Bollettino
Unione Matematica Italiana

Massimiliano Berti

Soluzioni periodiche di PDEs Hamiltoniane

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **7-B** (2004), n.3, p. 647–661.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2004_8_7B_3_647_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2004.

Bollettino U. M. I.
(8) **7**-B (2004), 647-661

Soluzioni periodiche di PDEs Hamiltoniane.

MASSIMILIANO BERTI (*)

Summary. – *New existence and multiplicity results of small amplitude periodic solutions for nonlinear Hamiltonian PDEs are presented. We obtain periodic solutions of «completely resonant» equations with* any *general nonlinearity thanks to a Lyapunov-Schmidt reduction, variational in nature, and min-max topological arguments. For «non resonant» equations we prove existence of periodic solutions of Birkhoff-Lewis type, by means of a suitable Birkhoff normal form and implementing again a Lyapunov-Schmidt variational reduction.*

Sunto. – *Presentiamo nuovi risultati di esistenza e molteplicità di soluzioni periodiche di piccola ampiezza per equazioni alle derivate parziali Hamiltoniane. Otteniamo soluzioni periodiche di equazioni «completamente risonanti» aventi nonlinearità generali grazie ad una riduzione di tipo Lyapunov-Schmidt variazionale ed usando argomenti di min-max. Per equazioni «non risonanti» dimostriamo l'esistenza di soluzioni periodiche di tipo Birkhoff-Lewis, mediante un'opportuna forma normale di Birkhoff e realizzando nuovamente una riduzione di tipo Lyapunov-Schmidt.*

1. – Equazioni completamente risonanti.

Consideriamo l'equazione delle onde nonlineare

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + f(u) = 0\,, \\ u(t,\,0) = u(t,\,\pi) = 0\,, \end{cases} \tag{1}$$

dove $f(0) = f'(0) = 0$.

In questo caso l'equazione (1) si dice *completamente risonante*: la soluzione $u(t,\,x) \equiv 0$ è un equilibrio ellittico per (1) avente *tutte* le frequenze caratteristiche di oscillazione $\omega_j = j \in \boldsymbol{N}$ e quindi «in risonanza».

Soluzioni periodiche dell'equazione nonlineare (1) aventi piccola ampiezza «biforcano» dallo spazio *infinito dimensionale* V delle soluzioni dell'equazione linearizzata in 0

$$V := \{ v_{tt} - v_{xx} = 0,\ v(t,\,0) = v(t,\,\pi) = 0 \}\,. \tag{2}$$

(*) Comunicazione presentata a Milano in occasione del XVII Congresso U.M.I.

Ogni soluzione $v(t, x) = \sum_{j \geq 1} \xi_j \cos(jt + \theta_j) \sin(jx)$ di (2) è 2π-periodica nel tempo (è la sovrapposizione lineare di infinite oscillazioni armoniche di frequenza $\omega_j = j$ ed ampiezza ξ_j su ogni modo $\sin jx$).

PROBLEMA: Quali soluzioni dell'equazione lineare (2) persistono, pur leggermente deformate, nell'equazione nonlineare (1)?

Questo problema ha una lunga storia. Per sistemi finito dimensionali l'esistenza di soluzioni periodiche vicino a punti di equilibrio ellittici è stata provata da Lyapunov [24], nel caso non risonante (i.e. quando le frequenze lineari ω_j soddisfano infinite relazioni di non-risonanza), e da Weinstein [34], Moser [27] e Fadell-Rabinowitz [21], nel caso risonante (i.e. quando $\omega_j / \omega_i \in \boldsymbol{Q}$ per qualche $i \neq j$).

Nell'estendere questi risultati alle *equazioni alle derivate parziali* Hamiltoniane si incontrano due difficoltà principali: la prima (*i*) è un problema di *piccoli denominatori*; la seconda (*ii*) è la possibile presenza di uno spazio *infinito dimensionale* di soluzioni periodiche aventi periodi commensurabili: questo accade per equazioni *completamente risonanti* come la (1).

Il primo problema (*i*) è stato affrontato con tecniche KAM (vedi ad esempio Kuksin [26], Wayne [33], Pöschel [30], Chierchia-You [16]) oppure con teoremi di tipo Funzione Implicita alla Nash-Moser (Craig-Wayne [19], Bourgain [14]-[15]). Un nuovo approccio basato sulla dimostrazione diretta della convergenza delle serie perturbative di Lindstedt è stato recentemente sviluppato da Gentile-Mastropietro [22]. In [3], vedi anche [7]-[8], Bambusi ha introdotto una forte condizione di non-risonanza sulle frequenze che permette l'uso, per equazioni del secondo ordine, del teorema standard delle contrazioni. Tutti questi risultati richiedono stringenti condizioni di non-degenerazione sulla nonlinearità.

Riguardo al problema (*ii*) un approccio naturale, che permette di provare esistenza e molteplicità di soluzioni per *nonlinearità generali*, è stato presentato in [11]. Esso si basa su un *principio variazionale*, mai usato prima per le PDEs, per trovare soluzioni periodiche con *frequenza fissata*: imponiamo alla frequenza di soddisfare una condizione di irrazionalità forte per superare il problema dei piccoli divisori (*i*) e risolviamo il problema (*ii*) sfruttando argomenti variazionali di *min-max*.

Gli unici risultati precedenti a [11] per equazioni completamente risonanti sono [25]-[7] e valgono per nonlinearità tipo $f(u) = u^3 + h.o.t.$. La difficoltà principale del metodo di [7] sta nel dimostrare, sempre che sia vero, la non degenerazione dei punti critici di un opportuno funzionale, i quali potrebbero così essere continuati, tramite il teorema della funzione implicita, a soluzioni dell'equazione nonlineare. In [20]-[18] sono stati ottenuti alcuni risultati per equazioni parzialmente risonanti, cioè in presenza solo di un numero finito di frequenze risonanti, generalizzando l'approccio variazionale di Weinstein-Moser per trovare soluzioni periodiche ad *energia fissata*. L'inconveniente principale di questo approccio per sistemi infinito dimensionali è che la frequenza della soluzione periodica appare come un *moltiplicatore di Lagrange* di un opportuno funzionale vincolato alla varietà di energia costante ed è quindi difficile da controllare. D'altro canto per risolvere il problema (i) posto dai piccoli denominatori, le frequenze devono appartenere a un «buon insieme non-risonante». Solamente per specifiche nonlinearità si riesce ad ottenere un controllo sulla frequenza e cosí provare l'esistenza di soluzioni.

