BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GIANCARLO MAUCERI

Moltiplicatori spettrali per l'operatore di Ornstein-Uhlenbeck

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **7-B** (2004), n.3, p. 563–591.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2004_8_7B_3_563_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2004.

Bollettino U. M. I.
(8) **7**-B (2004), 563-591

Moltiplicatori spettrali per l'operatore di Ornstein-Uhlenbeck.

GIANCARLO MAUCERI (*)

Summary. – *This is a survey of some recent results on spectral multipliers for the Ornstein-Uhlenbeck operator, a natural Laplacian on the Euclidean space endowed with the Gauss measure. The results are discussed in the framework of the general theory of spectral multipliers for generalized Laplacians.*

Sunto. – *Questa è una rassegna di alcuni risultati recenti sui moltiplicatori spettrali dell'operatore di Ornstein-Uhlenbeck, un laplaciano naturale sullo spazio euclideo munito della misura gaussiana. I risultati sono inquadrati nell'ambito della teoria generale dei moltiplicatori spettrali per laplaciani generalizzati.*

1. – Introduzione.

In questa conferenza presenterò alcuni risultati recenti sulla limitatezza L^p dei moltiplicatori spettrali per l'operatore di Ornstein-Uhlenbeck, un Laplaciano «naturale» sullo spazio euclideo munito della misura gaussiana, inquadrandoli nella problematica generale del calcolo funzionale L^p per Laplaciani generalizzati.

Consideriamo un operatore autoaggiunto nonnegativo $\mathcal{L}$ su $L^2(X, \mu)$, dove (X, μ) è uno spazio di misura e sia $\mathcal{L} = \int_0^\infty \lambda \, d\mathcal{P}(\lambda)$ la sua risoluzione spettrale.

(*) Conferenza tenuta a Milano il 12 settembre 2003 in occasione del XVII Congresso U.M.I.

Per il teorema spettrale se M è una funzione Boreliana limitata su $[0, \infty)$ l'operatore

$$M(\mathcal{A}) := \int_0^\infty M(\lambda)\, \mathrm{d}\mathcal{P}(\lambda)$$

è limitato su $L^2(\mu)$.

Diremo che M è un *moltiplicatore spettrale di* L^p *per* $\mathcal{A}$ $(1 \leq p < \infty)$ se $M(\mathcal{A})$ si estende da $L^p \cap L^2(\mu)$ a un operatore limitato su $L^p(\mu)$.

Lo spazio $\mathcal{M}_p(\mathcal{A})$ dei moltiplicatori spettrali di L^p per $\mathcal{A}$ è un'algebra di Banach rispetto al prodotto puntuale e alla norma

$$\|M\|_{\mathcal{M}_p(\mathcal{A})} = |||M(\mathcal{A})|||_p,$$

dove $|||M(\mathcal{A})|||_p$ denota la norma di $M(\mathcal{A})$ come operatore su $L^p(\mu)$. Il problema dei moltiplicatori spettrali consiste nel cercare condizioni necessarie e condizioni sufficienti perché una funzione limitata su $[0, \infty)$ appartenga a $\mathcal{M}_p(\mathcal{A})$.

Per il teorema spettrale l'algebra di Banach $\mathcal{M}_2(A)$ si identifica isometricamente con lo spazio $L^\infty([0, \infty), \mathcal{P})$ delle funzioni su $[0, \infty)$ essenzialmente limitate rispetto alla misura spettrale $\mathcal{P}$. Pertanto la classe dei moltiplicatori spettrali di $L^2(\mu)$ dipende solo dalla classe di equivalenza della misura $\mathcal{P}$. In particolare $\mathcal{M}_2(\mathcal{A})$ non dipende da alcuna proprietà dello spazio di misura (X, μ). Ad esempio, le algebre dei moltiplicatori spettrali di L^2 per il Laplaciano su due spazi molto diversi come lo spazio euclideo e lo spazio iperbolico coincidono entrambe con lo spazio $L^\infty([0, \infty))$ delle funzioni essenzialmente limitate rispetto alla misura di Lebesgue. Quindi, se da una parte il calcolo funzionale L^2 è uno strumento molto flessibile, che si applica a spazi e operatori con proprietà geometriche e algebriche molto diverse, d'altra parte, proprio perché spazi differenti sono indistinguibili da questo punto di vista, parafrasando Hegel, possiamo dire che come l'Assoluto di Schelling il calcolo funzionale L^2 è «la notte in cui tutti i gatti sono grigi».

Dal punto di vista dell'analisi geometrica, che studia come le proprietà analitiche di uno spazio sono influenzate dalla sua geometria, il calcolo funzionale L^p per $p \neq 2$ è molto più interessante, perché l'algebra $\mathcal{M}_p(\mathcal{A})$ riflette proprietà geometriche e algebriche dello spazio (X, μ) e dell'operatore $\mathcal{A}$ in modi che ancora non sono del tutto compresi.

Negli ultimi trent'anni questo problema è stato studiato per vari Laplaciani generalizzati: operatori di Laplace-Beltrami su varietà Riemanniane, sublaplaciani invarianti su gruppi di Lie, operatori di Schrödinger...

Prima di iniziare a discutere questi risultati, devo però rispondere a una domanda fondamentale: a chi interessa? Nel resto di questa introduzione cercherò di fornire alcune motivazioni: i moltiplicatori spettrali hanno utili applicazioni alle equazioni differenziali, alla teoria degli sviluppi in autofunzioni, in teoria del potenziale.

Equazioni differenziali. La soluzione di diversi problemi di Cauchy astratti si esprime mediante funzioni dell'operatore applicate ai dati iniziali. Consideriamo ad esempio il seguente problema di Cauchy per «l'equazione delle onde» omogenea associata a $\mathcal{A}$: determinare una funzione $t \mapsto u(t)$ da $\mathbb{R}$ a $L^2(\mu)$, che soddisfa

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + \mathcal{A} u = 0, & t \in \mathbb{R} \\ u(0) = f \\ \partial_t u(0) = g \end{cases}$$

Se f è nel dominio di $\mathcal{A}$ e g è nel dominio di $\mathcal{A}^{1/2}$, una semplice applicazione del teorema spettrale mostra che la soluzione è data da

$$u(t) = \cos(t\mathcal{A}^{1/2})\, f + t \frac{\sin(t\mathcal{A}^{1/2})}{t\mathcal{A}^{1/2}} g \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,.$$

Perché questa formula risolutiva valga anche quando i dati iniziali sono in $L^p(\mu)$, $p \neq 2$, occorre che gli operatori $\cos(t\mathcal{A}^{1/2})$ e $\frac{\sin(t\mathcal{A}^{1/2})}{t\mathcal{A}^{1/2}}$ si estendano a operatori limitati su $L^p(\mu)$, cioè che le funzioni $\lambda \mapsto \cos(t\lambda^{1/2})$ e $\lambda \mapsto \frac{\sin(t\lambda^{1/2})}{t\lambda^{1/2}}$ siano in $\mathcal{M}_p(\mathcal{A})$.

Considerazioni analoghe si applicano ad altre equazioni classiche della fisica matematica, come l'equazione del calore o l'equazione di Schrödinger.

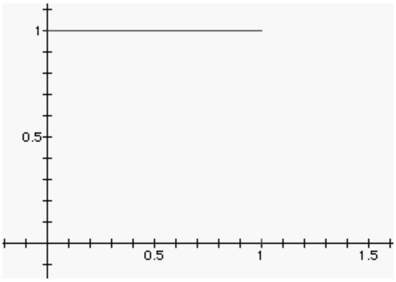
Sommabilità di sviluppi in autofunzioni. Il problema è di ricostruire una funzione f in $L^p(\mu)$ a partire dalle sue proiezioni spettrali $\mathcal{P}([0, R))\, f$. Se f è in $L^2(\mu)$ il teorema spettrale ci dice che

$$\lim_{R \to \infty} \mathcal{P}([0, R))\, f = f \quad \text{ in } L^2(\mu)\,.$$

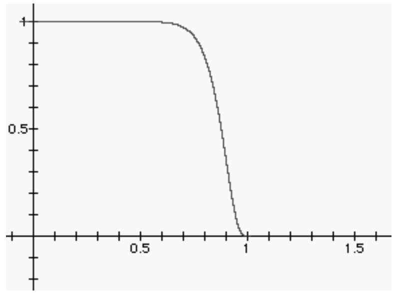
Si noti che il proiettore spettrale è una funzione dell'operatore $\mathcal{A}$. Infatti $\mathcal{P}([0, R)) = \chi_R(\mathcal{A})$, dove $\chi_R(\lambda) = \chi(\lambda/R)$ e χ è la funzione indicatrice dell'intervallo $[0, 1)$.

Se $f \in L^p(\mu)$, $p \neq 2$, in generale $\mathcal{P}([0, R))\, f$ non è nemmeno definito, perché l'operatore $\mathcal{P}([0, R))$ non è limitato su $L^p(\mu)$, a causa della discontinuità della funzione indicatrice χ. Per ovviare a questo inconveniente si sostituisce χ con una funzione più regolare Φ, tale che $\Phi(0) = 1$. Se Φ e le sue dilatate $\Phi_R =$

$\Phi(\cdot/R)$ sono in $\mathcal{M}_p(\mathcal{A})$ le Φ-medie $\Phi_R(\mathcal{A})\, f$, $R > 0$, sono definite per ogni funzione f in $L^p(\mu)$.



χ



Φ

Se

$$\lim_{R \to \infty} \Phi_R(\mathcal{A})\, f = f \quad \text{ in } L^p(\mu) \tag{1.1}$$

si dice che lo sviluppo di f in autofunzioni di $\mathcal{A}$ è Φ-sommabile in $L^p(\mu)$.

Per dimostrare che lo sviluppo di ogni funzione in $L^p(\mu)$ è Φ-sommabile, è sufficiente, e in molti casi anche necessario, provare che la (1.1) vale per ogni f in un sottospazio denso di $L^p(\mu)$ e che

$$\sup_{R > 0} \|\Phi_R\|_{\mathcal{M}_p(\mathcal{A})} < \infty . \tag{1.2}$$

Teoria del potenziale. Gli spazi funzionali che vengono utilizzati nello studio delle equazioni alle derivate parziali ellittiche (spazi di Sobolev, di Besov...) possono essere definiti mediante funzioni del Laplaciano $\varDelta = -\sum_1^d \partial_j^2$. Ad esempio, lo spazio di Sobolev $W^{s,p}(\mathbb{R})^d$, $s \geqslant 0$, è lo spazio di tutte le funzioni f in $L^p(\mathbb{R}^d)$ tali che

$$\|J_s(\varDelta)\, f\|_p < \infty , \tag{1.3}$$

con $J_s(\lambda) = (1+\lambda)^{s/2}$. Lo spazio di Besov $B^s_{p,q}(\mathbb{R})^d$ è lo spazio di tutte le funzioni f in $L^p(\mathbb{R}^d$ tali che

$$\left(\|\Phi(\varDelta)\, f\|_p^q + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{ksq} \|\Psi(2^{-k}\varDelta)\, f\|_p^q\right)^{1/q} < \infty , \tag{1.4}$$

dove Φ e Ψ sono una coppia di funzioni liscie a supporto compatto su $[0, \infty)$ tali che il supporto di Ψ è disgiunto da 0 e

$$\Phi(\lambda^2) + \sum_{k=1}^{\infty} \Psi(2^{-k}\lambda^2) = 1 \qquad \forall \lambda \geqslant 0 .$$

Se J_s, Φ e Ψ sono in $\mathcal{M}_p(A)$, possiamo sostituire il Laplaciano con A in (1.3) e (1.4), definendo così spazi di Sobolev e di Besov «adattati» allo studio dell'operatore A.

2. – Calcolo funzionale differenziabile e calcolo funzionale olomorfo.

