Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Laura Catastini, Franco Ghione

Nella mente di Desargues tra involuzioni e geometria dinamica

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **8-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2005), n.1, p. 123–147.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_1_123_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2005.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VIII-A, Aprile 2005, 123-147

Nella mente di Desargues tra involuzioni e geometria dinamica.

LAURA CATASTINI - FRANCO GHIONE

«Il vero mistero è l'esistenza
di un pensiero qualunque,
di un qualunque processo mentale»
J. HADAMARD

1. – Introduzione.

Nel precedente lavoro, dal titolo «Il giardino di Desargues», pubblicato su questa rivista (Agosto 2004, 321-345), è stata analizzata la insolita figura scientifica di Desargues e abbiamo interpretato il suo particolare linguaggio matematico come un tentativo di guidare il pensiero attraverso le parole verso immagini nuove capaci di rappresentare lo spazio che lui aveva immaginato e dove aveva collocato l'infinito. L'introduzione di punti all'infinito modifica non solo la struttura dello spazio (del quale diventa impossibile, per motivi topologici, farsi una immagine globale) ma anche le figure che in quello spazio sono tracciate. Esse infatti acquistano una particolare rilevanza proprio nel modo col quale si rapportano all'infinito. Da una lato dunque le figure euclidee, sempre chiuse e limitate, vengono a perdere la loro centralità rispetto a quelle che toccano l'infinito, d'altro lato proprio questa loro compattezza ne permetteva una rappresentazione attraverso un'immagine su un foglio di carta in grado di guidare l'intuizione geometrica. Ora questa operazione diventa spesso impossibile e per questo Desargues cerca di creare nuovi strumenti che gli vengono suggeriti dalla sua pratica di architetto, ingegnere e dalle suggestioni del disegno prospettico.

Ricordiamo alcune definizioni di Desargues ampiamente discusse nel precedente lavoro anche dal punto di vista cognitivo. Il **tronco** (tronc) è una retta (sempre pensata estesa fino all'infinito dalle due parti) alla quale si appoggiano, in punti detti **nodi** (neud) altre rette dette **rami** (rameau). Un ramo, o una sua parte, può essere **dispiegato** (déployé) o **piegato** (plié) sul tronco a seconda che si sovrapponga o meno al tronco. I **but** sono i punti al finito o all'infinito dove si incontrano due rette. I segmenti di un ramo che vanno dal nodo a un altro ramo sono detti **ramoscelli** (brin de rameau)

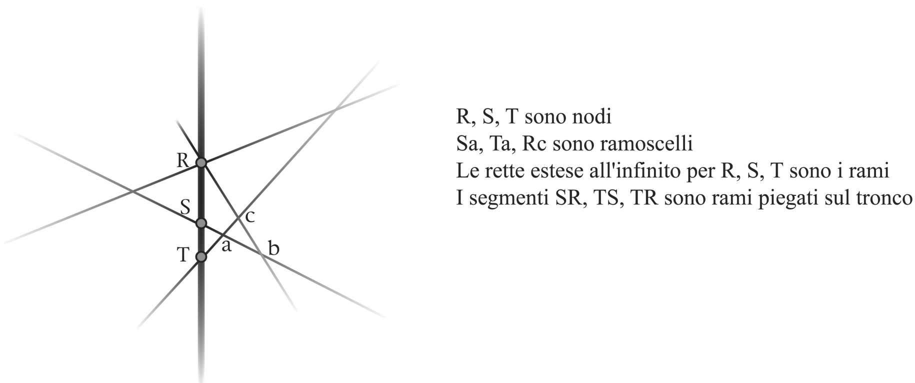


Immagine 1

Tre coppie di nodi di un tronco, AA′, BB′, CC′ si dice formano una **involuzione** se, nel linguaggio di Desargues ([1]), il rapporto tra i rettangoli relativi è uguale a quello tra i loro gemelli, se cioè

$$\text{(1)} \qquad \frac{\mathrm{AB} \times \mathrm{B'\,A}}{\mathrm{A'\,B} \times \mathrm{B'\,A'}} = \frac{\mathrm{AC} \times \mathrm{C'\,A}}{\mathrm{A'\,C} \times \mathrm{C'\,A'}}\,.$$

Dove con AB indichiamo la lunghezza con segno del segmento AB una volta orientato il piano e fissata una unità di misura. Si vede dunque come, a questo livello, il concetto di involuzione sia di natura metrica o meglio affine coinvolgendo rapporti tra segmenti.

