV_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)); \tag{2}$$

$$D \cdot b(t, \cdot) = \operatorname{div} \mathrm{b}_\mathrm{t} \mathcal{L}^\mathrm{d} \quad \text{per } \mathcal{L}^1\text{-q.o. } t, \quad \text{con } \operatorname{div} b_t \in L^1([0, T]; L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)). \tag{3}$$

Per semplicità, tuttavia, nel seguito considereremo solo il caso autonomo, fermo restando che tutti i risultati si estendono con minime modifiche al caso in cui vi sia una dipendenza misurabile rispetto al tempo, con le deboli stime quantitative (2), (3) (e con la stima (1) sul campo già ricordata).

3. – Soluzioni rinormalizzate dell'equazione di trasporto con dati BV.

3.1. *Dal formalismo Lagrangiano a quello Euleriano.*

Sia $A \subset \mathbb{R}^d$ un insieme $\mathcal{L}^d$-misurabile e sia $\gamma(x, \cdot)$, per ogni $x \in A$, una soluzione del problema di Cauchy $\dot{\gamma} = b(\gamma)$ con la condizione iniziale $\gamma(0) = x$. Sia $\mu_t := \gamma(\cdot, t)_\# \mathcal{L}^d \llcorner A$, i.e.

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi \, d\mu_t := \int_A \varphi(\gamma(x, t))\, dx \qquad \forall \varphi \in C_c(\mathbb{R}^d).$$

Sotto queste ipotesi si ha che le misure μ_t risolvono l'equazione di trasporto

$$\frac{d}{dt} \mu_t + D_x \cdot (b \mu_t) = 0$$

con $\mu_0 = \mathcal{L}^d \llcorner A$. Infatti per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ abbiamo

$$\frac{d}{dt}\int \varphi\, d\mu_t = \frac{d}{dt}\int_A \varphi \circ \gamma\, dx = \int_A \langle (\nabla\varphi)\circ\gamma, \dot{\gamma}\rangle\, dx$$

$$= \int_A \langle (\nabla\varphi)\circ\gamma,\, b\circ\gamma\rangle\, dx = \int \nabla\varphi\cdot b\, d\mu_t.$$

Se $\mu_t = w_t \mathcal{L}^d$ e $D\cdot b = div\, b\, \mathcal{L}^d$ consideriamo la classe più generale di equazioni della forma

$$\frac{d}{dt} w_t + b\cdot\nabla w_t = e_t w_t.$$

Scegliendo $e_t = -\mathrm{div}\, b$ l'equazione sopra si riduce all'equazione di trasporto in forma di divergenza.

3.2. *Il lemma di rinormalizzazione di DiPerna-Lions.*

Supponiamo $b \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$, che w_t siano limitate e a supporto compatto uniformemente rispetto a x e che $\int\limits_0 \int\limits_{B_R} |e_t|\, dxdt < +\infty$ per ogni $R > 0$. Allora

$$\frac{d}{dt} w_t + b\cdot\nabla w_t = e_t w_t \tag{4}$$

implica

$$\frac{d}{dt}\beta(w_t) + b\cdot\nabla\beta(w_t) = e_t w_t \beta'(w_t) \quad \forall \beta \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}). \tag{5}$$

Di conseguenza, scegliendo $\beta(t) := \sqrt{1+(t^+)^2} - 1$ e usando il Lemma di Gronwall otteniamo immediatamente il principio di confronto

$$w_0^1 \leqslant w_0^2 \quad \Rightarrow \quad w_t^1 \leqslant w_t^2 \ \ \forall t \in [0, T]$$

in questa classe di soluzioni (si noti che l'unicità nella classe delle mappe $t \mapsto \mu_t$ a valori misure è nota *solo* se $b \in W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}$).