Presentiamo adesso con più precisione i risultati di [11]-[12], ottenuti assieme a P. Bolle, dando un'idea della dimostrazione.

1.1. *Il principio variazionale: esistenza e molteplicità di soluzioni.*

Normalizzando il periodo a 2π, cerchiamo soluzioni di

$$\omega^2 u_{tt} - u_{xx} + f(u) = 0, \quad u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, \quad u(t + 2\pi, x) = u(t, x), \tag{3}$$

nello spazio di Banach (1)

$$X := \left\{ u \in H^1(\Omega, \boldsymbol{R}) \cap L^\infty(\Omega, \boldsymbol{R}) \,|\, u(t, 0) = u(t, \pi) = 0,\ u(-t, x) = u(t, x) \right\},$$

dove $\Omega := \boldsymbol{R}/2\pi\boldsymbol{Z} \times (0, \pi)$, immerso con la norma $\|u\|_X := \|u\|_{H^1} + |u|_\infty$.

Punti critici del funzionale di azione Lagrangiana $\Psi : X \to \boldsymbol{R}$

$$\Psi(u) := \int_0^{2\pi} dt \int_0^{\pi} dx \;\; \frac{\omega^2}{2} u_t^2 - \frac{1}{2} u_x^2 - F(u)$$

sono soluzioni di (3). Per trovare punti critici di Ψ implementiamo una riduzione di tipo Lyapunov-Schmidt e, pertanto, decomponendo lo spazio X come (2)

$$X = V \oplus V^\perp,$$

cerchiamo soluzioni di (3) della forma $u = v + w$ con $v \in V$ e $w \in V^\perp$. L'equazione (3) risulta equivalente alle due equazioni

$$\begin{aligned} (Q) \qquad & -\omega^2 v_{tt} + v_{xx} = \Pi_V f(v + w), \\ (P) \qquad & -\omega^2 w_{tt} + w_{xx} = \Pi_{V^\perp} f(v + w), \end{aligned}$$

dove $\Pi_V \colon X \to V$ e $\Pi_{V^\perp} \colon X \to V^\perp$ indicano i proiettori risp. su V e $V^\perp$.

Risolviamo l'equazione (P) mediante un Teorema di Funzione Implicita, per v piccolo. Il problema (i) dei piccoli denominatori citato nell'introduzione emerge solitamente nella soluzione di questa equazione. Nei lavori [11] e [12],

(1) Ci possiamo restringere allo spazio X delle funzioni pari nel tempo perché l'equazione (1) è del secondo ordine.

(2) $V^\perp = \{ w \in X \,|\, \sum_{l \geq 0,\, j \geq 1,\, l \neq j} w_{lj} \cos(lt) \sin jx \}$.

imponiamo sulla frequenza ω la stessa condizione di irrazionalità introdotta in [7], semplificando il problema (i). Assumiamo che $\omega \in \mathcal{W} := \bigcup_{\gamma > 0} \mathcal{W}_\gamma$ dove $\mathcal{W}_\gamma$ è l'insieme delle frequenze

$$\mathcal{W}_\gamma := \left\{ \omega \in \boldsymbol{R} \;\middle|\; |\omega l - j| \geq \frac{\gamma}{l}, \quad \forall l \neq j \right\}. \tag{4}$$

Per $0 < \gamma < 1/3$, $\mathcal{W}_\gamma$ è non numerabile, ha misura nulla e si accumula a $\omega = 1$ sia da sinistra che da destra. L'osservazione cruciale è che, per $\omega \in \mathcal{W}_\gamma$, l'operatore $L_\omega := -\omega^2 \partial_{tt} + \partial_{xx}$ ha inverso limitato (3) $L_\omega^{-1}: V^\perp \to V^\perp$, $\|L_\omega^{-1}\| \leq C/\gamma$, e, quindi, dal teorema delle Contrazioni, troviamo un'unica soluzione $w(v) \in V^\perp$ dell'equazione (P) con $\|w(v)\|_X = O(\|v\|^p/\gamma)$.

Una volta risolta l'equazione (P), rimane da risolvere l'equazione di biforcazione (Q), $-\omega^2 v_{tt} + v_{xx} = \Pi_V f(v + w(v))$, che, per equazione completamente risonanti, è ancora *infinito dimensionale*. La risolviamo notando che essa coincide con l'equazione di Eulero-Lagrange del *funzionale ridotto di azione Lagrangiana* Φ_ω (con frequenza *fissata*)

$$\Phi_\omega(v) := \Psi(v + w(v)) = \int_\Omega \frac{\omega^2}{2}(v_t + (w(v))_t)^2 - \frac{1}{2}(v_x + (w(v))_x)^2 - F(v + w(v)) \tag{5}$$

$$= \frac{\varepsilon}{2}\|v\|_{H^1}^2 + \int_\Omega dt\, dx \left[\frac{1}{2} f(v + w(v))\, w(v) - F(v + w(v)) \right],$$

dove $F(u) := \int_0^u f(s)\, ds$ e $\varepsilon := (\omega^2 - 1)/2$.

Da (5) riconosciamo che Φ_ω possiede un minimo locale nell'origine ed è plausibile pensare che, con un argomento di tipo Mountain Pass [2], si possa dimostrare l'esistenza di almeno un punto critico non nullo v per Φ_ω. Per far questo mostriamo che Φ_ω può essere sviluppato come

$$\Phi_\omega(v) = \frac{\varepsilon}{2}\|v\|_{H^1}^2 - G(v) + h.o.t. \tag{6}$$

dove $G \not\equiv 0$ è un funzionale omogeneo di ordine $p > 2$.

Per $f(u) = au^p + h.o.t.$ e p *dispari*, si trova subito che $G(v) = a \int_\Omega v^{p+1}$, ma, quando p è *pari*, $\int_\Omega v^{p+1} \equiv 0$ ed è più laborioso trovare il temine omogeneo dominante. Sviluppando più accuratamente il funzionale di azione ridotto trovia-

(3) Infatti gli autovalori di L_ω sono $\lambda_{jl} := \omega^2 l^2 - j^2 = (\omega l - j)(\omega l + j)$ e quindi soddisfano $|\lambda_{jl}| \geq \omega\gamma \geq \gamma/2$.

mo che

$$G(v) = \frac{a^2}{2} \int_\Omega v^p L^{-1} v^p, \tag{7}$$

dove $z := L^{-1} v^p$ è una soluzione di

$$-\partial_{tt} z + \partial_{xx} z = v^p, \quad z(t, 0) = z(t, \pi) = 0, \quad z(t + 2\pi, x) = z(t, x).$$

Si può dimostrare che $G(v) = (a^2/2) \int_\Omega v^p L^{-1} v^p < 0$, $\forall v \neq 0$.