([1]) Per sottolineare l'importanza della relazione seguente, Desargues introduce ancora delle nuove parole. Date delle coppie di nodi coniugati A, A′ e B, B′, C, C′ e un nodo P i rettangoli $\mathrm{PA} \times \mathrm{A'\,P}$, $\mathrm{PB} \times \mathrm{B'\,P}$, $\mathrm{PC} \times \mathrm{C'\,P}$ vengono chiamati *rettangoli gemelli*, mentre al rettangolo $\mathrm{PA} \times \mathrm{A'\,P}$ si può associare un altro rettangolo ad esso relativo prendendo il coniugato P′ di P: i rettangoli $\mathrm{PA} \times \mathrm{A'\,P}$ e $\mathrm{P'\,A} \times \mathrm{A'\,P'}$ vengono chiamati *rettangoli relativi.*

Nel corso di questo lavoro diamo, spesso in nota, le dimostrazioni dei teoremi che enunciamo essendo queste per la maggior parte quelle fornite da Desargues, con il duplice scopo di fare una rassegna storica, il più possibile fedele, delle idee e tecniche del geometra lionese, e indicare un percorso didattico che dalle involuzioni conduce, in uno spirito che a noi pare più semplice e diretto, al teorema di Pascal sull'esagono inscritto in una conica, uno dei gioielli del pensiero matematico.

2. – «Ricentramenti cognitivi» del teorema di Menelao.

Il teorema di Menelao piano ([2]) è uno dei pochissimi prerequisiti su cui Desargues fonda le sue dimostrazioni, e per questo, ma soprattutto per il modo nuovo con cui lui lo presenta, ha per noi particolare importanza. Il solo confronto, cui ora accenniamo brevemente, tra la sua formulazione e quelle precedenti, mette in luce l'approccio nuovo, le dinamiche intuitive che vengono suggerite e fa capire come uno stesso enunciato matematico possa arricchirsi, a seconda del modo in cui viene presentato, di significati profondi che vanno ben al di là di una semplice esattezza formale.

Questo teorema non fa parte delle proposizioni dei 13 libri degli *Elementi* di Euclide, mentre lo troviamo nella *Sferica* di Menelao, matematico e astronomo alessandrino del II secolo dopo Cristo, come lemma introduttivo per dimostrare un analogo teorema (oggi noto come teorema di Menelao) nella geometria della sfera. Per questa via Menelao [9] riuscì a sviluppare una teoria quantitativa sui triangoli sferici e sui rapporti tra le «ampiezze» dei lati, in un contesto, quello sferico, dove non esistono «rette» parallele. In quell'ambito ebbe a che fare con concetti invarianti per proiezione, quali ad esempio quello di rapporto armonico ([3]) [9], tipici di una geometria, come quella proiettiva, che prescinde dal concetto di parallelismo. Le applicazioni astronomiche della geometria della sfera renderanno il teorema di Menelao di grande utilità e per questo lo ritroviamo nell'*Almage-*

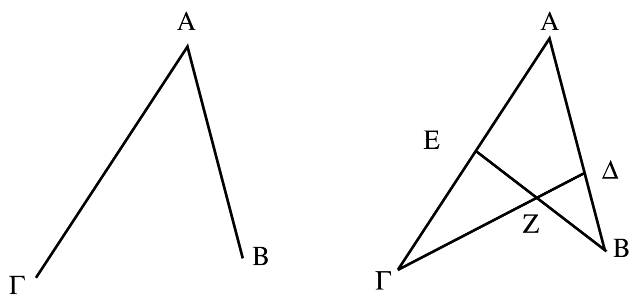
([2]) In questa nota per teorema di Menelao piano, o più semplicemente teorema di Menelao, intendiamo la versione piana data da Tolomeo dell'analogo teorema di Menelao relativo alla geometria sferica.