Traccia della dimostrazione di (5). Regolarizzando ambo i membri e ponendo $w_t^\varepsilon = w_t * \varrho_\varepsilon$ otteniamo

$$\frac{d}{dt} w_t^\varepsilon + (b\cdot\nabla w_t) * \varrho_\varepsilon = (e_t w_t) * \varrho_\varepsilon$$

e quindi

$$\frac{d}{dt} w_t^\varepsilon + b \cdot \nabla w_t^\varepsilon = (e_t w_t) * \varrho_\varepsilon + r_\varepsilon$$

con

$$r_\varepsilon := b \cdot \nabla w_t^\varepsilon - (b \cdot \nabla w_t) * \varrho_\varepsilon .$$

Moltiplicando ambo i membri per $\beta'(w_t^\varepsilon)$ si ottiene

$$\frac{d}{dt} \beta(w_t^\varepsilon) + b \cdot \nabla \beta(w_t^\varepsilon) = \beta'(w_t^\varepsilon)[(e_t w_t) * \varrho_\varepsilon + r_\varepsilon]$$

e quindi la proprietà di rinormalizzazione si ottiene al tendere di ε a 0, usando il fatto che $r_\varepsilon \to 0$ nella topologia *forte* di L^1_{loc}. Quest'ultima proprietà risulta dipendere dall'espressione esplicita

$$r_\varepsilon(t, x) = \int_{\mathbb{R}^d} w_t(x - \varepsilon y) \frac{b(x - \varepsilon y) - b(x)}{\varepsilon} \cdot \nabla \varrho(y)\, dy - (w_t \operatorname{div} b) * \varrho_\varepsilon(x) \tag{6}$$

dei commutatori e dal fatto che, in spazi di Sobolev $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$, i rapporti incrementali convergono fortemente in L^p_{loc} alla derivata (una proprietà che, come è ben noto, caratterizza gli spazi di Sobolev stessi). Passando infatti al limite nella (6) otteniamo

$$-w_t(x) \int_{\mathbb{R}^d} \langle \nabla b(x)\, y, \nabla \varrho(y) \rangle\, dy - w_t(x) \operatorname{div} b(x)$$

e usando l'identità elementare

$$\int_{\mathbb{R}^d} y_i \frac{\partial \varrho}{\partial y_j}\, dy = -\delta_{ij} \tag{7}$$

si ottiene che il limite dei commutatori è nullo.

Quando $b \notin W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ il comportamento dei commutatori r_ε è molto sensibile alla scelta del nucleo di convoluzione ϱ: ad esempio quando ϱ è *radiale* si ha (si veda [13])

$$D_i b_j + D_j b_i \in L^1_{\mathrm{loc}} \;\Rightarrow\; r_\varepsilon \to 0 \text{ in } L^1_{\mathrm{loc}}.$$

Quindi la sola informazione che la parte simmetrica della derivata prima è in L^1_{loc} risulta sufficiente. In alcuni esempi interessanti che discuteremo più avanti, tuttavia, questa condizione non risulta soddisfatta.

In generale r_ε *non* convergono fortemente a 0 in L^1_{loc} quando $b \in BV_{\mathrm{loc}}$. Per affrontare questo caso ritorniamo all'espressione (6) dei commutatori e ricordiamo che per ogni funzione $u \in BV_{\mathrm{loc}}$ e per ogni $z \in \mathbb{R}^d$ vale

$$\int_K |u(x+z) - u(x)|\,dx \leqslant |D_z u|(K_\varepsilon) \quad \text{per ogni compatto } K \subset \mathbb{R}^d,$$

ove $D_z u = \langle Du, z\rangle$ indica la componente lungo z della derivata nel senso delle distribuzioni di u e K_ε è l'intorno aperto di raggio ε di K. Detta $Db = M|Db|$ la decomposizione polare della derivata distribuzionale di b, osserviamo che

$$D_z \langle b, \nabla \varrho(z)\rangle = \langle M(z), \nabla \varrho(z)\rangle |Db|$$

e quindi la stima dei rapporti incrementali dà

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \int_K |r_\varepsilon|\,dtdx \leqslant \|w\|_\infty \int_K \int_{\mathbb{R}^d} |\langle M(x)\, z, \nabla \varrho(z)\rangle|\,dz\, d\mathcal{L}^1 \times |Db|(t, x) \tag{8}$$

per ogni compatto $K \subset (0, T) \times \mathbb{R}^d$. D'altro canto in [6] è anche mostrato che il rapporto incrementale di una funzione BV può essere canonicamente spezzato in due parti, una fortemente convergente alla parte assolutamente continua della derivata distribuzionale, e una uniformemente stimabile in L^1 con la parte singolare $|D^s b|$ della derivata distribuzionale $|Db|$. Ripetendo l'argomento di DiPerna-Lions e tenuto conto dell'errore indotto dalla seconda parte si ottiene