Dagli argomenti precedenti discendono i teoremi seguenti (4)

TEOREMA 1.1 ([11]) (Esistenza: p dispari). – *Sia* $f(u) = au^p + h.o.t.$ $(a \neq 0)$ *per un intero dispari* $p \geq 3$. *Esiste una costante positiva* $C_1 := C_1(f)$ *tale che,* $\forall \omega \in \mathcal{W}_\gamma$ *con* $|\omega - 1| \leq C_1$ *e* $\omega > 1$ *se* $a > 0$ (*risp.* $\omega < 1$ *se* $a < 0$), *l'equazione* (1) *possiede almeno una soluzione* $2\pi/\omega$*-periodica.*

TEOREMA 1.2 ([11]) (Esistenza: p pari). – *Sia* $f(u) = au^p$ $(a \neq 0)$ *per un intero pari* p. *Esiste una costante positiva* $C_2 := C_2(f)$ *tale che,* $\forall \omega \in \mathcal{W}_\gamma$ $\omega < 1$, *con* $|\omega - 1| \leq C_2$ *l'equazione* (1) *possiede almeno una soluzione* $2\pi/\omega$*-periodica.*

Molteplicità di punti critici di un funzionale viene spesso ottenuta sfruttando la sua invarianza sotto l'azione di qualche gruppo, ad esempio l'azione del gruppo S^1, indotta dalle traslazioni temporali, in [21]-[27]-[34]. Potremmo ottenere in questa maniera risultati di molteplicità di punti critici per Φ_ω (i.e. soluzioni di (3)), ma, per funzionali come in (6), aventi un termine nonlineare dominante che è omogeneo, possiamo fornire una descrizione molto più precisa dei punti critici.

Infatti, punti critici di Φ_ω ristretti ad ogni sottospazio $V_n \subset V$ formato dalle funzioni di V che sono $2\pi/n$-periodiche nel tempo, sono punti critici di Φ_ω su tutto V. Per ogni $n \geq 1$, $\Phi_{\omega|V_n}$ possiede un punto critico di Mountain Pass v_n che, inoltre, per l'omogeneità di G, ha *periodo minimo* $2\pi/n$. Otteniamo così una successione di soluzioni periodiche u_n di (1) *geometricamente distinte*.

Questo approccio fornisce informazioni molto precise sui loro periodi minimi, sulle loro norme e sulle loro energie. Quando $\omega \to 1$, il numero N_ω di soluzioni $2\pi/\omega$-periodiche di piccola ampiezza $u_1, \dots, u_n, \dots, u_{N_\omega}$ che troviamo, cresce all'infinito come $N_\omega \approx \sqrt{\gamma^\tau / |\omega - 1|} \to +\infty$, per qualche $\tau \in [1, 2]$. Questa stima per N_ω è ottimale, cioè il numero di soluzioni

(4) Il termine omogeneo G assicura il «confinamento a 0» delle successioni di Palais-Smale al livello di Mountain Pass. Questo fatto è automaticamente soddisfatto in dimensione finita, vedi [21].

di piccola ampiezza con frequenza $\omega \approx 1$ è in generale ([5]) $O(\sqrt{1/|\omega - 1|})$.

Sottolineiamo che la dimostrazione di questi risultati quando $f(u) = au^p + h.o.t.$ con *p pari*, è molto più difficile del caso p dispari e richiede uno studio dettagliato del funzionale omogeneo G definito in (7).

Dimostriamo, infine, che tutte le soluzioni periodiche sono di classe almeno $C^2(\Omega)$.

Riassumendo, abbiamo i seguenti teoremi (per $\omega \in \mathcal{W} := \bigcup_{\gamma > 0} \mathcal{W}_\gamma$, poniamo $\gamma_\omega := \max\{\gamma \,|\, \omega \in \mathcal{W}_\gamma\}$):

TEOREMA 1.3 ([12]) (Molteplicità: p dispari). – *Sia $f(u) = au^p + h.o.t.$ per un intero dispari $p \geq 3$. Esiste una costante positiva $C_3 := C_3(f)$ tale che, $\forall \omega \in \mathcal{W}_\gamma$ e $\forall n \in \boldsymbol{N} \setminus \{0\}$ per cui*

$$\frac{|\omega - 1| n^2}{\gamma_\omega} \leq C_3$$

e $\omega > 1$ se $a > 0$ (risp. $\omega < 1$ se $a < 0$), l'equazione (1) *possiede almeno una soluzione periodica u_n, di classe C^2, avente periodo minimo $2\pi/(n\omega)$.*

TEOREMA 1.4 ([12]) (Molteplicità: p pari). – *Sia $f(u) = au^p$ per un intero pari p. Esiste una costante positiva $C_4 := C_4(f)$ tale che, $\forall \omega \in \mathcal{W}_\gamma$ e $\forall n \geq 2$ per cui*

$$\frac{(|\omega - 1| n^2)^{1/2}}{\gamma_\omega} \leq C_4$$

l'equazione (1) *possiede almeno una soluzione periodica u_n, di classe C^2, avente periodo minimo $2\pi/(n\omega)$. Per $p = 2$ il risultato vale anche per $n = 1$.*

Quando $f(u) = au^p + o(u^p)$, p pari, bisogna considerare altri due casi a seconda dei termini di ordine superiore della nonlinearità f, vedi [12] per i dettagli.

PROSPETTIVE. – Indebolire la condizione (4) di non-risonanza sulle frequenze applicando tecniche di tipo Nash-Moser, ottenendo analoghi risultati di esistenza e molteplicità per un insieme di frequenze aventi misura positiva.

([5]) Infatti, se $N^2 |\omega^2 - 1| \geq \gamma$, allora, dato che $j = l \geq N$ implica $|\omega^2 l^2 - j^2| = |\omega^2 - 1| j^2 \geq |\omega^2 - 1| N^2 \geq \gamma$, si può fare una riduzione di Lyapunov-Schmidt finito dimensionale in un piccolo intorno dell'origine di $V_N = \left\{ \sum_{j=1}^{N} \xi_j \cos jt \sin jx \right\}$ e il numero dei punti critici del nuovo funzionale ridotto $\Phi_\omega : \mathcal{D} \subset V_N \to \boldsymbol{R}$ è, in generale, $O(N)$.