([3]) In [9], Libro III, proposizione VII e VIII.

sto di Tolomeo ([4]) [10] dove viene applicato per calcolare, per via teorica, l'altezza del Sole sull'orizzonte in un dato giorno dell'anno. È questa la versione del teorema che Desargues cita e per questo la riproduciamo letteralmente, come si trova nel testo di Tolomeo:

> Se due rette AB, AΓ, che si incontrano in A, sono tagliate da altre due rette ΓΔ, BE, che si intersecano nel punto Z, dico che il rapporto tra il segmento di retta AE ed il segmento di retta EΓ è uguale al rapporto tra il segmento di retta ΔZ e il segmento di retta ZΓ, composto con il rapporto tra il segmento di retta BA ed il segmento di retta BΔ.

L'immagine che si forma è quella di due segmenti che si incontrano in A ai quali se ne aggiungono altri due che si incontrano in Z



in questa situazione vale una certa relazione che lega i rapporti tra le lunghezze dei segmenti che nascono dall'intersezione delle rette. Precisamente

$$\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{E\Gamma}} = \frac{\Delta\mathrm{Z}}{\mathrm{Z\Gamma}} \times \frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{B\Delta}} .$$

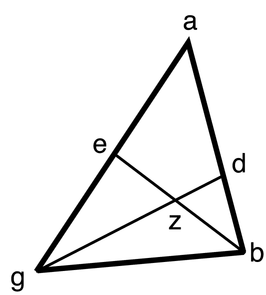
Fibonacci [11] nella sua *Pratica geometrica*, riporta il teorema di Menelao con l'uso delle stesse lettere latinizzate scelte da Tolomeo (che probabilmente è stato la sua fonte) ma con una formulazione che richiama una diversa Gestalt ([5]):

([4]) In [10], Libro I. 13, pp. 64-69.

([5]) Il testo di Fibonacci recita: *si in trigo .abg. ab angulis .gb. egrediantur recte .be. et .gd. se inuicem secantes super punctum .z; et sit nota proportio ex .ge. ad .ae. et ex .bd. ad .da., erunt utique note proportiones .bz. ad .ze. et .gz. ad .zd.* segue poi la formula del prodotto nei vari casi che possano considerarsi. In [11, Vol. II, pag. 51].

Se in un triangolo .abg. tracciamo delle rette .be. e .gd. che escono dagli angoli .b. .g. e se queste si incontrano nel punto .z. allora, se è noto il rapporto tra .ge. e .ae. e tra .bd. e .ad. allora è noto anche il rapporto tra .bz. e .ze. e tra .gz. e .zd.

La configurazione di Menelao, data dall'intersezione di quattro segmenti, si trasforma in un triangolo fisso contenente due segmenti. .gd. e .be., uscenti dai vertici g e b, ed intersecantesi in .z.



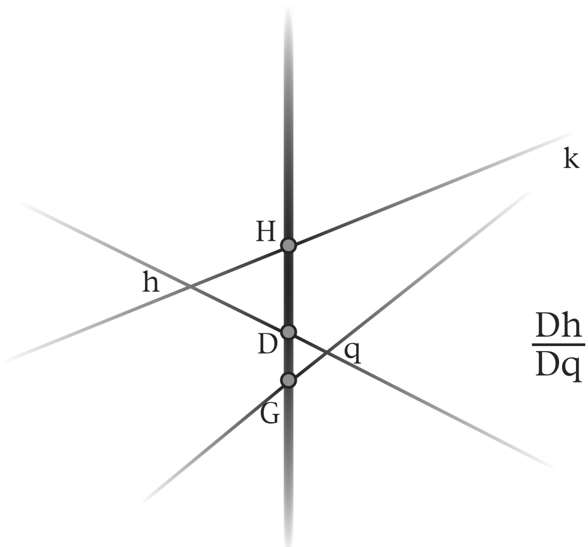
Notiamo che il triangolo è curiosamente una figura ridondante in rapporto all'enunciato del teorema., ma la sua «chiusura» crea buona struttura gestaltica, che si richiama facilmente alla memoria e che guida la ricostruzione delle possibili relazioni numeriche. Le relazioni che legano i vari rapporti venivano all'epoca usate meccanicamente nella soluzione di problemi numerici e commerciali ampiamente riportati nel *Liber Abaci* con il nome di *regula baracti* ([6]) o *regula sex quantitatum*, perché date cinque di sei quantità incognite, porta a ricavare la sesta, e questo ricentramento del testo poteva essere funzionale a una pratica di memorizzazione ad uso più di mercanti che di matematici.