Negli ultimi trent'anni il problema dei moltiplicatori spettrali è stato studiato in una grande varietà di contesti e oggi nella letteratura vi è una notevole messe di risultati disponibili. Da tutti questi risultati sembra emergere una dicotomia: da una parte vi sono spazi e operatori che hanno un *calcolo funzionale differenziabile* su L^p, $p \neq 2$, dall'altra spazi e operatori di *p-tipo olomorfo.*

DEFINIZIONE. – Diremo che l'operatore autoaggiunto $\mathcal{A}$ su $L^2(\mu)$ ha *calcolo funzionale differenziabile su* $L^p(\mu)$ se ogni funzione in $C_c^\infty([0, \infty))$ è un moltiplicatore spettrale di $L^p(\mu)$. Diremo invece che $\mathcal{A}$ è di *p-tipo olomorfo* se esiste un punto non isolato λ_0 dello spettro L^2 di $\mathcal{A}$ e un intorno complesso $\mathcal{U}$ di λ_0 tale che ogni funzione M in $\mathcal{M}_p(\mathcal{A})$ si estende a una funzione olomorfa in $\mathcal{U}$.

Per illustrare le differenze tra queste due classi di operatori, considererò due casi modello: il Laplaciano sullo spazio euclideo e sullo spazio iperbolico.

Il Laplaciano sullo spazio euclideo. Denotiamo con $\Delta = -\sum_1^d \partial_j^2$ il Laplaciano sullo spazio euclideo $\mathbb{R}^d$, munito della misura di Lebesgue λ, e sia $\mathcal{F}$ la trasformata di Fourier su $L^2(\lambda)$, definita da

$$\mathcal{F}f(\xi) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\, d\lambda(x).$$

Sia M una funzione limitata su $[0, \infty)$. Dall'analisi di Fourier si ha che coniugando con $\mathcal{F}$ l'operatore $M(\Delta)$ si ottiene l'operatore di moltiplicazione per la funzione $\xi \mapsto M(|\xi|^2)$; cioè

$$\mathcal{F}M(\Delta)\, f(\xi) = M(|\xi|^2)\; \mathcal{F}f(\xi) \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^d \;\; \forall f \in L^2(\lambda).$$

Pertanto l'operatore $M(\Delta)$ è un *moltiplicatore di Fourier radiale* e possiamo applicare la teoria classica di Mihlin-Hörmander per studiarne la limitatezza su $L^p(\lambda)$.

DEFINIZIONE. – Sia α un intero positivo. Si dice che la funzione M soddisfa una condizione di Mihlin di ordine α se $M \in C^\alpha(\mathbb{R}_+)$ e

$$\|M\|_{M_\alpha} = \sup_{\lambda > 0} \max_{0 \leq j \leq \alpha} |\lambda^j D^j M(\lambda)| < \infty \tag{2.1}$$

Grosso modo, possiamo dire che una funzione soddisfa la condizione (2.1) se fino all'ordine α «si comporta come una funzione omogenea di grado 0». Denotiamo con $M_\alpha(\mathbb{R}_+)$ l'insieme delle funzioni che soddisfano la condizione di Mihlin di ordine α su $\mathbb{R}_+$. L'insieme $M_\alpha(\mathbb{R}_+)$ è uno spazio di Banach rispetto alla norma definita da (2.1).

Il classico teorema di Mihlin per i moltiplicatori di Fourier [53], specializzato ai moltiplicatori radiali, si enuncia nel modo seguente.

TEOREMA 2.1. – *Se $M \in M_\alpha(\mathbb{R}_+)$ con $\alpha > d/2$ allora $M \in \mathcal{M}_p(\Delta)$ per ogni p in* $(1, \infty)$.

Hörmander in [36] ha dato una formulazione più debole della condizione di Mihlin, in cui l'estremo superiore su $\mathbb{R}_+$ è sostituito dalla norma L^2 su intervalli diadici. La condizione può essere formulata in modo più preciso (ma più tecnico), sostituendo la norma L^2 delle derivate con una norma di Sobolev di ordine reale positivo α. Per ogni numero reale positivo α denotiamo con $H^\alpha(\mathbb{R})$ lo spazio di Sobolev di ordine α su $\mathbb{R}$, cioè lo spazio di tutte le funzioni f in $L^2(\mathbb{R})$ tali che

$$\|f\|_{H^\alpha} = \left(\int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^\alpha \, |\mathcal{F}f(\xi)|^2 \, d\lambda(\xi) \right)^{1/2} < \infty ,$$

dove $\mathcal{F}f$ denota la trasformata di Fourier di f. Sia $\varphi : \mathbb{R} \to [0, 1]$ una funzione liscia, con supporto in [1/4, 4] che è identicamente uno su [1/2, 2].

DEFINIZIONE. – Diremo che una funzione $M : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ soddisfa una *condizione di Hörmander di ordine* α se

$$\sup_{t>0} \||\varphi(\cdot)\, M(t\cdot)\||_{H^\alpha} < \infty . \tag{2.2}$$

Non è difficile verificare che la condizione (2.2) non dipende dalla scelta del *cut-off* φ e che una funzione che verifica la condizione (2.1) per α intero verifica anche la (2.2).

Utilizzando la condizione di Hörmander, possiamo formulare il Teorema 2.1 nel modo seguente, più preciso: se la funzione M soddisfa una condizione di Hörmander di ordine non intero $\alpha > d/2$ allora $M \in \mathcal{M}_p(\Delta)$ per ogni p in $(1, \infty)$.

L'operatore $M(\Delta)$, al pari di Δ, commuta con le traslazioni. Quindi è un operatore di convoluzione con un nucleo k, che, per il teorema del nucleo di Schwartz, è una distribuzione temperata su $\mathbb{R}^d$. Il punto principale nella dimostrazione del Teorema 2.1 consiste nel dimostrare che k è un nucleo di Calderón-Zygmund; cioè una funzione localmente integrabile nel complementare dell'origine che soddisfa la stima

$$\int_{|y| > 2|x|} |k(x-y) - k(x)| \, d\lambda(x) \qquad \forall y \in \mathbb{R}^d. \tag{2.3}$$

Nella dimostrazione di questa stima gioca un ruolo essenziale il fatto che il volume della palla di centro l'origine e raggio R cresce polinomialmente; precisamente

$$\lambda(B_R(0)) \leqslant CR^d \qquad \forall R > 0\,. \tag{2.4}$$

Il Teorema 2.1 implica (banalmente) che ogni funzione in $C_c^\infty([0,\infty))$ è un moltiplicatore spettrale di $L^p(\lambda)$ e quindi Δ ha un calcolo funzionale differenziabile.

DEFINIZIONE. – Diremo che un operatore autoaggiunto $\mathcal{A}$ su $L^2(\mu)$ ha un *calcolo funzionale di tipo Mihlin* (*o di tipo Hörmander*) su $L^p(\mu)$ se ogni funzione M che soddisfa una condizione di Mihlin (o di Hörmander) di ordine opportuno è un moltiplicatore spettrale di $L^p(\mu)$.

Oltre al Laplaciano sullo spazio euclideo molti altri operatori hanno calcolo funzionale di tipo Hörmander su L^p, per ogni p in $(1,\infty)$. Ad esempio, consideriamo un gruppo di Lie G a crescita polinomiale di volume, per cui cioè vale una stima analoga alla (2.4) in cui la misura di Lebesgue è sostituita dalla misura invariante per traslazioni sinistre λ_G (la misura di Haar sinistra), la palla $B_R(e)$ dalla palla di raggio R e centro l'identità e rispetto a una qualunque struttura Riemanniana invariante sinistra e la dimensione d da un intero positivo Q (che in genere è maggiore della dimensione di G come varietà differenziabile). Siano $X_1, \ldots, X_k$ dei campi vettoriali invarianti rispetto alle traslazioni destre, che soddisfano la *condizione di Hörmander*, cioè che generano con i loro commutatori lo spazio tangente a G in ogni punto. L'operatore differenziale del secondo ordine

$$\mathcal{L} = -\sum_{j=1}^{k} X_j^2$$

è detto un «sublaplaciano» su G; $\mathcal{L}$ è ipoellittico e autoaggiunto su $L^2(\lambda_G)$. Esempi ben noti sono il sublaplaciano sul gruppo di Heisenber, o più in generale sui gruppi di Carnot-Caratheodòry. Teoremi di moltiplicatori analoghi al Teorema 2.1 sul gruppo di Heisenberg sono stati dimostrati da L. De Michele e G. Mauceri [21], [22], da Mauceri [45] [46], da A. Hulanicki e E. Stein [25]. Più recentemente un risultato ottimale per quanto riguarda l'ordine critico di differenziabilità è stato ottenuto indipendentemente da D. Müller e E. Stein [54] e da W. Hebisch [31] (si veda anche [18], per un approccio diverso). Il teorema di moltiplicatori sui gruppi di Carnot-Caratheodóry è stato dimostrato indipendentemente da M. Christ [12] e da G. Mauceri e S. Meda [47]. Successivamente A. Sikora ne ha dato una dimostrazione semplice ed elegante, sfruttando la proprietà di velocità di propagazione finita per l'equazione delle onde [60], [61]. Infine, G. Alexopoulos ha dimostrato un teorema di moltiplicatori per sublaplaciani invarianti su un qualunque gruppo di Lie a crescita polinomiale di volume [1].

Il Laplaciano sullo spazio iperbolico. Per semplicità di esposizione mi limito a considerare lo spazio iperbolico bidimensionale sui reali $\boldsymbol{H}^2(\mathbb{R})$, anche se i risultati di cui parlerò valgono per gli spazi iperbolici di dimensione arbitraria sui reali, sui complessi, sui quaternioni e sugli ottetti di Cayley (molti dei risultati valgono più in generale sugli spazi simmetrici Riemanniani non compatti). Un modello del piano iperbolico $\boldsymbol{H}^2(\mathbb{R})$ è il semipiano superiore $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$, munito della metrica Riemanniana $\mathrm{d}s^2 = y^{-2}(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)$. La misura Riemanniana corrispondente è $\mathrm{d}\mu(x, y) = y^{-2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. L'operatore di Laplace-Beltrami $\Delta_{\boldsymbol{H}^2} = -\operatorname{div}\operatorname{grad}$ è essenzialmente autoaggiunto su $L^2(\mu)$ e la sua espressione nelle coordinate (x, y) è

$$\Delta_{\boldsymbol{H}^2} = -y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial y}\right).$$

Il piano iperbolico è un modello della geometria di Lobatchevski. È uno spazio a curvatura costante negativa e a crescita esponenziale di volume; infatti si ha

$$\mu(B_R(x, y)) \sim \pi e^r \qquad \text{per } r \to \infty \qquad \forall (x, y) \in \boldsymbol{H}^2(\mathbb{R}).$$

La monografia [35] di S. Helgason è un buon riferimento per l'analisi sullo spazio iperbolico e più in generale sugli spazi simmetrici Riemanniani.

L'analisi di $\Delta_{\boldsymbol{H}^2}$ è molto diversa dall'analisi del Laplaciano sullo spazio euclideo. Ad esempio, mentre lo spettro $\sigma_p(\Delta)$ del Laplaciano euclideo, considerato come operatore chiuso su $L^p(\lambda)$, coincide con la semiretta $[0, \infty)$ per ogni p in $[1, \infty]$, lo spettro del Laplaciano iperbolico varia con p. In particolare, per $p \neq 2$, $\sigma_p(\Delta_{\boldsymbol{H}^2})$ è una regione del piano complesso che ha interno non vuoto. Questo fatto si riflette nelle proprietà dei moltiplicatori spettrali.

TEOREMA 2.2. – (*i*) *Lo spettro* $\sigma_2(\Delta_{\boldsymbol{H}^2})$ *su* L^2 *è la semiretta* $[1/4, \infty)$. *Se* $p \neq 2$

$$\sigma_p(\Delta_{\boldsymbol{H}^2}) = \left\{x + iy \in \mathbb{C} : x \geq \frac{y^2}{(2/p - 1)^2} + \frac{1}{pp'}\right\}.$$

(*ii*) *Sia* $M \in \mathcal{M}_p(\Delta_{\boldsymbol{H}^2})$. *Se* $p \neq 2$ *allora* M *è la restrizione a* $[1/4, \infty)$ *di una funzione olomorfa e limitata nell'interno di* $\sigma_p(\Delta_{\boldsymbol{H}^2})$. *Quindi il Laplaciano iperbolico è un operatore di* p*-tipo olomorfo per ogni* $p \neq 2$.

Il primo enunciato del Teorema 2.2 è un caso particolare di un teorema di N. Lohoué e T. Rychener [44]. il secondo enunciato è un caso particolare di un risultato di J. L. Clerc e E. Stein, che riguarda il Laplaciano (e più in generale i moltiplicatori della trasformata di Fourier sferica) sugli spazi simmetrici Riemanniani non compatti [11].