REMARK 1.1 (Equazioni non risonanti e parzialmente risonanti). – *Nel caso in cui il sistema possieda solamente un numero finito di frequenze risonanti (equazioni non-risonanti o parzialmente risonanti) possiamo rimuovere qualsiasi limitazione sulla nonlinearità includendo anche i casi in cui manchi un termine omogeneo nonlineare dominante* G (*vedi nota* 4). *L'esistenza di soluzioni dell'equazione di biforcazione (finito dimensionale) discende applicando l'argomento variazionale del Teorema* 8.4 *di Fadell-Rabinowitz* [21]. *Miglioriamo pertanto i teoremi di* [3] *e* [8] *dati per:*

1) *l'equazione nonlineare delle onde con condizioni al bordo di Dirichlet (risp. periodiche)*

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + V(x)\,u = f(x, u), \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, \qquad (\text{risp. } u(x + 2\pi, t) = u(x, t)) \end{cases} \tag{8}$$

dove $f(x, u) = O(|u|^2)$ (*e risp.* f, V *sono* 2π *periodiche in* x);

2) *l'equazione delle piastre nel cubo d-dimensionale*

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u + au = f(x, u), \quad x \in \mathcal{Q}, \\ u_{|\partial \mathcal{Q}}(t, 0) = \Delta u_{|\partial \mathcal{Q}}(t, 0) = 0, \end{cases} \tag{9}$$

dove $a > 0$ *e* $\mathcal{Q} := \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{R}^d : 0 < x_i < \pi\}$. *Per* $V(x) \not\equiv 0$, $a \neq 0$ *le frequenze lineari di* (8) *e* (9) *possono essere non-risonanti o parzialmente non-risonanti.*

2. – Orbite periodiche di tipo Birkhoff-Lewis.

Le orbite periodiche ottenute nella precedente sezione sono le continuazioni dei modi normali di oscillazione lineare (hanno pertanto un periodo vicino a quello lineare) e sono state ottenute senza ipotesi sulla nonlinearità. Assumendo, invece, una condizione «*twist*» che garantisce un comportamento «sufficientemente nonlineare» del sistema, ci si aspetta di trovare, in ogni intorno dell'equilibrio, una grande abbondanza di orbite periodiche, aventi *periodo lungo*.

Nel 1934, in effetti, Birkhoff e Lewis [13]-[23] (vedi anche [28]) dimostrarono il loro celebre teorema di esistenza di orbite periodiche vicino a un punto di equilibrio ellittico e a un'orbita periodica ellittica non-costante (6). Il loro me-

(6) La motivazione principale per Birkhoff era la famosa congettura di Poincaré: «*...voici un fait que je n'ai pu démontrer rigoureusement, mais qui me parait pourtant très vraisemblable. Étant données des équations de la forme définie dans le n.* 13 *[le equazioni di Hamilton] et une solution particulière quelconque de ces équations, one peut toujours trouver une solution périodique (dont la période peut, il est vrai, être très longue), telle que la différence entre les deux solutions soit aussi petite qu'on le veut, pendant un temps aussi long qu'on le veut.*» ([29], Tome 1, ch. III, a. 36).

todo consiste nello scrivere il sistema, vicino all'equilibrio, e assumendo che le frequenze lineari siano non-risonanti almeno sino all'ordine (7) 4, in forma normale di Birkhoff, cioè

$$H = H_0 + G_4 + R_5, \qquad H_0 := \sum_{j=1}^{n} \omega_j \frac{p_j^2 + q_j^2}{2} \tag{10}$$

dove G_4 è un polinomio omogeneo di ordine 2 nelle azioni $I_j := (p_j^2 + q_j^2)/2$ e R_5 è un resto avente uno zero del quinto ordine nell'origine. Il sistema (10) può essere visto come una perturbazione del sistema integrabile $H_0 + G_4$. Assumendo una condizione «twist» (su G_4) la mappa azione-frequenza di questo sistema integrabile è un diffeomorfismo e pertanto esistono infiniti tori risonanti su cui il moto è periodico.

PROBLEMA. – Queste orbite periodiche sopravvivono all'aggiunta del termine di perturbazione R_5?

Birkhoff e Lewis hanno dimostrato che esiste una successione di tori risonanti che si accumulano nell'origine da cui «biforcano» almeno 2 orbite periodiche aventi lo stesso periodo.

Nell'estendere questi risultati a sistemi Hamiltoniani infinito dimensionali si incontrano 2 difficoltà principali: la prima (i) è la generalizzazione della *forma normale di Birkhoof per le PDEs*; la seconda (ii) è un problema di *piccoli denominatori*.

Circa il problema (i), scriviamo il sistema in «*forma semi-normale*» di Birkhoff, vedi Proposizione 2.1, e non consideriamo la forma normale di Birkhoff completa, la cui estensione alle PDEs non è completamente capita (si vedano comunque i recenti lavori [5], [6]). In seguito, grazie ad una condizione «twist», troviamo infiniti tori risonanti su cui il moto è periodico. Per continuare queste orbite periodiche, che sono degeneri, applichiamo nuovamente una riduzione di tipo Lyapunov-Schmidt.

Nel risolvere «l'equazione di range» (analoga all'eq. (P) della sezione precedente) incontriamo il problema (ii) dei «piccoli divisori» che risolviamo, analogamente a quanto già fatto nel caso delle equazioni completamente risonanti, imponendo alla frequenza dell'orbita periodica di soddisfare una forte condizione di non-risonanza con le frequenze trasversali: se il campo vettoriale nonlineare risulta sufficientemente regolarizzante allora tale equazione può essere risolta con il Principio delle Contrazioni. L'equazione di biforcazione (l'eq. (Q)) viene infine risolta sfruttando classici argomenti variazionali, quali la categoria di Lusternik-Schnirelmann.

(7) i.e. $\sum_{j=1}^{n} \omega_j k_j \neq 0$, $\forall k = (k_1, \dots, k_n) \in \boldsymbol{Z}^n$ con $\sum_{j=1}^{n} |k_j| \leq 4$.

Applichiamo il nostro teorema astratto all'equazione delle verghe

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xxxx} + mu = f(u), \\ u(0, t) = u(\pi, t) = u_{xx}(0, t) = u_{xx}(\pi, t) = 0, \end{cases} \tag{11}$$

e all'equazione di Schrödinger (20) con una nonlinearità regolarizzante del tipo considerato in [31].