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \int_K |r_\varepsilon|\,dtdx \leqslant \|w\|_\infty \int_K \int_{\mathbb{R}^d} |z|\,|\nabla \varrho(z)|\,dz\, d\mathcal{L}^1 \times d|D^s b|(t, x) \tag{9}$$

per ogni compatto $K \subset (0, T) \times \mathbb{R}^d$. Intuitivamente la seconda stima è utile nelle regioni dove la parte assolutamente continua è dominante (sicché $|D^s b|(K) < < 1$), mentre la prima deve essere utilizzata nelle altre regioni, dove è la parte singolare della derivata a essere dominante. Il modo per combinare queste due stime è illustrato nel seguente teorema di rinormalizzazione, uno dei principali risultati di [6].

TEOREMA. – *Supponiamo che* $b \in BV_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ *e che* $D \cdot b \ll \mathcal{L}^d$. *Allora ogni soluzione localmente limitata* w *di* (4) *soddisfa* (5).

DIM. – La stima (9) ci dice che ogni misura limite ν di $|r_\varepsilon|\,\mathcal{L}^{d+1}$ per $\varepsilon \downarrow 0$ soddisfa

$$\nu \leqslant \|w\|_\infty I(\varrho)\; \mathcal{L}^1 \times |D^s b| \quad \text{con} \quad I(\varrho) := \int_{\mathbb{R}^d} |z|\,|\nabla \varrho(z)|\,dz\,.$$

In particolare ν è una misura singolare rispetto a $\mathcal{L}^d + 1$. D'altro canto, la stima (8) ci dice anche che vale

$$\nu \leqslant \|w\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d} |\langle M(\cdot)\, z,\, \nabla\varrho(z)\rangle|\, dz\, \mathcal{L}^1 \times |Db|\,.$$

Queste due stime implicano che

$$\nu \leqslant \|w\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d} |\langle M(\cdot)\, z,\, \nabla\varrho(z)\rangle|\, dz\, \mathcal{L}^1 \times |D^s b|\,. \tag{10}$$

Si è così eliminato il termine $I(\varrho)$ che, come vedremo, non può essere controllato dall'alto a causa del fatto che dovremo scegliere nuclei di convoluzione molto anisostropi. La misura ν può dipendere ovviamente dalla scelta del nucleo ϱ, ma la misura «di difetto»

$$\sigma := \frac{d}{dt}\beta(w_t) + b\cdot\nabla\beta(w_t) - e_t w_t \beta'(w_t)$$

è indipendente da ϱ e si stima, seguendo l'argomento di regolarizzazione di Di-Perna-Lions e usando la (10) al posto della convergenza forte dei commutatori, come segue:

$$|\sigma| \leqslant C\Lambda(M(\cdot),\, \varrho)\, \mathcal{L}^1 \times |D^s b| \quad \text{con} \quad \Lambda(N,\, \varrho) := \int_{\mathbb{R}^d} |\langle Nz,\, \nabla\varrho(z)\rangle|\, dz \tag{11}$$

per un'opportuna costante C che dipende localmente solo da $\|w\|_\infty$ e dal sup di $|\beta'|$ su $[-\|w\|_\infty,\, \|w\|_\infty]$. Cercando di ottimizzare la scelta di ϱ, è naturale studiare il problema di minimo

$$\inf\left\{\Lambda(N,\, \varrho) : \varrho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d),\ \varrho \geqslant 0,\ \int_{\mathbb{R}^d} \varrho = 1\right\}.$$