Recentemente sono stati trovati altri esempi di operatori di p-tipo olomorfo [10], [42], [34]. Tutti questi esempi riguardano operatori su spazi a crescita esponenziale di volume.

Per quanto riguarda condizioni sufficienti per moltiplicatori spettrali di L^p su varietà a crescita esponenziale di volume esiste una letteratura piuttosto ampia. Già nell'articolo citato [11], Clerc e Stein hanno dimostrato che, se lo spazio simmetrico X è di tipo complesso, esiste un intero $\alpha = \alpha(X)$ tale che ogni funzione M olomorfa e limitata su $\sigma_p(\varDelta_X)$ che soddisfa la condizione

$$\max_{j=0,\,\dots,\,\alpha}(1+|z|)^j\,|\partial_z^j M(z)| \leqslant C \qquad \forall z\in\sigma_p(\varDelta_X) \tag{2.5}$$

è un moltiplicatore spettrale di L^p, per $1<p<\infty$. Anche in questo caso il risultato è conseguenza di un teorema più generale che riguarda i moltiplicatori di Fourier sferici sullo spazio X. Successivamente il risultato di Clerc e Stein è stato dimostrato per altri spazi simmetrici da R. Stanton e P. Thomas [62], N. Lohoué e J. P. Anker [4], [2], [3]. Forme precise della condizione (2.5) sono state date da S. Giulini, G. Mauceri, S. Meda [28] e da A. Ionescu [37], [38].

In questo contesto è degno di nota anche un risultato di M. Taylor sui moltiplicatori spettrali del Laplaciano su una varietà Riemanniana completa X con geometria limitata [65]. Taylor suppone che la crescita del volume soddisfi una stima del tipo

$$\mathrm{Vol}\,(B_R(p)) \leqslant C(1+R)^m e^{\kappa R} \qquad \forall R>0$$

per qualche $m,\ \kappa\geqslant 0$ e che lo spettro L^2 del Laplaciano $\varDelta_X$ sia contenuto nell'intervallo $[a,\ \infty)$, per qualche $a\geqslant 0$. Posto $W=\kappa|2/p-1|$, con p in $(1,\ \infty)$, Taylor dimostra che, se M è una funzione olomorfa e limitata nella regione

$$\varOmega_p = \left\{x+iy\in\mathbb{C} : x > \frac{y^2}{(2W)^2}+a-W^2\right\},$$

che soddisfa ivi una condizione del tipo (2.5), allora M è in $\mathcal{M}_p(\varDelta_X)$.

In quasi tutti i lavori sulle condizioni sufficienti si sfrutta l'olomorfia del moltiplicatore M per «addomesticare» la crescita esponenziale del volume. A grandi linee, l'argomento è il seguente: per il teorema del nucleo di Schwartz l'operatore $M(\varDelta_X)$ è un operatore integrale singolare con un nucleo k che è una distribuzione su $X\times X$, che coincide con una funzione localmente integrabile nel complementare della diagonale. Con una partizione dell'unità si spezza l'operatore in una parte locale, ottenuta localizzando il nucleo k in un intorno della diagonale, e nella parte restante, che chiameremo parte globale. Poiché localmente la varietà X è euclidea, la limitatezza su L^p della parte locale si ottiene utilizzando la teoria classica degli integrali singolari di Calderòn-

Zygmund sugli spazi di tipo omogeneo [13]. Per trattare la parte globale, sfruttando l'olomorfia del moltiplicatore si dimostra che quando il punto (p, q) si allontana dalla diagonale il nucleo $k(p, q)$ decade abbastanza rapidamente da compensare la crescita esponenziale del volume delle palle. Quindi la parte globale dell'operatore è limitata su L^1. Il risultato desiderato segue per interpolazione con la stima L^2, per $1 < p < 2$, e per dualità per $p > 2$.

3. – Calcolo funzionale, crescita di volume e spettro L^p.

Tutti gli esempi precedenti di operatori con calcolo funzionale differenziabile su L^p riguardano varietà a crescita polinomiale di volume. Viceversa tutti gli esempi di operatori di p-tipo olomorfo sono su varietà a crescita esponenziale; anzi, come abbiamo osservato, su questa varietà l'olomorfia del moltiplicatore gioca un ruolo nel compensare la crescita esponenziale del volume delle palle geodetiche. Agli inizi degli anni novanta queste osservazioni avevano indotto gli specialisti a ritenere che la dicotomia tra operatori con calcolo funzionale differenziabile e operatori di p-tipo olomorfo corrispondesse alla dicotomia tra spazi a crescita polinomiale e spazi a crescita esponenziale di volume. Fu quindi abbastanza sorprendente la scoperta da parte di W. Hebisch di un particolare Laplaciano invariante destro $\mathcal{L}$ su dei gruppi di Lie a crescita esponenziale di volume che aveva un calcolo funzionale differenziabile su L^p [30]. Successivamente M. Cowling, S. Giulini, G. Mauceri e A. Hulanicki [17] hanno esteso il risultato di Hebisch, ottenendo un calcolo funzionale su L^p di tipo Hörmander per un Laplaciano invariante destro su una classe più ampia di gruppi a crescita esponenziale e F. Astengo ha dimostrato lo stesso risultato per gli spazi armonici di Damek-Ricci [6]. Recentemente W. Hebisch e T. Steger, hanno ottenuto una versione più precisa del calcolo di Mihlin-Hörmander, per una classe meno generale di gruppi [25].

L'esempio più semplice di gruppo in questa classe è il gruppo affine della retta, cioè il gruppo moltiplicativo delle matrici della forma

$$\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad x \in \mathbb{R},\ y > 0 .$$

Il «Laplaciano» $\mathcal{L}$ è l'operatore $\partial_x^2 + (x\partial_x + y\partial_y)^2$. L'operatore $\mathcal{L}$ è invariante destro ed è quindi autoaggiunto rispetto alla misura di Haar sinistra $d\mu(x, y) = y^{-2}\, dx\, dy$.

Il gruppo G si identifica in modo naturale come varietà Riemanniana con il piano iperbolico $\boldsymbol{H}^2(\mathbb{R})$. In questa identificazione la misura Riemanniana su $\boldsymbol{H}^2(\mathbb{R})$ corrisponde alla misura di Haar sinistra λ_G su G e il Laplaciano $\Delta_{\boldsymbol{H}^2}$ corrisponde a un operatore invariante sinistro e autoaggiunto su $L^2(\lambda_G)$, che per semplicità denoterò ancora con $\Delta_{\boldsymbol{H}^2}$. Esiste una relazione molto stretta tra questo operatore e l'operatore $\mathcal{L}$: in un senso tecnico preciso e a meno di una traslazione dello spettro, $\mathcal{L}$ è la versione invariante destra di $\Delta_{\mathbf{H}^2}$ (1).

Questo risultato mostra che la classe dei moltiplicatori spettrali di un Laplaciano non è determinata unicamente dalle proprietà geometriche dello spazio; anche le proprietà algebriche dell'operatore (in questo caso il fatto di commutare con le traslazioni destre piuttosto che con quelle sinistre) giocano un ruolo.

Recentemente Ludwig, Müller e Hebisch, negli articoli già citati [42] e [34], hanno esplorato le relazioni tra calcolo funzionale di p-tipo olomorfo per Laplaciani invarianti destri su certi gruppi di Lie G a crescita esponenziale e una proprietà dell'algebra di Lie del gruppo, introdotta da J. Boidol [8] in un contesto differente, che caratterizza l'asimmetria dell'algebra di convoluzione $L^1(\lambda_G)$.

Un'altra domanda naturale è la seguente: che relazioni esistono tra il calcolo funzionale su L^p e lo spettro L^p di un operatore? Per rispondere a questa domanda restringiamo la nostra attenzione a una classe particolare di operatori. Supponiamo che $\mathcal{A}$ sia un operatore autoaggiunto e non negativo. Allora $-\mathcal{A}$ genera un semigruppo fortemente continuo di contrazioni $\{e^{-t\mathcal{A}}: t>0\}$ su $L^2(\mu)$, definito spettralmente da

$$e^{-t\mathcal{A}} = \int_0^\infty e^{-t\lambda}\, \mathrm{d}\mathcal{P}(\lambda) \qquad \forall t>0\,.$$

Si dice che $-\mathcal{A}$ genera una famiglia coerente di semigruppi sugli spazi $L^p(\mu)$ se per ogni p in $[1,\infty)$ la restrizione di $e^{-t\mathcal{A}}$ a $L^p\cap L^2(\mu)$ si estende a un operatore limitato $\mathcal{T}_p(t)$ su $L^p(\mu)$ tale che $\sup_{0<t<T}\|\mathcal{T}_p(t)\|_p<\infty$ per ogni $T>0$. La famiglia $\{\mathcal{T}_p(t): t>0\}$ è allora un semigruppo fortemente continuo su $L^p(\mu)$ per ogni p in $[1,\infty)$. Denotiamo con $-\mathcal{A}_p$ il suo generatore infinitesimo. Per uniformità di notazione poniamo $\mathcal{T}_2(t)=e^{-t\mathcal{A}}$ e $\mathcal{A}_2=\mathcal{A}$. L'operatore $\mathcal{A}_p$ è chiuso e densamente definito su $L^p(\mu)$. Denotiamo con $\mathcal{A}_p^*$ il suo aggiunto, cioè l'operatore su $L^{p'}(\mu)$ definito da

$$\int \mathcal{A}_p^*\, f\bar{g}\, \mathrm{d}\mu = \int f\, \overline{\mathcal{A}_p g}\, \mathrm{d}\mu \qquad \forall f\in L^p(\mu),\ g\in L^{p'}(\mu)\,.$$

Osserviamo che poiché $\{\mathcal{T}_2(t): t>0\}$ è autoaggiunto su $L^2(\mu)$, si ha che $\mathcal{T}_p^*(t)=\mathcal{T}_{p'}(t)$, per ogni $t>0$, e quindi $\mathcal{A}_p^*=\mathcal{A}_{p'}$, per $1<p<\infty$. Nel seguito, se $-\mathcal{A}$ genera una famiglia coerente di semigruppi sugli spazi $L^p(\mu)$, denote-

(1) Gli operatori $\mathcal{L}$ e $\Delta_{\mathbf{H}^2}-\frac{1}{4}\mathcal{I}$ sono l'immagine di uno stesso elemento dell'algebra inviluppante di G, sotto l'azione delle rappresentazioni regolari sinistra e destra, rispettivamente. Si veda [16] per una discussione della relazione tra i due operatori nel contesto più generale degli spazi dimmetrici Riemanniani non compatti.

remo con $\sigma_p(\mathcal{A})$ e con $\varrho_p(\mathcal{A})$ lo spettro e l'insieme risolvente dell'operatore $\mathcal{A}_p$, rispettivamente.