Prima di presentare precisamente i risultati di [4], ottenuti assieme a D. Bambusi, menziono che in [10], assieme a L. Biasco e E. Valdinoci, abbiamo dimostrato l'esistenza di orbite periodiche, aventi periodi sempre più lunghi, che si accumulano su tori invarianti ellittici ([8]) finito dimensionali. Oltre alle PDEs, un'altra motivazione naturale per studiare questi problemi è la *Meccanica Celeste*. Consideriamo, ad esempio, il sistema Newtoniano *dei tre corpi spaziale*, cioè una «stella» e due «pianeti» che interagiscono con un potenziale gravitazionale Newtoniano nello spazio 3-dimensionale. Le masse dei pianeti sono i piccoli parametri ([9]). In [9] è stata dimostrata l'esistenza di tori invarianti ellittici bidimensionali. In [10] abbiamo dimostrato l'esistenza di infinite nuove orbite periodiche che si accumulano su di essi, ruotando attorno alla stella vicino ad ellissi Kepleriane con piccole eccentricità e piccole, ma non nulle, inclinazioni mutue. La verifica di una opportuna condizione *twist* si basa su una analisi KAM.

2.1. *Teorema per PDEs.*

Consideriamo l'Hamiltoniana reale

$$H(z, \bar{z}) = \sum_{j \geq 1} \omega_j z_j \bar{z}_j + P(z, \bar{z}) \equiv H_0 + P \tag{12}$$

dove P ha uno zero del terzo ordine nell'origine. Il campo vettoriale Hamiltoniano generato da H è $X_H(z, \bar{z}) := \left(\mathrm{i}\dfrac{\partial H}{\partial \bar{z}_j}, \ -\mathrm{i}\dfrac{\partial H}{\partial z_j}\right)$ e le equazioni di moto sono

$$\dot{z}_j = \mathrm{i}\omega_j z_j + \mathrm{i}\frac{\partial P}{\partial \bar{z}_j}, \qquad \dot{\bar{z}}_j = -\mathrm{i}\omega_j \bar{z}_j - \mathrm{i}\frac{\partial P}{\partial z_j}. \tag{13}$$

Lo spazio delle fasi in cui studiamo il sistema (13) è $\mathcal{P}_{a, s} := \mathcal{H}^{a, s}(\boldsymbol{C}) \times$

([8]) In [17] è stata dimostrata l'esistenza di infinite orbite periodiche vicino a tori KAM Lagrangiani. Il risultato di [10] contiene [17] come un caso particolare.

([9]) Poincaré e Delaunay hanno mostrato che si tratta di un sistema quasi-integrabile in dimensione 8, *propiamente degenere*, cioè il limite integrabile, in cui i tre corpi sono descritti da 2 sistemi a due corpi disaccoppiati, dipende solamente da due delle quattro variabili di azione. Tutti i moti limitati giacciono pertanto su tori invarianti bidimensionali che, inoltre, per piccole eccentricità e inclinazioni (di interesse astronomico) risultano ellittici.

$\mathcal{H}^{a,s}(\boldsymbol{C}) \ni (z, \bar{z})$ dove, per qualche $s \geqslant 0$, $a \geqslant 0$, $\mathcal{H}^{a,s}(\boldsymbol{C})$ è lo spazio di Hilbert complesso

$$\mathcal{H}^{a,s}(\boldsymbol{C}) := \left\{ w = (w_1, w_2, \ldots) \in \boldsymbol{C}^\infty \;\middle|\; \|w\|_{a,s}^2 := \sum_{j \geqslant 1} |w_j|^2 j^{2s} e^{2ja} < \infty \right\}.$$

Costruiamo adesso una trasformazione canonica che pone (13) in «*forma semi-normale*» di Birkhooff.

Fissiamo un intero $n \geqslant 2$, denotiamo $\omega := (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, $\Omega := (\omega_{n+1}, \omega_{n+2}, \ldots)$ e assumiamo che

(A) (*Crescita asintotica delle frequenze*) $\omega_j \sim \alpha j^{d_1}$ per qualche $\alpha > 0$ e $d_1 \geqslant 1$.

(NR) (*Non-risonanza*) $\omega \cdot k + \Omega \cdot l \neq 0$, $\forall k \in \boldsymbol{Z}^n$, $l \in \boldsymbol{Z}^\infty$, con $|l| \leqslant 2$ e $|k| + |l| \leqslant 5$.

(S) (*Regolarità*) In un intorno dell'origine $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}_{a,s}$ sia $X_P \in C^\infty(\mathcal{U}, \mathcal{P}_{a,s+d})$ per qualche $d \geqslant 0$.

Proposizione 2.1 (Forma semi-normale di Birkhoff). – *Si assuma (A, NR, S). Esiste un diffeomorfismo simplettico, reale analitico, $\mathcal{T}$, definito in un intorno $\mathcal{U}' \subset \mathcal{P}_{a,s}$ dell'origine, che trasforma l'Hamiltoniana H in forma seminormale all'ordine sei, cioè in*

$$H \circ \mathcal{T} \equiv \mathcal{H} = H_0 + \overline{G} + \widehat{G} + K,$$

dove $\overline{G} = (1/2) \sum_{\min(i,j) \leqslant n} \overline{G}_{ij} |z_i|^2 |z_j|^2$, $\overline{G}_{ij} = \overline{G}_{ji}$, $\widehat{G} = O(\|\hat{z}\|_{a,s}^3)$, $\hat{z} := (z_{n+1}, z_{n+2}, \ldots)$ *e* $K = O(\|z\|_{a,s}^6)$. *Inoltre* $X_{\overline{G}}$, $X_{\widehat{G}}$ *e* $X_K \in C^\infty(\mathcal{U}', \mathcal{P}_{a,s+d})$ *e* $\|z - \mathcal{T}(z)\|_{a,s+d} \leqslant C\|z\|_{a,s}^2$.

L'interesse di questa forma normale è che il sistema ottenuto trascurando il termine K possiede la varietà invariante $2n$-dimensionale $\hat{z} = 0$ su cui il sistema è integrabile ([10]).

Riscriviamo il sistema $\mathcal{H}$ nella forma

$$\mathcal{H} := \omega \cdot I + \Omega \cdot Z + \frac{1}{2} AI \cdot I + (BI, Z) + \widehat{G} + K \tag{14}$$

dove $I := (|z_1|^2, \ldots, |z_n|^2)$, $Z := (|z_{n+1}|^2, |z_{n+2}|^2, \ldots)$ sono le variabili di azione, $A = (\overline{G}_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ è la matrice $n \times n$ di «twist» e $B = (\overline{G}_{ij})_{1 \leqslant j \leqslant n < i}$ è una matrice $\infty \times n$. Introduciamo variabili di azione-angolo sui primi n modi mediante $z_j = |z_j| e^{i\phi_j} = \sqrt{I_j} e^{i\phi_j}$ per $j = 1, \ldots, n$.