Usando l'identità (7) è immediato verificare che l'estremo inferiore è sicuramente minorato da $|\mathrm{traccia}(N)|$, ma un ingegnoso argomento di Alberti mostra che in realtà vale l'uguaglianza (si cerca di costruire ipersuperfici chiuse, che saranno gli insiemi di livello di ϱ, tali che il campo Mz sia il più possibile tangente alle ipersuperfici) e quindi l'estremo inferiore sopra si annulla per matrici N di traccia nulla. Nel nostro caso $N = M(x)$, ove M è la matrice della decomposizione polare $Db = M|Db|$. L'ipotesi che la divergenza distribuzionale di b sia assolutamente continua rispetto a $\mathcal{L}^d$ ci dice allora che la traccia di M è nulla $|D^s b|$-quasi ovunque. Quindi, minimimizzando nella (11), si ottiene che $\sigma = 0$, concludendo la dimostrazione. L'argomento in [6] è lievemente diverso e fa uso di un profondo risultato di Alberti, noto come teorema del rango 1 [2]: il teorema ci dice che $M(x)$ è una matrice di rango 1 per $|D^s b|$-quasi ogni x, i.e. esistono vettori $\xi(x)$ e $\eta(x)$ tali che $M(x)z = \eta(x)\langle z,\, \xi(x)\rangle$. In tal caso i nuclei di convoluzione (asintoticamente) ottimali sono semplici da costruire, regolarizzando nella direzione ξ molto più velocemente che nelle altre (in analogia a quanto fatto da Bouchut in [11]).

4. – Misure di probabilità in $C([0, T]; \mathbb{R}^m)$ e applicazioni all'esistenza, l'unicità e la stabilità dei flussi Lagrangiani.

Il punto di vista descritto in questo paragrafo è alternativo rispetto a quello introdotto in [21] ed è fortemente ispirato dalla teoria dei controlli generalizzati di L.C.Young [29], dalla teoria dei varifold di Allard-Almgren [4], e dalla teoria di Kantorovich dei piani ottimali di trasporto [24].

Sia $\Gamma(\mathbb{R}^d)$ lo spazio della mappe continue $\gamma : [0, T] \to \mathbb{R}^d$ e sia

$$\Gamma_x^b(\mathbb{R}^d) := \left\{ \gamma \in \Gamma(\mathbb{R}^d) : \gamma(t) = x + \int_0^t b(\gamma(s))\, ds \ \ \forall t \in [0, T] \right\}.$$

Consideriamo famiglie di mappe (misurabili) a valori misure $x \mapsto \eta_x$, con η_x misura positiva e finita in $\Gamma(\mathbb{R}^d)$.

Tali mappe $x \mapsto \eta_x$ sono un comodo strumento matematico per descrivere fenomeni di oscillazione e di concentrazione delle traiettorie per il problema di Cauchy (per esempio quando si considera l'approssimazione di b mediante campi più regolari) e possono anche essere usate per escludere, a posteriori, l'esistenza di tali oscillazioni.

Il seguente elementare teorema (la cui dimostrazione è analoga a quella vista nella Sezione 3.1) mostra che ogni misura η concentrata sull'insieme delle soluzioni di ODE induce una soluzione dell'equazione di trasporto.

TEOREMA. – *Supponiamo che* $\int_A \eta_x(\Gamma(\mathbb{R}^d))\, dx < +\infty$ *e che* η_x *sia concentrata in* $\Gamma_x^b(\mathbb{R}^d)$ *per* $\mathcal{L}^d$*-q.o.* $x \in A$. *Allora le misure* $\mu_t^{\eta_x}$ *definite da*

$$\mu_t^{\gamma_x}(\varphi) := \int_A \int_{\Gamma(\mathbb{R}^d)} \varphi(\gamma(t))\, d\eta_x(\gamma)\, dx, \qquad \varphi \in C_c(\mathbb{R}^d) \tag{12}$$

risolvono il problema di Cauchy

$$\frac{d}{dt}\mu_t + D_x \cdot (b\mu_t) = 0, \qquad \mu_0 = \eta_x(\Gamma(\mathbb{R}^d))\, \mathcal{L}^d \llcorner A .$$

In realtà è mostrato nel Capitolo 9 di [9] che lo schema di regolarizzazione

$$\frac{d}{dt}\mu_t^\varepsilon + D\cdot(b_\varepsilon \mu_t^\varepsilon) = 0 \quad \text{con} \quad \mu_t^\varepsilon := \mu_t * \varrho_\varepsilon, \qquad b_\varepsilon := \frac{(b\mu_t) * \varrho_\varepsilon}{\mu_t * \varrho_\varepsilon} \,,$$

e il teorema fondamentale sulle misure di Young mostrano che vale anche il viceversa: *ogni* soluzione positiva μ_t dell'equazione di trasporto è rappresentabile come in (12), per opportune η_x con $\eta_x(\Gamma(\mathbb{R}^d)) = \mu_0/\mathcal{L}^d$, quando $\mu_0 \ll \mathcal{L}^d$. Il vantaggio della rappresentazione $\mu_t = \mu_t^\eta$ è dovuto al fatto che essa consente molto facilmente localizzazioni rispetto ai punti di partenza e di arrivo delle traiettorie, come vedremo in seguito.