PROPOSITION 3.1. – *Sia $\mathcal{A}$ un operatore non negativo su $L^2(\mu)$. Se $-\mathcal{A}$ genera una famiglia coerente di semigruppi su $L^p(\mu)$ e $\varrho_p(\mathcal{A}) \cap \varrho_2(\mathcal{A})$ è connesso allora $\sigma_2(\mathcal{A}) \subseteq \sigma_p(\mathcal{A})$.*

DIMOSTRAZIONE. – Osserviamo che anche $\varrho_p(\mathcal{A})$ è connesso, perché $\sigma_2(\mathcal{A}) \subseteq [0, \infty)$. Per un teorema di Phillips [66], l'insieme risolvente di $\mathcal{A}_p$ coincide con l'insieme risolvente di $\mathcal{A}_p^* = \mathcal{A}_{p'}$, ovvero $\varrho_p(\mathcal{A}) = \varrho_{p'}(\mathcal{A})$. Quindi $\varrho_p(\mathcal{A}) \cap \varrho_{p'}(\mathcal{A}) = \varrho_p(\mathcal{A})$ è connesso. Pertanto, per [5, Prop. 2.2], se $\lambda \in \varrho_p(\mathcal{A})$ i risolventi $R(\lambda, \mathcal{A}_p)$ e $R(\lambda, \mathcal{A}_{p'})$ coincidono su $L^p \cap L^{p'}(\mu)$. Quindi, l'operatore $R(\lambda, \mathcal{A}_p)$ è limitato su $L^2(\mu)$ per il teorema di interpolazione di Riesz-Thorin. Inoltre, $R(\lambda, \mathcal{A}_p)$ coincide con $R(\lambda, \mathcal{A}_2)$ su $L^p \cap L^2(\mu)$, perché $\varrho_p(\mathcal{A}) \cap \varrho_2(\mathcal{A})$ è connesso. Per [5, Prop. 2.3] ne segue che $\lambda \in \varrho_2(\mathcal{A})$. Questo dimostra che $\sigma_2(\mathcal{A}) \subseteq \sigma_p(\mathcal{A})$. ■

TEOREMA 3.2. – *Se $\mathcal{A}$ ha un calcolo funzionale di tipo Hörmander allora $-\mathcal{A}$ genera una famiglia coerente di semigruppi sugli spazi $L^p(\mu)$ e $\sigma_2(\mathcal{A}) \subseteq \sigma_p(\mathcal{A}) \subset [0, \infty)$.*

DIMOSTRAZIONE. – Per ogni $t > 0$ la funzione $\lambda \mapsto e_t(\lambda) = e^{-t\lambda}$ soddisfa delle condizioni di Hörmander di ogni ordine, uniformemente rispetto a t. Pertanto $\{e_t \colon T > 0\}$ è un sottoinsieme limitato dello spazio di Banach $\mathcal{M}_p(\mathcal{A})$. Quindi, le restrizioni a $L^p \cap L^2(\mu)$ degli operatori $e_t(\mathcal{A})$, $t > 0$, si estendono a degli operatori uniformemente limitati $\mathcal{T}_p(t)$ su $L^p(\mu)$ per ogni p in $(1, \infty)$. Questo dimostra che $-\mathcal{A}$ genera una famiglia coerente di semigruppi sugli spazi $L^p(\mu)$.

Sia λ_0 un numero complesso che non è in $[0, \infty)$. La funzione $\lambda \mapsto M_{\lambda_0}(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^{-1}$ soddisfa delle condizioni di Hörmander di ogni ordine. Quindi la restrizione dell'operatore $M_{\lambda_0}(\mathcal{A})$ a $L^p \cap L^2(\mu)$ si estende a un operatore limitato $M_{\lambda_0}^{(p)}$ su $L^p(\mu)$. Per il teorema spettrale, $M_{\lambda_0}^{(p)}$ coincide con il risolvente $\mathcal{R}_2(\lambda_0, \mathcal{A})$ di $\mathcal{A}$ su $L^p \cap L^2(\mu)$. Pertanto, per [5, Prop. 2.3], $\lambda_0 \in \varrho_p(\mathcal{A})$ e $M_{\lambda_0}^{(p)}(\mathcal{A}) = \mathcal{R}_p(\lambda_0, \mathcal{A})$. Questo prova che $\sigma_p(\mathcal{A}) \subset [0, \infty)$. Quindi $\varrho_p(\mathcal{A}) \cap \varrho_2(\mathcal{A})$ è connesso e $\sigma_2(\mathcal{A}) \subseteq \sigma_p(\mathcal{A})$ per la Proposizione 3.1. ■

TEOREMA 3.3. – *Sia $\mathcal{A}$ un operatore autoaggiunto e non negativo su $L^2(\mu)$, che genera una famiglia coerente di semigruppi su $L^p(\mu)$. Supponiamo che $\varrho_p(\mathcal{A}) \cap \varrho_2(\mathcal{A})$ sia connesso. Se $\mathcal{A}$ è di p-tipo olomorfo e Ω è un intorno aperto complesso di un punto non isolato di $\sigma_2(\mathcal{A})$ tale che ogni moltiplicatore M in $\mathcal{M}_p(\mathcal{A}) \cap C_\infty(\mathbb{R})$ si estende analiticamente a una funzione olomorfa su Ω, allora $\overline{\Omega} \subset \sigma_p(\mathcal{A})$.*

DIMOSTRAZIONE. – Sia z in $\Omega \backslash \sigma_2(\mathcal{A})$ e consideriamo il moltiplicatore M definito da $M(\lambda) = (z-\lambda)^{-1}$. Allora $M(\mathcal{A}) = R(z, \mathcal{A}_2)$. Supponiamo, per assurdo, che $z \in \varrho_p(\mathcal{A})$. Per la Proposizione 3.1 abbiamo che $\varrho_p(\mathcal{A}) \subseteq \varrho_2(\mathcal{A})$. Quindi $\varrho_p(\mathcal{A}) \cap \varrho_2(\mathcal{A}) = \varrho_p(\mathcal{A})$ è connesso. Per [5, Prop. 2.3], $R(z, \mathcal{A}_p) = R(z, \mathcal{A}_2) = M(\mathcal{A})$. Questo prova che $M \in \mathcal{M}_p(\mathcal{A}) \cap C_\infty(\mathbb{R})$. Pertanto M si estende per continuazione analitica a una funzione olomorfa su Ω. Ma questo è impossibile, perché M ha un polo in z che appartiene a Ω. La conclusione segue, perché $\sigma_p(\mathcal{A})$ è chiuso. ■

OSSERVAZIONE. – La dimostrazione del Teorema 3.3 si trova in [42], senza l'ipotesi che $\varrho_p(\mathcal{A}) \cap \varrho_2(\mathcal{A})$ sia connesso. Tuttavia, il seguente controesempio mostra che non si può fare a meno di tale ipotesi nei Teoremi 3.1 e 3.3. Sia μ la misura su $\mathbb{R}$ definita da $d\mu(x) = e^{-2x}dx$. Sia $\mathcal{A} = -D^2 + 2D$ l'operatore su $L^2(\mu)$ il cui dominio è lo spazio delle funzioni f in $L^2(\mu)$ tali che $\mathcal{A}f$, inteso nel senso delle distribuzioni, è in $L^2(\mu)$. L'operatore $\mathcal{A}$ è autoaggiunto su $L^2(\mu)$ e genera una famiglia coerente di semigruppi di contrazione su $L^p(\mu)$, perché è l'operatore associato alla forma di Dirichlet

$$Q(f) = \int |Df|^2 d\mu .$$

In [33] è stato dimostrato che $\mathcal{A}$ è di p-tipo olomorfo per ogni p in $[1, \infty)$. Più precisamente, se $p \neq 2$ ogni moltiplicatore spettrale in $\mathcal{M}_p(\mathcal{A})$ ha continuazione analitica a una funzione olomorfa e limitata nella regione parabolica

$$\boldsymbol{P}_{|2/p-1|} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > \frac{y^2}{4 \sin^2 \phi_p^*} + \cos^2 \phi_p^* \right\},$$

dove $\phi_p^* = \arcsin(|2/p - 1|)$. Per ogni p in $[1, \infty)$ sia $\mathcal{U}_p \colon L^p(dx) \to L^p(\mu)$ l'isometria definita da $\mathcal{U}_p f(x) = \exp\left(\frac{2}{p}x\right) f(x)$ e denotiamo con $\widetilde{\mathcal{A}}$ l'operatore $\mathcal{U}_p^{-1} \mathcal{A} \, \mathcal{U}_p$. Allora

$$\widetilde{\mathcal{A}} = -D^2 + 2\left(1 - \frac{2}{p}\right) Df + \frac{4}{pp'}$$

è un operatore chiudibile su $L^p(dx)$ e $\sigma_p(\mathcal{A}) = \sigma_p(\widetilde{\mathcal{A}})$. Inoltre

$$\mathcal{F}(\widetilde{\mathcal{A}} f)(\xi) = \left(\xi^2 + 2\left(1 - \frac{2}{p}\right) i\xi + \frac{4}{pp'} \right) \mathcal{F}f(\xi)$$

per ogni funzione f nello spazio di Schwartz. In particolare, per $p = 2$, $\mathcal{F}\widetilde{\mathcal{A}}$ è l'operatore di moltiplicazione per il polinomio $\xi^2 + 1$. Quindi $\sigma_2(\widetilde{\mathcal{A}}) = [1, \infty)$. Inoltre, con una semplice applicazione del teorema di Hörmander al moltiplicatore di Fourier $\left(\xi^2 + 2\left(1-\frac{2}{p}\right)i\xi + \frac{4}{pp'}\right)^{-1}$ si vede che

$$\sigma_p(\widetilde{\mathcal{A}}) = \left\{\xi^2 + 2\left(1-\frac{2}{p}\right)i\xi + \frac{4}{pp'} : \xi \in \mathbb{R}\right\} = \partial \boldsymbol{P}_{|2/p-1|}.$$

Questo dimostra che se $p \neq 2$ allora $\varrho_p(\mathcal{A}) \cap \varrho_2(\mathcal{A})$ non è connesso, $\sigma_2(\mathcal{A})$ non è contenuto in $\sigma_p(\mathcal{A})$ e $\sigma_p(\mathcal{A})$ non contiene la regione $\boldsymbol{P}_{|2/p-1|}$ di olomorfia dei moltiplicatori spettrali di $L^p(\mu)$.

I Teoremi 3.2 e 3.3 mostrano che le proprietà spettrali dell'operatore su L^p sono influenzate dal tipo del suo calcolo funzionale su L^p. Viceversa, è naturale chiedersi se è possibile dedurre dalle proprietà dello spettro L^p di un operatore delle informazioni sul calcolo funzionale su L^p. Ad esempio, se $\sigma_p(\mathcal{A}) = \sigma_2(\mathcal{A})$ per ogni p in $(1, \infty)$, possiamo dire che $\mathcal{A}$ ha un calcolo funzionale di tipo Mihlin-Hörmander? In generale questo non è vero, come vedremo esaminando il caso dell'operatore di Ornstein-Uhlenbeck. Tuttavia il problema rimane aperto per Laplaciani invarianti su gruppi di Lie.

4. – L'operatore di Ornstein-Uhlenbeck.

Consideriamo lo spazio euclideo finito-dimensionale $\mathbb{R}^d$, munito della misura gaussiana $d\gamma(x) = \pi^{-d/2} e^{-|x|^2} dx$. Per i nostri scopi l'operatore di Ornstein-Uhlenbeck è l'operatore $\mathcal{L}$ associato alla forma di Dirichlet rispetto alla misura gaussiana ([2]). In altri termini $\mathcal{L}$ è definito come l'operatore autoaggiunto su $L^2(\gamma)$ tale che

$$\langle \mathcal{L}f, f\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f(x)|^2 \, d\gamma(x) \qquad \forall f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d).$$

Quindi $\mathcal{L}$ è un «laplaciano» naturale sullo spazio di misura $(\mathbb{R}^d, \gamma)$. Una sempli-

([2]) È opportuno osservare che, nella letteratura sull'argomento, con le parole «operatore di Ornstein-Uhlenbeck» si intende un'intera classe di operatori, a cui $\mathcal{L}$ appartiene, che sono definiti come i generatori dei semigruppi delle probabilità di transizione associate alla perturbazione di un sistema dinamico lineare mediante un moto Browniano. Questo, unito al fatto che essi possono essere definiti anche nel contesto di uno spazio di Hilbert gaussiano di dimensione infinita, spiega perché da diversi anni questi operatori sono al centro dell'interesse di molti ricercatori. Poiché la letteratura sull'argomento è molto vasta, mi limito a rinviare il lettore interessato alla monografia di G. Da Prato e J. Zabcyk [19], per diversi aspetti dell'analisi dell'operatore di Ornstein-Uhlenbeck inteso in questo senso più generale. La scelta qui fatta di considerare solo l'operatore $\mathcal{L}$ è dettata dall'esigenza che l'operatore sia autoaggiunto rispetto alla misura gaussiana. Infatti, si può dimostrare che un operatore di Ornstein-Uhlenbeck, inteso nel senso generale, che sia autoaggiunto rispetto al prodotto interno definito dalla misura invarainte, può essere ridotto essenzialmente alla forma (4.1) mediante coniugazione con un cambiamento di variabile [9], [51].

ce integrazione per parti mostra che

$$\mathcal{L}f = -\frac{1}{2}\Delta f + x\cdot\nabla f \qquad \forall f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d). \tag{4.1}$$

Poiché $\mathcal{L}$ è un operatore autoaggiunto e non negativo, esso genera un semigruppo fortemente continuo di contrazioni $e^{-t\mathcal{L}}$, $t \geq 0$, su $L^2(\gamma)$, detto *semigruppo di Ornstein-Uhlenbeck.* Il semigruppo di Ornstein-Uhlenbeck è un *semigruppo simmetrico di diffusione*; cioè

1) ciascun operatore $e^{-t\mathcal{L}}$ è autoaggiunto su $L^2(\gamma)$;

2) la restrizione del semigruppo a $L^p \cap L^2(\gamma)$ si estende a un semigruppo di contrazioni su $L^p(\gamma)$, per ogni p in $[1, \infty]$, che preserva la positività e le costanti ed è fortemente continuo per $p < \infty$.