([10]) Un'altra variante rispetto alla forma normale finito dimensionale di Birkhoff (10) è che abbiamo lasciato il termine del terzo ordine $\widehat{G}$ ma abbiamo normalizzato il sistema all'ordine 6 (invece che 5).

Per studiare soluzioni di piccola ampiezza è conveniente riscalare le variabili $I_j \to \eta^2 I_j$, $\phi_j \to \phi_j$ per $j = 1, \ldots, n$, $z_j \to \eta z_j$, $\bar{z}_j \to \eta \bar{z}_j$ per $j \geq n+1$ e dividere l'Hamiltoniana per η^2. Troviamo infine

$$\mathcal{H}(I, \phi, \hat{z}, \bar{\hat{z}}) = \omega \cdot I + \Omega \cdot Z + \eta \widehat{G}_\eta + \eta^2 \left(\frac{1}{2} AI \cdot I + (BI, Z) \right) + \eta^4 K_\eta . \tag{15}$$

dove $\widehat{G}_\eta = O(\|\hat{z}\|^3_{a,s})$ e $K_\eta(z) = O(\|z\|^6_{a,s})$.

Cerchiamo soluzioni periodiche di (15) vicino a soluzione periodiche del sistema *integrabile*

$$\dot{I} = 0, \quad \dot{\phi} = \omega + \eta^2 (AI + B^T Z), \quad \dot{z}_j = \mathrm{i}(\Omega_j + \eta^2 (BI)_j) z_j, \quad j \geq n+1 \tag{16}$$

dove $\widehat{G}_\eta$ e K_η sono state trascurate. La varietà $\{\hat{z} = 0\}$ è invariante per il sistema (16) ed è foliata dai tori invarianti $\mathcal{T}(I_0) := \{I = I_0, \phi \in \boldsymbol{T}^n, \hat{z} = 0\}$ su cui il moto è lineare con frequenze $\tilde{\omega} \equiv \tilde{\omega}(I_0) := \omega + \eta^2 AI_0$. Ciascun toro $\mathcal{T}(I_0)$ è ellittico e le frequenze di oscillazione trasversali sono

$$\widetilde{\Omega}_j(I_0) := (\Omega + \eta^2 BI_0)_j . \tag{17}$$

Se tutte le $\tilde{\omega}$ sono multipli interi di un'unica frequenza, cioè se $\tilde{\omega} := \omega + \eta^2 AI_0 = (2\pi/T)\, k \in (2\pi/T)\, \boldsymbol{Z}^n$, allora $\mathcal{T}(I_0)$ è un toro *completamente risonante*, foliato dalla famiglia di orbite T-periodiche $\mathcal{P} := \{I(t) = I_0, \phi(t) = \phi_0 + \tilde{\omega} t, \hat{z}(t) = 0\}$. Non tutte le orbite di $\mathcal{P}$ persisteranno nel sistema Hamiltoniano completo (15) a causa di risonanze tra le frequenze. Nel Teorema 2.1 dimostriamo comunque che almeno n orbite periodiche geometricamente distinte sopravvivono per η sufficientemente piccolo e per ogni scelta di I_0 e T soddisfacente

$$\|I_0\| \leq C, \qquad \frac{1}{\eta^2} \leq T \leq \frac{2}{\eta^2} ; \tag{18}$$

(H1) $\tilde{\omega} := \omega + \eta^2 AI_0 = (2\pi/T)\, k \in (2\pi/T)\, \boldsymbol{Z}^n$;
(H2) $\exists \delta > 0$ e $\tau < d$ tale per cui $|\widetilde{\Omega}_j T - 2\pi l| \geq \delta / j^\tau$, $\forall l \in \boldsymbol{Z}$, $\forall j \geq n+1$.

(H2) è una condizione di *non-risonanza* tra la frequenza $2\pi/T$ dell'orbita periodica cercata e le frequenze delle oscillazioni trasversali $\widetilde{\Omega}_j$. Le condizioni (18), (H1), (H2) possono essere soddisfatte:

LEMMA 2.1. – *Si fissi* $\tau > 1$. *Se* $\det A \neq 0$, $\widehat{\Omega}_j := (\Omega - BA^{-1}\omega)_j \neq 0$, $\forall j \geq n+1$, *allora*, $\forall \eta > 0$, *e per quasi tutti i* T *soddisfacenti* (18), *esiste un* I_0 *per cui valgono* (H1,H2).

Soluzioni periodiche del sistema Hamiltoniano completo (15) sono i punti critici del funzionale di azione

$$S(I, \phi, \hat{z}, \hat{\bar{z}}) = \int_0^T \Big(I \cdot \dot{\phi} + \mathrm{i} \sum_{j \geq n+1} z_j \dot{\bar{z}}_j - \mathcal{H}(I, \phi, \hat{z}, \hat{\bar{z}}) \Big)\, dt \tag{19}$$

nello spazio delle funzioni T-periodiche a valori in $\mathcal{P}_{a,s}$. Cerchiamo soluzioni periodiche di (15) (o punti critici di S) vicino alla varietà $\mathcal{P}$, cioè della forma $(\phi, I, \hat{z}, \hat{\bar{z}}) = (\phi_0 + \tilde{\omega} t, I_0, 0, 0) + (\psi, J, \hat{z}, \hat{\bar{z}})$ con piccole $\zeta := (\psi, J, \hat{z}, \hat{\bar{z}}) \in H^1(\mathbf{R}/\mathbf{TZ}, \mathcal{P}_{a,s})$. Per ovviare alla degenerazione delle orbite T-periodiche della famiglia $\mathcal{P}$ (cioè dei punti critici del funzionale S ottenuto trascurando i termini $\widehat{G}_\eta$ e K_η), dovuta alle traslazioni di $\phi_0 \in \boldsymbol{T}^n$, realizziamo nuovamente una riduzione di tipo Lyapunov-Schmidt. Explicitamente cerchiamo $\zeta = (\phi_0 + \psi, J, \hat{z}, \hat{\bar{z}}) = (\psi, J, \hat{z}, \hat{\bar{z}}) + (\phi_0, 0, 0, 0) \equiv \zeta_R + \phi_0$ dove ψ ha media nulla e ϕ_0 è una costante. Nel risolvere l'equazione di range, i.e. l'equazione per ζ_R con ϕ_0 fissato, incontriamo i piccoli divisori $\widetilde{\Omega}_j T - 2\pi l$, $l \in \boldsymbol{Z}$, $j \geq n+1$ stimati dal basso in (H2). Se il campo vettoriale della nonlinearità X_P è sufficientemente regolarizzante, cioè $d \geq \tau$, allora l'equazione di range può essere risolta con il teorema delle contrazioni.