Il seguente criterio dà una condizione necessaria e sufficiente perché η_x sia una delta di Dirac concentrata su una certa $\gamma = \gamma_x \in \Gamma(\mathbb{R}^d)$ per $\mathcal{L}^d$-q.o. $x \in A$.

CRITERIO. – *η_x è una delta di Dirac per $\mathcal{L}^d$-q.o. $x \in A$ se e solo se per ogni $t \in [0, T]$ vale:*

$$\eta_x(\{\gamma : \gamma(t) \in C_1\})\, \eta_x(\{\gamma : \gamma(t) \in C_2\}) = 0 \quad \mathcal{L}^d\text{-}q.o. \quad x \in A \ \ se \ \ C_1 \cap C_2 = \emptyset\, .$$

DIM. – Osserviamo preliminarmente che una misura ν in $\Gamma(\mathbb{R}^d)$ è una delta di Dirac se e solo se, fissato un insieme denso $D \subset [0, T]$ di tempi, si ha che la misura immagine $\gamma(t)_\# \nu$ è una delta di Dirac per ogni $t \in D$. Quindi ci si riduce a mostrare il seguente enunciato: una famiglia di misure σ_x di probabilità in $\mathbb{R}^d$ è fatta (essenzialmente) da delta di Dirac se e solo se $\sigma_x(C_1)\sigma_x(C_2) = 0$ $\mathcal{L}^d$-q.o. per ogni coppia di insiemi di Borel disgiunti C_1, C_2. Fissato $\delta > 0$, sia C_i una partizione di Borel di $\mathbb{R}^d$ in insiemi di diametro minore di δ; essendo $\sigma_x(C_i)\,\sigma_x(C_j) = 0$ per $\mathcal{L}^d$-q.o. x e $i \neq j$, posto

$$A_i := \{\sigma_x(C_i) > 0\} \setminus \bigcup_{j \neq i} \{\sigma_x(C_j) > 0\}$$

si ha che il supporto di σ_x è contenuto in $\overline{C_i}$ per ogni $x \in A_i$, e gli insiemi A_i coprono $\mathcal{L}^d$-quasi tutto A. Essendo δ arbitrario la tesi è dimostrata.

Il criterio precedente, usato insieme al teorema di confronto per PDE, porta al seguente teorema che ci assicura che tutte le η concentrate su soluzioni di ODE sono «banali».

TEOREMA. – *Supponiamo che $b \in BV_{\mathrm{loc}} \cap L^\infty$ e che $D \cdot b \in L^\infty$. Se η_x è concentrata su $\Gamma_x^b(\mathbb{R}^d)$ per $\mathcal{L}^d$-q.o. $x \in A$ e*

$$\mu_t^{\eta_x} \leq C\mathcal{L}^d \qquad \forall t \in [0, T] \tag{13}$$

per qualche costante C, allora η_x è una delta di Dirac per $\mathcal{L}^d$-q.o. $x \in A$.

Infatti se la condizione enunciata nel precedente criterio non vale per qualche $\bar{t} \in [0, T]$ e per opportuni insiemi di Borel disgiunti C_1, C_2, possiamo trovare $B \subset A$ e una costante M tali che $\mathcal{L}^d(B) > 0$ e

$$0 < \gamma_x(\{\gamma : \gamma(\bar{t}) \in C_1\}) \leq M \gamma_x(\{\gamma : \gamma(\bar{t}) \in C_2\}) \qquad \forall x \in B\, .$$

Considerando le famiglie di misure $\Gamma(\mathbb{R}^d)$ definite da

$$\eta_x^1 := \chi_B(x)\,\eta_x \llcorner \{\gamma : \gamma(\bar{t}) \in C_1\}, \qquad \eta_x^2 := M\chi_B(x)\eta_x \llcorner \{\gamma : \gamma(\bar{t}) \in C_2\}$$

e le misure indotte μ_t^i, vediamo che $\mu_0^1 \leq \mu_0^2$ mentre $\mu_{\bar{t}}^1 \perp \mu_{\bar{t}}^2$ (la prima è concentrata su C_1 e la seconda è concentrata su C_2). Questo viola il principio di confronto per soluzioni limitate (per l'ipotesi (13)) dell'equazione di trasporto.