La monografia di N. Bakry [7] è un buon riferimento per queste e molte altre proprietà del semigruppo di Ornstein-Uhlenbeck. Il generatore $\mathcal{L}_p$ del semigruppo su $L^p(\gamma)$ coincide con la chiusura della restrizione di $\mathcal{L}$ allo spazio delle funzioni lisce a supporto compatto. Pertanto, con un piccolo abuso di notazione, denoteremo con $\mathcal{L}$ sia l'operatore definito da (4.1) su $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ sia le sue chiusure in $L^p(\gamma)$, per ogni p in $[1, \infty)$.

Lo spettro di $\mathcal{L}$ su $L^2(\gamma)$ è discreto e l'insieme dei suoi autovalori è l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri interi non negativi, mentre le autofunzioni di $\mathcal{L}$ sono i polinomi di Herminte in d variabili. La risoluzione spettrale di $\mathcal{L}$ assume quindi la forma

$$\mathcal{L} = \sum_{n=0}^{\infty} n\mathcal{P}_n,$$

dove $\mathcal{P}_n$ è il proiettore ortogonale sullo spazio generato dai polinomi di Hermite di grado n. In particolare $\mathcal{P}_0$ è il proiettore sulle costanti ed è limitato su $L^p(\gamma)$ per ogni p in $[1, \infty]$. Invece i proiettori $\mathcal{P}_n$, $n \geq 1$, sono limitati su $L^p(\gamma)$ solo per p in $(1, \infty)$.

Le proprietà spettrali di $\mathcal{L}$, come operatore chiuso su $L^p(\gamma)$ sono riassunte dal seguente teorema (vedi [20]).

TEOREMA 4.1. – *Se $1 < p < \infty$ lo spettro di $\mathcal{L}$ come operatore su $L^p(\gamma)$ è $\mathbb{N}$. Lo spettro di $\mathcal{L}$ come operatore su $L^1(\gamma)$ è il semipiano destro $\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\lambda \geq 0\}$; ogni numero complesso λ con $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ è un autovalore.*

Recentemente G. Metafune, D. Pallara e E. Priola hanno esteso questo risultato, determinando lo spettro sugli spazi L^p rispetto alla misura invariante di operatori di Ornstein-Uhlenbeck più generali [50].

Se $M : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ è una funzione limitata allora

$$M(\mathcal{L}) f = \sum_{n=0}^{\infty} M(n)\, \mathcal{P}_n f \qquad \forall f \in L^2(\gamma).$$

La diseguaglianza di Minkowski,

$$|||\, M(\mathcal{L})\, |||_p \leq \sum_{n=0}^{\infty} |M(n)|\, |||\, \mathcal{P}_n \,|||_p \tag{4.2}$$

fornisce una semplice condizione sufficiente per l'appartenenza di M allo spazio dei moltiplicatori spettrali di $L^p(\gamma)$ per $\mathcal{L}$. Infatti, se il membro destro di (4.2) è finito $M \in \mathcal{M}_p(\mathcal{L})$. Tuttavia questa condizione è lungi dall'essere ottimale, perché richiede che la successione M decada esponenzialmente. Infatti, poiché $\mathcal{P}_n f = \langle f, h_n \rangle\, h_n$, dove h_n è l'n-esimo polinomio di Hermite normalizzato in $L^2(\gamma)$, per il teorema di Hahn-Banach e la stima delle norme in $L^p(\gamma)$ di h_n (vedi [41])

$$\begin{aligned} |||\, \mathcal{P}_n \,|||_p &= \|h_n\|_p \|h_n\|_{p'} \\ &\geq C(p)\, n^{-1/2} (p'-1)^{n/2}. \end{aligned}$$

Quindi le norme dei proiettori spettrali $\mathcal{P}_n$ su $L^p(\gamma)$ crescono esponenzialmente.

Una condizione sufficiente più precisa, che si applica anche a funzioni che non si annullano all'infinito, può essere ottenuta sfruttando le proprietà di olomorfia e di ipercontrattività del semigruppo generato da $\mathcal{L}$. Dalla risoluzione spettrale di $\mathcal{L}$ si vede facilmente che il semigruppo $e^{-t\mathcal{L}}$, $t \geq 0$, si estende analiticamente a un semigruppo $e^{-z\mathcal{L}}$, $\operatorname{Re} z \geq 0$, di contrazioni su $L^2(\gamma)$, definito da

$$e^{-z\mathcal{L}} f = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-zn}\, \mathcal{P}_n f \qquad \forall f \in L^2(\gamma).$$

La funzione $z \to e^{-z\mathcal{L}}$ è olomorfa nel semipiano destro $\operatorname{Re} z > 0$ ed è fortemente continua nel semipiano chiuso $\operatorname{Re} z \geq 0$.

Per descrivere la regione di olomorfia del semigruppo di Ornstein-Uhlenbeck su $L^p(\gamma)$ per $p \neq 2$ definiamo $\phi_p = \arccos|2/p - 1|$ per ogni p in $(1, \infty)$ e denotiamo con $\boldsymbol{E}_p$ l'insieme

$$\{x + iy \in \mathbb{C} : x \geq 0,\ |\sin y| \leq (\tan \phi_p) \sinh x\}. \tag{4.3}$$

Se $p = 2$ allora $\phi_p = \pi/2$. In tal caso definiamo $\tan \pi/2 = \infty$, sicché $\boldsymbol{E}_2 = \{\operatorname{Re} z \geq 0\}$. Osserviamo che $\boldsymbol{E}_p$ è un sottoinsieme $i\pi$-periodico di $\mathbb{C}$ che contie-

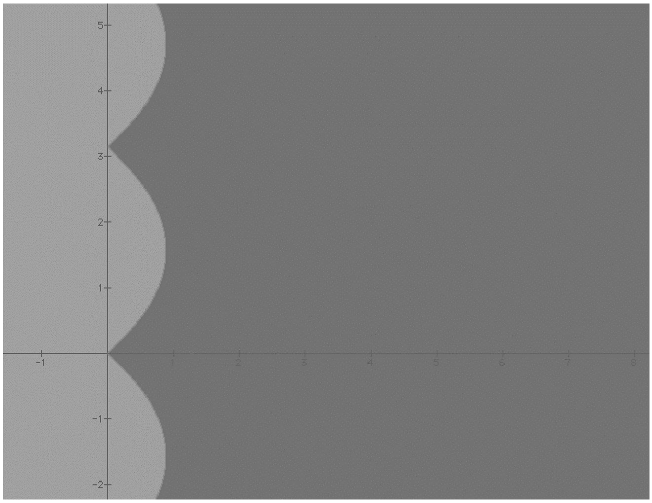


Fig. 2. – La regione $\boldsymbol{E}_p$.

ne il settore

$$\boldsymbol{S}_{\phi_p} = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leq \phi_p\}$$

e che le semirette $[0, e^{\pm i\phi_p}\infty)$ sono tangenti alla frontiera di $\boldsymbol{E}_p$ nell'origine (vedi Fig. 2). Inoltre $\boldsymbol{E}_p = \boldsymbol{E}_{p'}$ se $1/p + 1/p' = 1$ e $\boldsymbol{E}_p \subset \boldsymbol{E}_q$ se $1 < p < q \leq 2$.

TEOREMA 4.2. – *Supponiamo che* $1 < p < \infty$.

1) *L'operatore* $e^{-z\mathcal{L}}$ *si estende a un operatore limitato su* $L^p(\gamma)$ *se e solo se* $z \in \boldsymbol{E}_p$, *nel qual caso è una contrazione. Inoltre l'applicazione* $z \mapsto e^{-z\mathcal{L}}$ *da* $\boldsymbol{E}_p$ *allo spazio degli operatori limitati su* $L^p(\gamma)$ *è fortemente continua e la sua restrizione all'interno di* $\boldsymbol{E}_p$ *è olomorfa.*
2) *Se* $1 < p < 2$ *l'operatore* $e^{-z\mathcal{L}}$ *è limitato da* $L^p(\gamma)$ *a* $L^2(\gamma)$ *se e solo se* $\mathrm{Re}\, z \geq -\log\sqrt{p-1}$; *in tal caso è una contrazione.*

Il punto (1) è dovuto a J. B. Epperson [24]. Il punto (2) è il ben noto risultato di ipercontrattività di E. Nelson [55].

Una prima facile conseguenza del Teorema 4.2 è la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 4.3. – *L'operatore di Ornstein-Uhlenbeck non ha un calcolo funzionale di tipo Mihlin-Hörmander.*

DIMOSTRAZIONE. – Se $\mathrm{Re}\, z > 0$ la funzione $\lambda \mapsto M_z(\lambda)$ soddisfa condizioni di Mihlin di ogni ordine, perché è a decrescenza rapida con tutte le sue derivate. Tuttavia, se $z \neq \boldsymbol{E}_p$ l'operatore $M_z(\mathcal{L}) = e^{-z\mathcal{L}}$ non è limitato su $L^p(\gamma)$, per il Teorema 4.2. ■

5. – Condizioni sufficienti.

Le condizioni sufficienti sono formulate mediante uno spazio di funzioni olomorfe e limitate in un settore del piano complesso, che verificano una condizione di tipo Hörmander sul bordo del settore. Per definire questo spazio ci occorre un po' di notazione.

Se $\psi \in (0, \pi)$ denotiamo con $\boldsymbol{S}_\psi$ il settore aperto definito da

$$\boldsymbol{S}_\psi = \{ z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \psi \},$$

e con $H^\infty(\boldsymbol{S}_\psi)$ lo spazio delle funzioni olomorfe e limitate su $\boldsymbol{S}_\psi$. Per il teorema di Fatou [23], una funzione M in $H^\infty(\boldsymbol{S}_\psi)$ ammette limite non tangenziale in quasi ogni punto del bordo di $\boldsymbol{S}_\psi$, che denotiamo ancora con M. Siano M_+ e M_- le funzioni definite quasi ovunque su $\mathbb{R}_+$ da

$$M_+(\lambda) = M(\lambda e^{i\psi}), \qquad M_-(\lambda) = M(\lambda e^{-i\psi}) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+ .$$

In altri termini, M_+ e M_- sono i valori al bordo di M sul lato superiore e sul lato inferiore del settore, considerati però come funzioni su $\mathbb{R}_+$.

DEFINIZIONE. – Lo spazio $H^\infty(\boldsymbol{S}_\psi; \alpha)$ è lo spazio di Banach di tutte le funzioni M in $H^\infty(\boldsymbol{S}_\psi)$ tali che M_+ e M_- soddisfano una condizione di Hörmander di ordine α, munito della norma

$$\|M\|_{\psi;\alpha} = \max \left\{ \sup_{t>0} \|\varphi(\cdot)\, M_+(t\cdot)\|_{H^\alpha}, \sup_{t>0} \|\varphi(\cdot)\, M_-(t\cdot)\|_{H^\alpha} \right\}.$$

A questo punto possiamo enunciare la prima condizione sufficiente per i moltiplicatori spettrali dell'operatore di Ornstein-Uhlenbeck. Ricordiamo che $\phi_p = \arccos|2/p - 1|$ è l'angolo che interviene nella definizione della regione di olomorfia del semigruppo di Ornstein-Uhlenbeck (vedi la (4.3)).