L'equazione di biforcazione, i.e. l'equazione per $\phi_0 \in \boldsymbol{T}^n$, viene poi risolta notando che è l'equazione di Eulero-Lagrange del funzionale di azione S ristretto alle soluzioni dell'equazione di range e ci si riconduce così a trovare punti critici di un funzionale definito su $\boldsymbol{T}^n$. Esistenza e la molteplicità di soluzioni segue dalla classica teoria di Lusternik-Schnirelmann. In conclusione abbiamo:

TEOREMA 2.1 ([4]). – *Se T e I_0 soddisfano* (18) *ed* (H1, H2), *allora, per η sufficientemente piccolo, esistono almeno n soluzioni T-periodiche geometricamente distinte del sistema Hamiltoniano $\mathcal{H}$ definito in* (15) *che sono η^2 vicine in $\mathcal{P}_{a,s}$ al toro $\mathcal{T}(I_0)$.*

Ritornando al sistema Hamiltoniano originale (13) troviamo:

TEOREMA 2.2 ([4]). – *Si consideri il sistema Hamiltoniano* (13) *e si fissi un intero positivo n. Si assuma che valgano* (A,NR,S), $\det A \neq 0$ *e che* $\widehat{\Omega}_j \neq 0$, $\forall j \geq n+1$. *Infine si assuma* $d > 1$.

Allora, per ogni $\eta \ll 1$ existono almeno n orbite T-periodiche geometricamente distinte $z^{(1)}(t), \ldots, z^{(n)}(t)$ con le seguenti proprietà:

- $\|z^{(l)}(t)\|_{a,s} \leq C\eta$ *for* $l = 1, \ldots, n$ *e* $t \in \boldsymbol{R}$;
- $\|\Pi_{>n} z^{(l)}(t)\|_{a,s} \leq C\eta^2$ *per* $l = 1, \ldots, n$ *e* $t \in \boldsymbol{R}$; *qui* $\Pi_{>n}$ *è il proiettore sui modi con indice più grande di* n;
- *Il periodo T di $z^{(l)}$ soddisfa* $\eta^{-2} \leq T \leq 2\eta^{-2}$.

APPLICAZIONI. – 1) *L'equazione delle verghe nonlineare.* Consideriamo l'equazione (11) dove $f(u)$ è una funzione reale analitica, dispari, della forma $f(u) = au^3 + \sum_{k \geqslant 5} f_k u^k$, $a \neq 0$. L'equazione (11) è Hamiltoniana, con $H = \int_0^\pi (u_t^2/2) + (u_{xx}^2/2) + (mu^2/2) + g(u)\, dx$ e $g(u) := \int_0^u f(s)\, ds$. Introducendo coordinate $q = (q_1, q_2, \ldots)$, $p = (p_1, p_2, \ldots)$ mediante

$$u(x) = \sum_{j \geqslant 1} (q_j/\sqrt{\omega_j})\sqrt{2/\pi}\sin(jx), \quad v(x) = \sum_{j \geqslant 1} p_j\sqrt{\omega_j}\sqrt{2/\pi}\sin(jx),$$

dove $\omega_j = \sqrt{j^4 + m} \sim j^2$ e passando a coordinate complesse $z_j := (q_j + \mathrm{i}p_j)/\sqrt{2}$, $\bar{z}_j := (q_j - \mathrm{i}p_j)/\sqrt{2}$, l'Hamiltoniana H assume la forma (12) e la nonlinearità soddisfa (S) con $s \geqslant 1$, un opportuno $a > 0$ che dipende dal raggio di analiticà di f in 0, e $d = 2$.

Da un conto esplicito dimostriamo che la matrice di twist A è invertibile e che *tutte* le ipotesi dei teoremi astratti 2.1–2.2 sono soddisfatte escludendo un numero finito di masse $m \in [0, L]$.

2) *Un'equazione di Schrödinger nonlineare.* Seguendo Pöschel [31] consideriamo l'equazione di Schrödinger nonlineare

$$\begin{cases} \mathrm{i}u_t = \partial_{\bar{u}} H(u, \bar{u}), \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, \end{cases} \tag{20}$$

dove l'Hamiltoniana è $H(u, \bar{u}) = \int_0^\pi |u_x|^2 + P(|\Gamma u|^2)\, dx$, P è una funzione analitica con uno zero di ordine 2 nell'origine, $\Gamma u := \varrho * u$ e la $*$ denota la convoluzione tra u e una funzione pari $\varrho(x) := \sum_j \varrho_j \cos(jx)$, regolare, i.e. $|\varrho_j| \leqslant Cj^{-d/2}$, $d > 1$. Inserendo lo sviluppo di Fourier per $u = \sum_j u_j \sin(jx)$ l'Hamiltoniana assume la forma (12) con $\omega_j = j^2$ e il campo vettoriale X_P soddisfa (S) con d dato dalla regolarità di ϱ.

La condizione di non-risonanza (NR) è violata. È comunque chiaro che, con argomenti simili a quelli della Proposizione 2.1, si può ridurre il sistema a una *forma normale risonante*, cioè contenente solamente monomi che sono in involuzione con H_0. Un conto esplicito mostra, poi, che questa nuova forma normale *dipende solamente dalle azioni* e che, pertanto, si possono ripetere i medesimi argomenti per trovare le orbite periodiche di tipo Birkhoff-Lewis. Anche in questo caso la matrice di twist A risulta invertibile ed, esclusi un insieme $\{\varrho_j\}_{j \geqslant n+1}$, *i teoremi* 2.1-2.2 *possono essere applicati.*

PROSPETTIVE. – Studiare la sopravvivenza di orbite periodiche di tipo Birkhoof-Lewis derivanti da tori risonanti *infinito dimensionali* della forma normale di Birkhoff completa e, applicando tecniche di tipo Nash-Moser, richiedere condizioni di non-risonanza più deboli di $(H2)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. AMBROSETTI - V. COTI-ZELATI - I. EKELAND, *Symmetry breaking in Hamiltonian systems*, Journal Diff. Equat., **67** (1987), 165-184.

[2] A. AMBROSETTI - P. RABINOWITZ, *Dual Variational Methods in Critical Point Theory and Applications*, Journ. Func. Anal, **14** (1973), 349-381.