UNICITÀ GENERICA. – *Nelle ipotesi precedenti su b esiste essenzialmente un unico modo di scegliere per $\mathcal{L}^d$-q.o. $x \in \mathbb{R}^d$ una soluzione $\gamma(x, \cdot)$ del problema*

$$\begin{cases} \dot{\gamma}(t) = b(\gamma(t)) \\ \gamma(0) = x, \quad t \in [0, T] \end{cases}$$

in modo che le misure $\mu_t := \gamma(\cdot, t)_\# \mathcal{L}^d$ abbiano densità localmente uniformemente limitata.

Infatti due distinte selezioni $\gamma^1(x, \cdot)$ and $\gamma^2(x, \cdot)$ inducono le misure di probabilità

$$\eta_x := \frac{1}{2}(\delta_{\gamma^1(x, \cdot)} + \delta_{\gamma^2(x, \cdot)})$$

che soddisfano tutte le ipotesi del teorema precedente e che non sono delta di Dirac.

Il risultato precedente non risolve la questione più fine relativa all'esistenza senza ipotesi sulle densità. Questo problema è legato a quello di stabilire risultati di unicità e di confronto in classi più ampie di soluzioni (quelle a valori misure, ad esempio). Questo problema è aperto persino nelle classi di Sobolev, ed è naturalmente legato a quello di precisare un *buon* rappresentante (definito non solo a meno di insiemi di misura di Lebesgue nulla) di b. Alcuni risultati in questa direzione, nel caso di una dimensione spaziale, sono contenuti in [10].

L'esistenza di una selezione $\gamma(x, \cdot)$ nel teorema di unicità generica è conseguenza del seguente teorema di stabilità.

TEOREMA DI STABILITÀ. – *Siano $b_h \in W^{1,\infty}_{\rm loc}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ e supponiamo che*

$$b_h \to b \in BV_{\rm loc} \quad \textit{in } L^1_{\rm loc} \quad \textit{e} \quad \sup_h [\|b_h\|_\infty + \|{\rm div}\, b_h\|_\infty] < +\infty\,.$$

Siano $\gamma_h(x, \cdot)$ le soluzioni classiche di $\dot{\gamma} = b_h(\gamma)$ con $\gamma_h(x, 0) = x$ e sia $\gamma(x, \cdot)$

la selezione regolare delle soluzioni di $\dot{\gamma} = b(\gamma)$. Allora

$$\lim_{h \to \infty} \int_{B_R} \sup_{t \in [0, T]} |\gamma_h(x, t) - \gamma(x, t)| dx = 0 \qquad \forall R > 0 .$$

Osserviamo che nessuna limitazione BV è imposta sulla successione (b_h): si suppone solo che il campo limite b sia BV. La stima su $\|\mathrm{div}\, b_h\|_\infty$ può essere sostituita da più deboli stime integrali sui flussi generati da b_h, ma è comunque richiesta la condizione $D \cdot b \ll \mathcal{L}^d$ e $[\mathrm{div}\, b]^- \in L^\infty$ sul campo limite b.

5. – Un'applicazione a un sistema di leggi di conservazione.

Consideriamo il problema di Cauchy (studiato in una dimensione spaziale da Keyfitz-Kranzer in [25])

$$u_t + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}(f_i(|u|)\, u) = 0, \qquad u : \mathbb{R}^d \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}^n \tag{14}$$

con la condizione iniziale $u(\cdot, 0) = \overline{u}$.