TEOREMA 5.1. – *Supponiamo che $1 < p < 2$ e poniamo $\phi_p^* = \pi/2 - \phi_p$. Sia $M : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ una successione limitata e supponiamo che esista una funzione $\widetilde{M}$ in $H^\infty(\boldsymbol{S}_{\phi_p^*}; \alpha)$, per qualche $\alpha > 1$, tale che*

$$\widetilde{M}(n) = M(n), \qquad \forall n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Allora $M \in \mathcal{M}_q(\mathcal{L})$ ed esiste una costante $C = C(d)$ tale che

$$\|M\|_{\mathcal{M}_q(\mathcal{L})} \leq C \|M\|_{\phi_p^*;\alpha} \qquad \forall q \in [p, p'] .$$

Il Teorema 5.1 è stato dimostrato in [27] per $\alpha > 4$. La dimostrazione che $\alpha > 1$ è sufficiente si trova in [48].

La dimostrazione del Teorema 5.1 si basa su un elegante teorema di Meda sui moltiplicatori dei generatori di semigruppi simmetrici di diffusione, che mette in relazione l'ampiezza del settore di olomorfia e l'ordine della condizione di Hörmander con la crescita delle norme delle potenze immaginarie dell'operatore [49] (vedi anche [27, Theorem 2.2] e [48, Theorem 2.1]).

TEOREMA 5.2. – *Sia $\mathcal{G}$ il generatore di un semigruppo simmetrico di diffusione tale che il proiettore sul nucleo di $\mathcal{G}$ è nullo. Sia $1 < p < \infty$. Supponiamo che esistano delle costanti positive C e σ e una costante θ in $(0, \pi/2)$ tali che*

$$|||\, \mathcal{G}^{iu} \,|||_p \leq C(1 + |u|)^\sigma \exp(\theta |u|) \qquad \forall u \in \mathbb{R}\,.$$

Se $M \in H^\infty(\boldsymbol{S}_\theta;\, \alpha)$ per qualche $\alpha > \sigma + 1$ allora $M \in \mathfrak{M}_p(\mathcal{G})$ e

$$|||M|||_{\mathfrak{M}_p(\mathcal{G})} \leq C \|M\|_{\theta;\, \alpha}.$$

Poiché nel caso dell'operatore di Ornstein-Uhlenbeck il proiettore spettrale $\mathcal{P}(0)$ non è nullo, non è possibile applicare il Teorema 5.2 direttamente all'operatore $\mathcal{L}$, ma occorre considerare gli operatori perturbati $\mathcal{L} + \varepsilon \mathfrak{I}$ e dimostrare che la stima

$$|||(\mathcal{L} + \varepsilon \mathfrak{I})^{-iu}\,|||_p \leq C \exp(\phi_p^* \,|u|) \qquad \forall u \in \mathbb{R}$$

vale uniformemente per $0 < \varepsilon < 1$. Poiché $|||(\mathcal{L} + \varepsilon \mathfrak{I})^{-iu}\,|||_p = |||(\mathcal{L} + \varepsilon \mathfrak{I})^{iu}\,|||_p$ per la simmetria dell'operatore $\mathcal{L}$, è sufficiente provare la stima suddetta per ogni $u > 0$. Il punto di partenza per la dimostrazione di questa stima è l'espressione delle potenze complesse dell'operatore in funzione del semigruppo

$$(\mathcal{L} + \varepsilon \mathfrak{I})^{-w} = \frac{1}{\Gamma(w)} \int_0^\infty t^w e^{-\varepsilon t} e^{-t\mathcal{L}} \frac{\mathrm{d}t}{t} \qquad \forall w \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} w > 0\,, \tag{5.1}$$

che è una facile conseguenza della rappresentazione spettrale dell'operatore $\mathcal{L}$. Regolarizzando opportunamente l'integrale è possibile dare un senso alla (5.1) anche quando $\operatorname{Re} w = 0$. Dalla (5.1) si deduce la seguente relazione tra il nucleo di Schwartz r_{-iu} dell'operatore $(\mathcal{L} + \varepsilon \mathfrak{I})^{-iu}$ e il nucleo h_t del semigruppo $e^{-t\mathcal{L}}$:

$$r_{-iu}(x, y) = \frac{1}{\Gamma(iu)} \int_0^\infty t^{iu} e^{-\varepsilon t} h_t(x, y) \frac{\mathrm{d}t}{t} \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^d,\ x \neq y\,. \tag{5.2}$$

Utilizzando questa espressione e la conoscenza esplicita del nucleo h_t è possibile stimare il nucleo r_{-iu} e le sue derivate sia rispetto a x sia rispetto a y, ottenendo la stima

$$(5.3)\qquad |||(\mathcal{L}+\varepsilon\mathfrak{I})^{-iu}|||_p \leqslant C\exp\left(\frac{\pi}{2}u\right) \qquad \forall u>0\,.$$

Poiché $\phi_p^* < \pi/2$ questa stima non è sufficiente per dimostrare il Teorema 5.1. Tuttavia, sfruttando l'olomorfia del semigruppo nella regione $\boldsymbol{E}_p$ è possibile ottenere una stima migliore. Infatti, poiché il nucleo h_t è olomorfo in $\boldsymbol{E}_p$ possiamo spostare il cammino di integrazione in (5.2) dal semiasse $[0,\ \infty)$ alla semiretta $z = te^{i\phi_p},\ t>0,$ ottenendo che

$$(5.4)\qquad \begin{aligned} r_{-iu}(x,\,y) &= \frac{1}{\Gamma(iu)}\int_0^\infty (te^{i\phi_p})^{iu}\, e^{-\varepsilon te^{i\phi_p}}\, h_{te^{i\phi_p}}(x,\,y)\,\frac{\mathrm{d}t}{t} \\ &= \frac{e^{-\phi_p u}}{\Gamma(iu)}\int_0^\infty (te^{i\phi_p})^{iu}\, e^{-\varepsilon te^{i\phi_p}}\, h_{te^{i\phi_p}}(x,\,y)\,\frac{\mathrm{d}t}{t}\,. \end{aligned}$$

per ogni $x,\,y$ in $\mathbb{R}^d$, $x\neq y$. Abbiamo così guadagnato il fattore $e^{-\phi_p u}$ che, combinato con il fattore $e^{\frac{\pi}{2}u}$ che avevamo nella (5.3), ci dà $e^{(\pi/2-\phi_p)u} = e^{\phi_p^* u}$, come volevamo. Il prezzo da pagare per questo miglioramento è che ora dobbiamo stimare l'integrale (5.4), che è più complicato di (5.2), perché nell'integranda compare il nucleo h_t per valori complessi di t. Rinviamo il lettore all'articolo [27] per i dettagli della dimostrazione.

Nella letteratura i moltiplicatori spettrali dei semigruppi simmetrici di diffusione sono stati molto studiati, a partire dalla classica monografia di E. M. Stein [63]. Per un risultato classico di M. Cowling [14, Theorem 2], se $\mathcal{G}$ è il generatore di un tal semigruppo e $\psi > \theta_p = \pi|1/p - 1/2|$ le funzioni in $H^\infty(\boldsymbol{S}_\psi)$ sono in $\mathcal{M}_q(\mathcal{G})$ per ogni q in $[p,\,p']$. Poiché l'angolo ϕ_p^* è strettamente minore di θ_p per ogni p in $(1,2)$, il Teorema 4.1 dà una condizione più precisa per l'operatore di Ornstein-Uhlenbeck ([3]). Tuttavia, mentre il risultato di Cowling si applica anche all'operatore di Ornstein-Uhlenbeck in dimensione infinita, la dimostrazione del Teorema 5.1 data in [27] vale solo in dimensione finita, perché la costante $C(d)$ che compare nella stima della norma dell'operatore $M(\mathcal{L})$ su $L^q(\gamma)$ tende all'infinito al crescere della dimensione d. Sarebbe interessante sapere se il Teorema 5.1 vale anche per l'operatore di Ornstein-Uhlenbeck in dimensione infinita. Ricordiamo che altri operatori importanti associati al semigruppo di Ornstein-Uhlenbeck, come le trasformate di Riesz, hanno stime su $L^p(\gamma)$ indipendenti dalla dimensione [52], [56].

([3]) Recentemente Kunstmann e Strkalji [40] hanno migliorato il risultato di Cowling, dimostrando che l'inclusione $H^\infty(\boldsymbol{S}_\psi)\subset\mathcal{M}_q(\mathcal{G})$ vale se ψ è maggiore di un angolo ψ_p, strettamente minore di θ_p, ma pur sempre maggiore di ϕ_p^*.

Nel Teorema 5.1 il settore di olomorfia è ottimale, come mostra il seguente risultato (vedi [27, Theorem 2]).

TEOREMA 5.3. – *Siano p e ϕ_p^* come nel Teorema* 5.1. *Se $\psi < \phi_p^*$ esiste una funzione M a decrescenza rapida e in $H^\infty(\boldsymbol{S}_\psi; \alpha)$ per ogni $\alpha > 0$, tale che $M \notin \mathcal{M}_p(\mathcal{L})$.*

Il Teorema 5.1 non vale per $p = 1$. Un controesempio è dato dalla funzione

$$M(\lambda) = \begin{cases} \lambda^i, & \text{se } \lambda > 0 \\ 0, & \text{se } \lambda = 0 \, . \end{cases}$$

Si noti che $\phi_1^* = \pi/2$; quindi il settore $\boldsymbol{S}_{\phi_1^*}$ è il semipiano destro $\boldsymbol{S}_{\pi/2}$ la cui frontiera è l'asse immaginario. È facile verificare che M è in $H^\infty(\boldsymbol{S}_{\phi_1^*}; \alpha)$ per ogni α in $[0, \pi)$. tuttavia l'operatore $M(\mathcal{L})$ non è limitato su $L^1(\gamma)$. Per vederlo basta applicare l'operatore a una successioni (f_n) di funzioni in $L^1(\gamma)$ che approssima la delta di Dirac nell'origine. Usando l'espressione del nucleo dell'operatore come in [26, Theorem 6.1], non è difficile vedere che la successione delle norme di $M(\mathcal{L}) f_n$ in $L^1(\gamma)$ diverge.

Una condizione sufficiente per moltiplicatori spettrali di $L^1(\gamma)$ è la seguente ([33])

TEOREMA 5.4. – *Se M è la restrizione a $\mathbb{N}_+$ di una funzione $\widetilde{M}$ in $H^\infty(\boldsymbol{S}_{\pi/2})$ il cui valore al bordo $\lambda \mapsto \widetilde{M}(i\lambda)$ è la trasformata di Fourier di una misura finita su $\mathbb{R}$, con supporto in $[0, \infty)$, allora $M \in \mathcal{M}_1(\mathcal{L})$.*

È ben noto che, nel contesto dei moltiplicatori di Fourier, la condizione di Hörmander non implica la limitatezza su L^1 del moltiplicatore, ma solo una stima di tipo debole (1, 1). Anche per i moltiplicatori spettrali dell'operatore di Ornstein-Uhlenbeck esiste una condizione sufficiente per la limitatezza debole (1, 1), che si applica a funzioni che sono *di tipo trasformata di Laplace*, cioè funzioni M della forma

$$M(\lambda) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} \psi(t)\, dt \qquad \forall \lambda > 0 \, ,$$

dove ψ è una funzione misurabile e limitata in $(0, \infty)$. Le funzioni di tipo trasformata di Laplace sono in $H^\infty(\boldsymbol{S}_\phi)$ per ogni ϕ in $(0, \pi/2)$. Il teorema seguente è stato dimostrato in [26].

TEOREMA 5.5. – *Se M è di tipo trasformata di Laplace allora l'operatore $M(\mathcal{L})$ soddisfa la stima debole*

$$\gamma(\{x \in \mathbb{R}^d : |M(\mathcal{L}) f(x)| > r\}) \leqslant C \frac{\|f\|_1}{r} \qquad \forall r > 0, \ \forall f \in L^1(\gamma).$$

Risultati analoghi ai Teoremi 5.1-5.5 sono stati dimostrati da E. Sasso per il semigruppo di Laguerre [58], [59].

DEFINIZIONE. – Se M è una funzione continua su $[0, \infty)$ e $t > 0$ poniamo $M_{(t)} = M(t\lambda)$. Diremo che M è *un moltiplicatore uniforme* di $L^p(\gamma)$ se $M_{(t)} \in \mathcal{M}_p(\mathcal{L})$ per ogni $t > 0$ e

$$\sup_{t>0} \|M_{(t)}\|_{\mathcal{M}_p(\mathcal{L})} < \infty . \tag{5.5}$$

Come abbiamo già osservato nell'introduzione, la condizione di uniformità (5.5) compare nello studio della sommabilità degli sviluppi in autofunzioni.