[3] D. BAMBUSI, *Lyapunov Center Theorems for some nonlinear PDEs: a simple proof*, Ann. Sc. Norm. Sup. di Pisa, Ser. IV, vol. XXIX, fasc. 4, 2000.

[4] D. BAMBUSI - M. BERTI, *A Birkhoof-Lewis type Theorem for some Hamiltonian PDEs*, preprint SISSA, available at http://www.math.utexas.edu/mp_arc.

[5] D. BAMBUSI, *Birkhoff normal form for some nonlinear PDE*s, Commun. Math. Phys., **234** (2003), 253-285.

[6] D. BAMBUSI - B. GREBERT, *Forme normale pour NLS en dimension quelconque*, C.R. Acad. Sci. Paris Ser., **1**, 337 (2003), 409-414.

[7] D. BAMBUSI - S. PALEARI, *Families of periodic solutions of resonant PDEs*, J. Nonlinear Sci., **11** (2001), 69-87.

[8] D. BAMBUSI - S. PALEARI, *Families of periodic orbits for some PDE's in higher dimensions*, Comm. Pure and Appl. Analysis, Vol. 1, n. 4, 2002.

[9] L. BIASCO - L. CHIERCHIA - E. VALDINOCI, *Elliptic two-dimensional invariant tori for the planetary three-body problem*, **170**, n. 2 (2003), 91-135.

[10] M. BERTI - L. BIASCO - E. VALDINOCI, *Periodic orbits close to elliptic tori and applications to the three body problem*, to appear on Ann. Sc. Norm. Sup. di Pisa, 2004.

[11] M. BERTI - P. BOLLE, *Periodic solutions of Nonlinear wave equations with general nonlineairties*, Commun. Math. Phys., **243** (2003), 315-328.

[12] M. BERTI - P. BOLLE, *Multiplicity of periodic solutions of Nonlinear wave equations*, Nonlinear Analysis, TMA, **56** n. 7 (2004), 1011-1046.

[13] G. D. BIRKHOOF - D. C. LEWIS, *On the periodic motions near a given periodic motion of a dynamical system*, Ann. Mat., **12** (1934), 117-133.

[14] J. BOURGAIN, *Construction of periodic solutions of nonlinear wave equations in higher dimension*, Geom. and Func. Anal., vol. 5, n. 4, 1995.

[15] J. BOURGAIN, *Quasi-periodic solutions of Hamiltonian perturbations of $2D$ linear Schrödinger equations*, Ann. of Math., **148** (1998), 363-439.

[16] L. CHIERCHIA - J. YOU, *KAM tori for $1D$ nonlinear wave equations with periodic boundary conditions*, Comm. Math. Phys., **211**, no. 2 (2000), 497-525.

[17] C. CONLEY - E. ZEHNDER, *An index theory for periodic solutions of a Hamiltonian system*, Lecture Notes in Mathematics 1007, Springer, 1983, 132-145.

[18] W. CRAIG, *Problèmes de petits diviseurs dans les équations aux dérivées partielles*, Panoramas et Synthèses, 9, Société Mathématique de France, Paris, 2000.

[19] W. CRAIG - E. WAYNE, *Newton's method and periodic solutions of nonlinear wave equation*, Comm. Pure and Appl. Math, vol. XLVI (1993), 1409-1498.

[20] W. CRAIG - E. WAYNE, *Nonlinear waves and the* $1:1:2$ *resonance*, Singular limits of dispersive waves (Lyon, 1991), 297–313, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B Phys., 320, Plenum, New York, 1994.

[21] E. R. FADELL - P. RABINOWITZ, *Generalized cohomological index theories for the group actions with an application to bifurcations question for Hamiltonian systems*, Inv. Math., **45** (1978), 139-174.

[22] G. GENTILE - V. MASTROPIETRO, *Construction of periodic solutions of the nonlinear wave equation with Dirichlet boundary conditions by the Lindstedt series method*, to appear on Journal Math. Pures' Appl.

[23] D. C. LEWIS, *Sulle oscillazioni periodiche di un sistema dinamico*, Atti Acc. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., **19** (1934), 234-237.
[24] A. M. LYAPUNOV, *Problème général de la stabilité du mouvement*, Ann. Sc. Fac. Toulouse, **2** (1907), 203-474.
[25] B. V. LIDSKIJ - E. I. SHULMAN, *Periodic solutions of the equation* $u_{tt} - u_{xx} + u^3 = 0$, Funct. Anal. Appl., **22** (1980), 332-333.
[26] S. B. KUKSIN, *Perturbation of conditionally periodic solutions of infinite-dimensional Hamiltonian systems*, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. **52**, no. 1 (1988), 41-63.
[27] J. MOSER, *Periodic orbits near an Equilibrium and a Theorem by Alan Weinstein*, Comm. on Pure and Appl. Math., vol. XXIX, 1976.
[28] J. MOSER, *Proof of a generalized form of a fixed point theorem due to G. D. Birkhoof*, Geometry and Topology, Lectures Notes in Math., **597** (1977), 464-494.
[29] H. POINCARÉ, *Les Méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste*, Gauthier Villars, Paris, 1892.
[30] J. PÖSCHEL, *A KAM-Theorem for some nonlinear PDEs*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci., **23** (1996), 119-148.
[31] J. PÖSCHEL, *On the construction of almost periodic solutions for a nonlinear Schrödinger equation*, Ergodic Theory Dynam. Systems, **22** (2002), 1537-1549.
[32] P. RABINOWITZ, *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 65.
[33] E. WAYNE, *Periodic and quasi-periodic solutions of nonlinear wave equations via KAM theory*, Commun. Math. Phys., **127**, no. 3 (1998), 479-528.
[34] A. WEINSTEIN, *Normal modes for Nonlinear Hamiltonian Systems*, Inv. Math, **20** (1973), 47-57.

SISSA, via Beirut 2-4, 34014, Trieste, Italia, berti@sissa.it.

Pervenuta in Redazione
il 3 dicembre 2003

ADDED IN PROOF. – L'esistenza di soluzioni periodiche per equazioni completamente risonanti per un insieme di frequenze di misura positiva, è stata recentemente dimostrata in G. GENTILE, V. MASTROPIETRO, M. PROCESI, *Periodic Solutions for Completely Resonant Nonlinear Wave Equations*, preprint 2004 and M. BERTI, P. BOLLE, *Bifurcation of Periodic Solutions for Completelly Resonant PDEs and the Nash-Moser Theorem*, preprint 2004.