In un recente lavoro [12] Bressan ha mostrato che il problema può essere mal posto per dati iniziali L^∞ e ha congetturato che potrebbe essere ben posto per dati iniziali BV, proponendo una costruzione basata sul metodo delle caratteristiche. Nel lavoro [7] in collaborazione con De Lellis abbiamo effettivamente mostrato che questa procedura può essere implementata, grazie ai risultati di [6], per dati iniziali $\overline{u}$ tali che $|\overline{u}| \in BV \cap L^\infty$, con $1/|\overline{u}| \in L^\infty$. Successivamente, in un lavoro con Bouchut e De Lellis [8], si è mostrato che la stima dal basso su $|\overline{u}|$ non è necessaria, e si è mostrato che la soluzione costruita in [7] è unica in un'opportuna classe di funzioni ammissibili: la classe delle funzioni u il cui modulo ϱ soddisfa l'equazione scalare

$$\varrho_t + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}(f_i(\varrho)\, \varrho) = 0 \tag{15}$$

nel senso delle soluzioni di entropia di Kruzkhov [19], con la condizione iniziale $\varrho(0, \cdot) = |\overline{u}|$. Si noti che la teoria della regolarità delle soluzioni di entropia garantisce che $\varrho \in L^\infty \cap BV_{\mathrm{loc}}([0, +\infty) \times \mathbb{R}^d)$, viste la regolarità e la limitatezza del dato iniziale, e che $1/\varrho \in L^\infty$.

Per ottenere la (o, meglio, una) soluzione u possiamo *formalmente* disaccoppiare il sistema, scrivendo

$$u = \theta\varrho\,, \qquad \overline{u} = \overline{\theta}\,|\overline{u}|\,, \qquad |\theta| = |\overline{\theta}| = 1$$

e ridurre il problema al sistema (disaccoppiato, se non si considera il vincolo $|\theta| = 1$) di equazioni di trasporto

$$\theta_t + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}(f_i(\varrho)\theta) = 0 \tag{16}$$

con la condizione iniziale $\theta(0, \cdot) = \overline{\theta}$. Una soluzione *formale* del sistema, che rispetta anche il vincolo $|\theta| = 1$, è data da

$$\theta(t, x) := \overline{\theta}([X(t, \cdot)]^{-1}(x)),$$

dove $X(t, \cdot)$ è il flusso associato al campo $f(\varrho)$, supposto invertibile. Si noti che il campo non autonomo $f(\varrho)$ è limitato e di classe BV_{loc}, ma la teoria sviluppata in [6] non è qui immediatamente applicabile perché la sua divergenza non è assolutamente continua. In questo caso, tuttavia, un semplice argomento consente ancora di sfruttare i risultati in [6], rappresentando $f(\varrho)$ come parte del campo autonomo $b := (\varrho, \varrho f(\varrho))$ in $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$. Tale campo è ancora BV_{loc} e limitato, ed è a divergenza nulla in virtù della (15). A questo punto non è difficile vedere che la riparametrizzazione temporale del flusso $(t(s), x(s))$ associato a b

$$(\dot{t}(s), \dot{x}(s)) = (\varrho(t(s), x(s)), f(\varrho(t(s), x(s)))\, \varrho(t(s), x(s)))$$

definita da $\tilde{x}(t) = x(t(s)^{-1}(t))$ (qui si usa l'ipotesi $\varrho > 0$) consente di ottenere in modo naturale un flusso per il campo $f(\varrho)$. In questo modo si ottiene una sorta di soluzione formale, o puntuale, di (14). La soluzione è però anche distribuzionale grazie al fatto che il campo b può essere approssimato da campi regolari, per i quali i calcoli formali sopra esposti sono validi, e grazie al teorema di stabilità del flusso Lagrangiano rispetto ad approssimazioni con campi regolari.

Relativamente al sistema di Keyfitz-Kranzer, sono molte le questioni aperte: in particolare si vorrebbe stabilire l'unicità in classi più generali di funzioni (alcuni risultati parziali e congetture sono in [8]). Strettamente legato a questo problema è quello della convergenza del metodo di viscosità artificiale alla soluzione costruita in [7].

REFERENCES

[1] M. Aizenman, *On vector fields as generators of flows: a counterexample to Nelson's conjecture*, Ann. Math., **107** (1978), 287-296.

[2] G. Alberti, *Rank-one properties for derivatives of functions with bounded variation*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, **123** (1993), 239-274.

[3] G. Alberti - L. Ambrosio, *A geometric approach to monotone functions in $\mathbb{R}^n$*, Math. Z., **230** (1999), 259-316.

[4] F. J. ALMGREN, *The theory of varifolds - A variational calculus in the large*, Princeton University Press, 1972.