Si noti che tutte le condizioni sufficienti negli enunciati dei Teoremi 5.1, 5.4 e 5.5 sono invarianti per dilatazioni. Quindi questi teoremi forniscono in realtà condizioni sufficienti per moltiplicatori uniformi.

Per moltiplicatori che non siano necessariamente uniformi sembra eccessivo richiedere l'olomorfia in un intero settore. Infatti, se M è una successione limitata possiamo scrivere

$$M(\mathcal{L}) = \sum_{n=0}^{N} M(n)\, \mathcal{P}_n + \sum_{n>N} M(n)\, \mathcal{P}_n \tag{5.6}$$

per ogni intero positivo N. Il primo addendo è un operatore limitato su $L^p(\gamma)$ per ogni p in $(1, \infty)$, perché è una combinazione lineare finita dei proiettori spettrali $\mathcal{P}_n$, che sono limitati. Quindi dovrebbe essere possibile formulare una condizione sufficiente che faccia intervenire solo il comportamento di M all'infinito. Per un risultato di P. A. Meyer [52], se M è la restrizione a $\mathbb{N}$ di una funzione olomorfa in un intorno dell'infinito allora $M \in \mathcal{M}_p(\mathcal{L})$ per ogni p in $(1, \infty)$ (4). Quindi sembra ragionevole congetturare che per ottenere la limitatezza di $M(\mathcal{L})$ su $L^p(\gamma)$ sia sufficiente richiedere che M sia olomorfa nell'intersezione di $\boldsymbol{S}_{\phi_p^*}$ con un intorno dell'infinito e che soddisfi una condizione di Hörmander al bordo. In realtà vale un risultato migliore. Per ogni $a \geqslant 0$ denotiamo con $\boldsymbol{S}_{\phi_p^*}$ il settore traslato $\{z \in \mathbb{C} : |\arg(z-a)| < \phi_p^*\}$ e con $H^\infty(\boldsymbol{S}_{\phi_p^*} + a; \alpha)$ lo spazio delle funzioni olomorfe e limitate su $\boldsymbol{S}_{\phi_p^*} + a$ che soddisfano una condizione di Hörmander di ordine α sul bordo di $\boldsymbol{S}_{\phi_p^*} + a$.

(4) Questo risultato segue anche facilmente applicando il calcolo funzionale di Dunford al secondo addendo in (5.6).

TEOREMA 5.6. – *Supponiamo che* $1 < p < 2$. *Sia* $M : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ *una successione limitata e supponiamo che esista una funzione* $\widetilde{M}$ *in* $H^\infty(\boldsymbol{S}_{\phi_p^*} + a; \alpha)$, *per qualche* $a \geq 0$ *e qualche* $\alpha > 1$, *tale che*

$$\widetilde{M}(n) = M(n), \qquad \forall n = 1, 2, 3, \dots .$$

Allora $M \in \mathcal{M}_q(\mathcal{L})$ *per ogni* q *in* $[p, p']$.

Il Teorema 5.6 è dimostrato in [48].

6. – Condizioni necessarie.

Tutte le condizioni sufficienti enunciate nella sezione precedente richiedono l'olomorfia del moltiplicatore M in qualche aperto del piano complesso. È naturale chiedersi se l'olomorfia è realmente una condizione necessaria per la limitatezza di $M(\mathcal{L})$ su $L^p(\gamma)$ quando $p \neq 2$. La risposta è: si, ma per ragioni che in un certo senso sono banali! Infatti, consideriamo l'aperto V, immagine del disco unità mediante la mappa biolomorfa $z \mapsto -\Phi(z) = \log(1-z)$. È facile vedere che V è un intorno convesso della semiretta $[0, \infty)$, contenuto nella striscia $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > -\log 2, \ |\operatorname{Im} z| < \pi/2\}$, che all'infinito tende asintoticamente alla striscia. La successione dei numeri naturali è l'immagine mediante la mappa Φ della successione $(1 - e^{-n})$, che è una successione interpolante universale per lo spazio $H^\infty(D)$ delle funzioni olomorfe e limitate sul disco unitario D [23]. Pertanto, la successione dei numeri naturali è una successione interpolante universale per lo spazio $H^\infty(V)$, cioè per ogni successione limitata M esiste una funzione $\widetilde{M}$ in $H^\infty(V)$ tale che $\widetilde{M}(n) = M(n)$ per ogni n in $\mathbb{N}$. Ne segue facilmente che ogni moltiplicatore spettrale $M \in \mathcal{M}_p(\mathcal{L})$ si estende a una funzione olomorfa e limitata su V. Infatti, se $M(\mathcal{L})$ è limitato su $L^p(\gamma)$ allora, per dualità, $M(\mathcal{L})$ è limitato anche su $L^{p'}(\gamma)$, dove p' denota l'esponente coniugato di p. Per interpolazione, $M(\mathcal{L})$ è limitato su $L^2(\gamma)$ e quindi la successione M è limitata per il teorema spettrale. Quindi M è la restrizione ai naturali di una funzione $\widetilde{M}$ in $H^\infty(V)$.

Si noti che l'aperto V è «piccolo all'infinito» perché è contenuto in una striscia. Una domanda più significativa è la seguente: è vero che ogni moltiplicatore di $L^p(\gamma)$, $p \neq 2$, ammette continuazione analitica a una funzione olomorfa e limitata in un aperto «grande all'infinito», per esempio un settore $\boldsymbol{S}_\phi$ o un suo traslato $\boldsymbol{S}_\phi + a$? La risposta è nota solo per moltiplicatori uniformi.

TEOREMA 6.1 ([33, Theorem 3.5]). – *Sia* $M : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ *una funzione continua e limitata.*

(i) *Se* M *è un moltiplicatore uniforme di* $L^p(\gamma)$, *per* p *in* $(1, \infty) \setminus \{2\}$ *allora* M *si estende a una funzione olomorfa e limitata nel settore*

$\boldsymbol{S}_{\phi_p^*}$ *e*

$$\|M\|_{H^\infty(\boldsymbol{S}_{\phi_p^*})} \leq \sup_{t>0} |||M(t\mathcal{L})|||_p;$$

(ii) *se* M *è un moltiplicatore uniforme di* $L^1(\gamma)$ *allora* M *si estende a una funzione olomorfa e limitata nel semipiano* $\boldsymbol{S}_{\pi/2}$, *il cui valore al bordo* $M(i\cdot)$ *è la trasformata di Fourier di una misura finita* μ *su* $\mathbb{R}$, *con supporto in* $[0, \infty)$; *inoltre*

$$\|\mu\|_{M(\mathbb{R})} = \sup_{t>0} |||M(t\mathcal{L})|||_1;$$

Per il Teorema 5.4, il punto (ii) del Teorema 6.1 è una caratterizzazione dei moltiplicatori uniformi di $L^1(\gamma)$. Si noti l'analogia di questo risultato con il classico teorema di Wendell [64, Theorem 3.19], che caratterizza i moltiplicatori di Fourier di $L^1(\mathbb{R}^d)$ come trasformate di Fourier di misure finite su $\mathbb{R}^d$.

Osservazione. – È interessante osservare che, a differenza delle condizioni sufficienti che sono state dimostrate solo nel caso di dimensione finita, il Teorema 6.1 vale anche per l'operatore di Ornstein-Uhlenbeck in dimensione infinita.

Il Teorema 6.1 vale per una classe più ampia di operatori ellittici su $\mathbb{R}^d$, che sono autoaggiunti sullo spazio delle funzioni di quadrato integrabile rispetto a una misura della forma $d\mu_\varphi = e^{-\varphi}\, d\lambda$, dove λ è la misura di Lebesgue e φ è un *peso ammissibile*, cioè una funzione di classe C^2 su $\mathbb{R}^d$ tale che

(i) esiste un vettore di norma uno $\boldsymbol{u}$ e una costante positiva b_0 tale che $\nabla\varphi(a\boldsymbol{u}) \neq 0$ for $a > b_0$;

(ii) per ogni $b > 0$

$$\lim_{a\to\infty} \sup_{|\boldsymbol{x}|\leq b} \frac{\nabla^2\varphi\left(a\boldsymbol{u} + \dfrac{\boldsymbol{x}}{|\nabla\varphi(\boldsymbol{u})|}\right)}{|\nabla\varphi(a\boldsymbol{u})|^2} = 0, \tag{6.1}$$

dove $\nabla^2\varphi$ denota l'Hessiano di φ.

La classe dei pesi ammissibili è abbastanza ricca. Ad esempio ogni polinomio reale non costante su $\mathbb{R}^d$ è un peso ammissibile. Nella classe dei pesi ammissibili vi sono anche funzioni che crescono molto rapidamente all'infinito, come $x \mapsto e^x$ su $\mathbb{R}$ e $\boldsymbol{x} \mapsto \exp(|\boldsymbol{x}|^2)$ su $\mathbb{R}^d$. Invece, non sono pesi ammissibili le funzioni

$$x \mapsto \text{arctant}\, x, \qquad x \mapsto \exp(-(1+x^2)^{1/2}), \qquad x \mapsto (1+x^2)^{-a/2} \quad \forall a \in \mathbb{R}^+.$$

Dato un peso ammissibile φ, consideriamo la forma di Dirichlet

$$Q^{\varphi}(f) = \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f|^2 \, d\mu^{\varphi} \qquad \forall f \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^d).$$

È ben noto (vedi ad esempio [Davies, Thm 1.2.5]) che Q^{φ} è la forma associata a un operatore autoaggiunto $\mathcal{L}^{\varphi}$ su $L^2(\mu_{\varphi})$, nel senso che

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f|^2 \, d\mu^{\varphi} = \int \mathcal{L}^{\varphi} f \bar{f} \, d\mu_{\varphi}, \qquad \forall f \in \operatorname{Dom} \mathcal{L}_{\varphi}.$$

Con una integrazione per parti si vede facilmente che

$$\mathcal{L}^{\varphi} f = -\Delta f + \nabla \varphi \cdot \nabla f \qquad \forall f \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}).$$

Osserviamo che se $\varphi(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|^2$ allora l'operatore $\frac{1}{2}\mathcal{L}^{\varphi}$ coincide con l'operatore di Ornstein-Uhlenbeck.

Il seguente risultato estende il Teorema 6.1 agli operatori della forma $\mathcal{L}^{\varphi}$ ([33]).

TEOREMA 6.2. – *Sia p in $[1, \infty) \setminus \{2\}$. Supponiamo che $M : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ sia limitata e continua su $\mathbb{R}^+$.*

(i) *Se p è in $(1, \infty) \setminus \{2\}$, e*

$$\sup_{t>0} |||M(t\mathcal{L}^{\varphi})|||_{L^p(\mu^{\varphi})} < \infty,$$

allora M si estende a una funzione limitata e olomorfa nel settore $\boldsymbol{S}_{\phi_p^*}$ e

$$\|M\|_{H^{\infty}(\boldsymbol{S}_{\phi_p^*})} \leq \sup_{t>0} |||M(t\mathcal{L}^{\varphi})|||_{L^p(\mu^{\varphi})};$$

(ii) $\sup_{t>0} |||M(t\mathcal{L}^{\varphi})|||_{L^1(\mu^{\varphi})} < \infty$ *se e solo se M si estende a una funzione limitata e olomorfa nel semipiano $\boldsymbol{S}_{\pi/2}$, e $M(i\cdot)$ è la trasformata di Fourier di una misura finita μ^M su $\mathbb{R}$, con supporto in $[0, \infty)$; inoltre*

$$\|\mu^M\|_{M(\mathbb{R})} = \sup_{t>0} |||M(t\mathcal{L}^{\varphi})|||_{L^1(\mu^{\varphi})}.$$

7. – Considerazioni conclusive.