[5] L. AMBROSIO - N. FUSCO - D. PALLARA, *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*, Oxford Mathematical Monographs, 2000.

[6] L. AMBROSIO, *Transport equation and Cauchy problem for BV vector fields*, In corso di stampa su Inventiones Math..

[7] L. AMBROSIO - C. DE LELLIS, *Existence of solutions for a class of hyperbolic systems of conservation laws in several space dimensions*, International Mathematical Research Notices, **41** (2003), 2205-2220.

[8] L. AMBROSIO - F. BOUCHUT - C. DE LELLIS, *Well-posedness for a class of hyperbolic systems of conservation laws in several space dimensions*, Di prossima pubblicazione su Comm. PDE, disponibile su http://cvgmt.sns.it.

[9] L. AMBROSIO - N. GIGLI - G. SAVARÉ, *Gradient flows in metric spaces and in the Wasserstein space of probability measures*, Libro di prossima pubblicazione a cura di Birkhäuser.

[10] F. BOUCHUT - F. JAMES, *One dimensional transport equation with discontinuous coefficients*, Nonlinear Analysis, **32** (1998), 891-933.

[11] F. BOUCHUT, *Renormalized solutions to the Vlasov equation with coefficients of bounded variation*, Arch. Rational Mech. Anal., **157** (2001), 75-90.

[12] A. BRESSAN, *An ill posed Cauchy problem for a hyperbolic system in two space dimensions*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **110** (2003), 103-117.

[13] I. CAPUZZO DOLCETTA - B. PERTHAME, *On some analogy between different approaches to first order PDE's with nonsmooth coefficients*, Adv. Math. Sci Appl., **6** (1996), 689-703.

[14] A. CELLINA, *On uniqueness almost everywhere for monotonic differential inclusions*, Nonlinear Analysis, TMA, **25** (1995), 899-903.

[15] A. CELLINA - M. VORNICESCU, *On gradient flows*, Journal of Differential Equations, **145** (1998), 489-501.

[16] F. COLOMBINI - N. LERNER, *Uniqueness of continuous solutions for BV vector fields*, Duke Math. J., **111** (2002), 357-384.

[17] F. COLOMBINI - N. LERNER, *Uniqueness of L^∞ solutions for a class of conormal BV vector fields*, Preprint, 2003.

[18] F. COLOMBINI - T. LUO - J. RAUCH, *Uniqueness and nonuniqueness for nonsmooth divergence-free transport*, Preprint, 2003.

[19] C. DAFERMOS, *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*, Springer Verlag, 2000.

[20] N. DE PAUW, *Non unicité des solutions bornées pour un champ de vecteurs BV en dehors d'un hyperplan*, C. R. Math. Sci. Acad. Paris, **337** (2003), 249-252.

[21] R. J. DI PERNA - P. L. LIONS, *Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces*, Invent. Math., **98** (1989), 511-547.

[22] M. HAURAY, *On Liouville transport equation with potential in $BV_{\rm loc}$*, (2003) Di prossima pubblicazione su Comm. in PDE.

[23] M. HAURAY, *On two-dimensional Hamiltonian transport equations with $L^p_{\rm loc}$ coefficients*, (2003) Di prossima pubblicazione su Ann. Nonlinear Analysis IHP.

[24] L. V. KANTOROVICH, *On the transfer of masses*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, **37** (1942), 227-229.

[25] B. L. KEYFITZ - H. C. KRANZER, *A system of nonstrictly hyperbolic conservation laws arising in elasticity theory*, Arch. Rational Mech. Anal., **72** (1980), 219-241.

[26] P. L. LIONS, *Sur les équations différentielles ordinaires et les équations de transport*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I, **326** (1998), 833-838.
[27] G. PETROVA - B. POPOV, *Linear transport equation with discontinuous coefficients*, Comm. PDE, **24** (1999), 1849-1873.
[28] F. POUPAUD - M. RASCLE, *Measure solutions to the liner multidimensional transport equation with non-smooth coefficients*, Comm. PDE, **22** (1997), 337-358.
[29] L. C. YOUNG, *Lectures on the calculus of variations and optimal control theory,* Saunders, 1969.

Scuola Normale Superiore, Pisa
l.ambrosio@sns.it; http://cvgmt.sns.it

Pervenuta in Redazione
il 14 giugno 2004