Nello studio del problema dei moltiplicatori spettrali si può dire che, grosso modo, vi sono due linee di ricerca: una prima linea si propone di determinare condizioni sufficienti per la limitatezza su L^p di ampie classi di operatori, come, ad esempio, i generatori dei semigruppi simmetrici Markoviani o la classe ancora più ampia degli operatori settoriali. Alcune pietre miliari in questa linea di ricerca sono la monografia di Stein [63] e i lavori [14], [15], [39] e [40]. Un'altra linea di ricerca si occupa di determinare condizioni sufficienti quasi ottimali, cioè il più possibile vicine alle condizioni necessarie, per operatori specifici. I nostri risultati per l'operatore di Ornstein-Uhlenbeck appartengono a questa seconda linea di ricerca. Confrontando gli enunciati dei Teoremi 5.1 e 6.1 si vede infatti che, almeno per moltiplicatori uniformi, la condizione sufficiente differisce dalla condizione necassaria solo per i valori al bordo del settore di olomorfia del moltiplicatore.

Naturalmente, una volta ottenute condizioni sufficienti quasi ottimali per un operatore specifico, ci si può chiedere se queste condizioni siano sufficienti per qualche classe più ampia di operatori. Ad esempio, alla luce del risultato ottenuto per l'operatore di Ornstein-Uhlenbeck, è naturale chiedersi se i generatori dei semigruppi simmetrici Markoviani hanno un calcolo funzionale H^∞ su L^p in un settore $\boldsymbol{S}_\psi$, non appena l'angolo ψ è maggiore dell'angolo critico ϕ_p^*. Vi sono alcune indicazioni che il settore $\boldsymbol{S}_{\phi_p^*}$ potrebbe essere il settore «giusto» di olomorfia per i moltiplicatori spettrali di L^p anche nel caso generale dei semigruppi simmetrici Markoviani. Ad esempio, V. A. Liskevich e M. A. Perelmuter in [43] hanno dimostrato che se $\mathcal{G}$ è il generatore di un tal semigruppo allora il semigruppo generato da $\mathcal{G}$ è un semigruppo olomorfo di contrazioni nel settore S_{ϕ_p}. Utilizzando questo risultato, in un lavoro in preparazione in collaborazione con W. Hebisch e S. Meda, siamo riusciti a dimostrare che se M è una funzione olomorfa nel settore $\boldsymbol{S}_{\phi_p^*}$ i cui valori al bordo M_+ e M_- verificano una condizione di Hörmander rafforzata, in cui nella (2.2) l'estremo superiore su $\mathbb{R}^+$ è sostituito dall'integrale su $(\mathbb{R}^+, \mathrm{d}t/t)$, allora M è un moltiplicatore spettrale di L^p per $\mathcal{G}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. Alexopoulos, *Spectral multipliers on Lie groups of polynomial growth*, Proc. Amer. Math., **120** (1991), 973-979.

[2] J.-P. Anker, *L_p Fourier multipliers on Riemannian symmetric spaces of the noncompact type*, Ann. of Math. (2), **123**, no. 3 (1990), 597-628.

[3] J.-P. Anker, *Sharp estimates for some functions of the Laplacian on noncompact symmetric spaces*, Duke Math. J., **65**, no. 2 (1992), 257-297.

[4] J.-P. Anker - N. Lohoué, *Multiplicateurs sur certains espaces symetriques*, Amer. J. Math., **108** (1986), 1303-1353.

[5] W. Arendt, *Gaussian estimates and interpolation of the spectrum in L^p*, Differential Integral Equations, **7**, no. 5-6 (1994), 1153-1168.

[6] F. Astengo, *A. class of L^p convolutors on harmonic extensions of H-type groups*, J. Lie Theory, **5**, no. 2 (1995), 147-164.

[7] D. BAKRY, *L'hypercontractivité et son utilisation en théorie des semi-groupes*, in Lectures on Probability Theory, D. Bakry, R. D. Gill and S. A. Molchanov editors, Springer Lecture Notes in Mathematics, **1581** (1994), 1-114.

[8] J. BOIDOL, **-Regularity of exponential Lie groups*, Invent. Math., **56** (1980), 31-238.

[9] A. CHOJNOWSKA-MICHALIK - B. GOLDYS, *Symmetric Ornstein-Uhlenbeck semigroups and their generators*, Probab. Theory Related Fields, **124**, no. 4 (2002), 459-486.

[10] M. CHRIST - D. MÜLLER, *On L^p spectral multipliers for a solvable Lie group*, Geom. Funct. Anal., **6** (1996), 860-876.

[11] J.-L. CLERC - E. M. STEIN, *L^p multipliers for noncompact symmetric spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **71** (1974), 3911-3912.

[12] M. CHRIST, *L^p bounds for spectral multipliers on nilpotent groups*, Trans. Amer. Math. Soc., **328** (1991), 73-81.

[13] R. R. COIFMAN - G. WEISS, *Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homognes. Étude de certaines intégrales singulières*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 242.

[14] M. COWLING, *Harmonic analysis on semigroups*, Ann. of Math., **117** (1983), 267-283.

[15] M. COWLING - I. DOUST - A. MCINTOSH - A. YAGI, *Banach space operators with a bounded H^∞ functional calculus*, J. Austral. Math. Soc., **60** (1996), 51-89.

[16] M. COWLING - S. GIULINI - G. GAUDRY - G. MAUCERI, *Weak type $(1, 1)$ estimates for heat kernel maximal functions in Lie groups*, Trans. Amer. Math. Soc., **323** (1991), 637-649.

[17] M. COWLING - S. GIULINI - A. HULANICKI - G. MAUCERI, *Spectral multipliers for a distinguished Laplacian on certain groups of exponential growth*, Studia Mathematica, **111** (1994), 103-121.

[18] M. COWLING - A. SIKORA, *A spectral multiplier theorem on $SU(2)$*, Math. Z., **238** (2001), 1-36.

[19] G. DA PRATO - J. ZABCYK, *Ergodicity for infinite-dimensional systems*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 229, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[20] E. B. DAVIES, *Heat Kernels and Spectral Theory*, Cambridge Tract in Math., **92**, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[21] L. DE MICHELE - G. MAUCERI, *L^p multipliers on the Heisenberg group*, Michigan Math. J., **26** (1979), 361-371.

[22] L. DE MICHELE - G. MAUCERI, *H^p multipliers on stratified groups*, Ann. Mat. Pura Appl., **148** (1987), 353-366.

[23] P. L. DUREN, *Theory of H^p spaces*, Pure and Applied Math., **38**, Academic Press, New York, 1970.

[24] J. B. EPPERSON, *The hypercontractive approach to exactly bounding an operator with complex gaussian kernel*, J. Funct. Anal., **87** (1989), 1-30.

[25] G. B. FOLLAND - E. M. STEIN, *Hardy spaces on homogeneous groups*, Mathematical Notes, 28, Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1982.

[26] J. GARCIA-CUERVA - G. MAUCERI - P. SJÖGREN - J. L. TORREA, *Spectral multipliers for the Ornstein-Uhlenbeck semigroup*, J. D'Analyse Math., **78** (1999), 281-305.

[27] J. GARCIA-CUERVA - G. MAUCERI - S. MEDA - P. SJÖGREN - J. L. TORREA, *Functional calculus for the Ornstein-Uhlenbeck operator*, J. Funct. Anal., **183** (2001), 413-450.

[28] S. GIULINI - G. MAUCERI - S. MEDA, *L^p multipliers on noncompact symmetric spaces*, J. Reine Angew. Math., **482** (1997), 151-175.
[29] W. HEBISCH, *A multiplier theorem for Schrödinger operators*, Colloq. Math., **60/61** (1990), 659-661.
[30] W. HEBISCH, *The subalgebra of $L^1(AN)$ generated by the Laplacean*, Proc. Amer. Math. Soc., **17** (1993), 547-549.
[31] W. HEBISCH, *Multiplier theorem on generalized Heisenberg groups*, Colloq. Math., **65** (1993), 231-239.
[32] W. HEBISCH, *Spectral multipliers on exponential growth solvable Lie groups*, Math. Zeitschr., **229** (1998), 435-441.
[33] W. HEBISCH - G. MAUCERI - S. MEDA, *Holomorphy of spectral multipliers of the Ornstein-Uhlenbeck operator*, in stampa su J. Funct. Anal.
[34] W. HEBISCH - J. LUDWIG - D. MULLER, *Sub-Laplacians of holomorphic L^p-type on exponential solvable groups*, arXiv:math.CA/0307051.
[35] S. HELGASON, *Groups and geometric analysis, Integral geometry, invariant differential operators, and spherical functions*, Mathematical Surveys and Monographs 83, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.
[36] L. HÖRMANDER, *Estimates for translation invariant operators in L^p spaces*, Acta Math., **104** (1960), 93-140.
[37] A. IONESCU, *Singular integrals on symmetric spaces of real rank one*, Duke Math. J., **114**, no. 1 (2002), 101-122.
[38] A. IONESCU, *Singular integrals on symmetric spaces II*, Trans. Amer. Math. Soc., **355**, no. 8 (2003), 3359-3378.
[39] N. KALTON - L. WEIS, *The H^∞-calculus and sums of closed operators*, Math. Ann., **321** (2001), 319-345.
[40] P. C. KUNSTMANN - Z. STRKALJI, *H^∞-calculus for submarkovian generators*, Proc. Amer. Math. Soc., **131**, no. 7 (2003), 2081-2088.
[41] L. LARSON-COHN, *L^p-norms of Hermite polynomials and an extremal problem on Wiener chaos*, Ark. Math., **40**, no. 1 (2002), 133-144.
[42] J. LUDWIG - D. MÜLLER, *Sub-Laplacians of holomorphic L^p type on rank one AN-groups and related solvable groups*, J. Funct. Anal., **170** (2000), 366-427.
[43] V. A. LISKEVICH - M. A. PERELMUTER, *Analyticity of submarkovian semigroups*, Proc. Amer. Math. Soc., **123** (1995), 1097-1104.
[44] N. LOHOUÉ - T. RYCHENER, *Die Resolvente von Δ auf symmetrischen Räumen von nichtkompakten Typ*, Comment. Math. Helv., **57**, no. 3 (1982), 445-468.
[45] G. MAUCERI, *Zonal multipliers on the Heisenberg group*, Pacific J. Math., **95** (1981), 143-159.
[46] G. MAUCERI, *The Weyl transform and bounded operators on $L^p(\mathbb{R}^n)$*, J. Funct. Anal., **39** (1980), 408-429.
[47] G. MAUCERI - S. MEDA, *Vector valued inequalities on stratified groups*, Rev. Math. Iberoamericana, **6** (1990), 141-154.
[48] G. MAUCERI - S. MEDA - P. SJÖGREN, *Sharp estimates for the Ornstein-Uhlenbeck operator*, preprint.
[49] S. MEDA, *A general multiplier theorem*, Proc. Amer. Math. Soc., **110** (1990), 639-647.
[50] G. METAFUNE - D. PALLARA - E. PRIOLA, *Spectrum of Ornstein-Uhlenbeck operators in L^p spaces with respect to invariant measures*, J. Funct. Anal., **196**, no. 1 (2002), 40-60.
[51] G. METAFUNE - J. PRÜSS - A. RHANDI - R. SCHNAUBELT, *The domain of the*

Ornstein-Uhlenbeck operator on an L^p-spaces with invariant measure, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5), **1**, no. 2 (2002), 471-485.
[52] P. A. MEYER, *Notes sur le processus d'Ornstein-Uhlenbeck*, Springer Lecture Notes in Mathematics, **920** (1982), 95-132.
[53] S. G. MIHLIN, *On the multipliers of Fourier integrals*, Dok. Akad. Nauk., **109** (1956), 701-703.
[54] D. MÜLLER - E. M. STEIN, *On spectral multipliers for the Heisenberg and related groups*, J. Math. Pures Appl., **73** (1994), 413-440.
[55] E. NELSON, *The free Markov field*, J. Funct. Anal., **12** (1973), 211-227.
[56] G. PISIER, *Riesz transform: a simpler analytic proof of P. A. Meyer's inequality*, Springer Lectures Notes in Mathematics, **1321** (1988), 485-501.
[57] M. REED - B. SIMON, *Methods of Modern Mathematical Physics.* Vol. I. Functional Analysis, Revised and enlarged edition, Academic Press, New York, 1980.
[58] E. SASSO, *Functional Calculus for the Laguerre Operator*, preprint.

Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Genova
Via Dodecaneso, 35 - 16146 Genova

Pervenuta in Redazione
il 19 gennaio 2004