Nel giardino di Desargues il teorema di Menelao cambia ancora fisionomia, si inserisce nel nuovo sfondo che lui ha immaginato, tocca l'infinito ([7])

([6]) In [11] vol. I pag. 118.

([7]) Quand en une droite H, D, G, comme tronc, a trois points H, D, G, comme noeus, passent trois droites comme rameaux déployer Hkh, Dqh, Gqk, le quelconque brin Dh, du quelconque de ces rameaux Dqh contenu entre son noeu D, & le quelconque des deux autres rameaux Hkh, est a son accuplé le brin Dq contenu entre le mesme noeu D, & l'autre troisieme des mesmes rameaux Gqk en raison mesme que la

Quando su una retta HDG, pensata come tronco, per tre punti H,D,G, pensati come nodi, passano tre rette come rami dispiegati Hkh, Dqh, Gqk, qualunque getto Dh di qualunque di questi rami Dqh, che esce dal suo nodo D e arriva al ramo Hkh, sta al suo getto accoppiato Dq che esce dallo stesso nodo D arriva al terzo ramo Gqk, nello stesso rapporto del rapporto composto tra i getti su ciascuno degli altri due rami convenientemente ordinati...



$$\frac{Dh}{Dq} = \frac{Hh}{Hk} \times \frac{Gk}{Gq}$$

Immagine 2

Segue la dimostrazione che è essenzialmente uguale a quella che riporta Tolomeo.

L'accento del teorema è messo sul tronco, sui tre nodi e sui rami che si dispiegano dal tronco, creando una immagine dinamica nella quale vediamo le varie configurazioni che questi rami possono assumere ruotando attorno ai nodi, liberi di diventare anche paralleli tra loro. La «regola delle sei quantità» è ora presentata in modo diverso: tra le 4 rette che intervengono nel teorema, ne viene fatta emer-

composée des raisons d'entre les deux brins de chacun des autres deux rameaux convenablement ordonnez, à savoir de la raison du brin comme Hh, au brin comme Hk, & de la raison du brin comme Gk, au brin comme Gq. In [2. pag 126] gere una in particolare mediante l'attribuzione di un nome specifico ([8]), il tronco. In questa lettura la formula che lega i vari rapporti coinvolge così solo i *brin*, i ramoscelli, che escono dai nodi H, D, G, e che vanno ai *but* h, k, q, punti in cui questi ramoscelli arrivano ad incontrare gli altri rami. Le grandezze hk, hq , qk, che non hanno un nome particolare che le definisca, non hanno alcuna parte nella formula ([9]).

L'immagine che in questo modo si forma ci permette di intuire come nulla cambi anche nel caso in cui qualche punto vada all'infinito. Comunque i rami si dispieghino, hanno sempre un comune *but*, in virtù del principio che Desargues premette all'inizio del *Brouillon* secondo il quale due rette nel piano hanno sempre un comune

([8]) Nella letteratura matematica successiva, in Carnot, ad esempio o in Poncelet, che non conoscevano il lavoro di Desargues, questa retta particolare viene chiamata col nome di trasversale, nome che è rimasto anche oggi nella letteratura corrente, e il teorema di Menelao viene riferito a un triangolo (hkq) tagliato da una trasversale.

([9]) Le lettere che abbiamo usato non sono totalmente conformi a quelle che si trovano nell'edizione di Poudra [1] e in quella di Taton [2] (che non coincidono tra loro) ma abbiamo motivo di credere che le nostre interpretino meglio il pensiero di Desargues. Pensiamo che egli abbia indicato i *but* con lettere minuscole per distinguerli dai nodi anche nella notazione oltre che nel lessico e nel significato che assumono nel contesto del teorema. Purtroppo le figure originali sono andate perse e quelle esistenti provengono da una copia manoscritta di La Hire non del tutto attendibile. Nell'edizione di Poudra del 1864 la cosa è piuttosto confusa: mentre il punto h non cambia mai denominazione, il punto indicato inizialmente come q diventa successivamente e senza motivo un 4, cosa che può trovare una spiegazione nel fatto che la sua forma può confondersi nella grafia a mano con quella del q. Anche il punto che noi abbiamo indicato con k viene invece riportato maiuscolo. Possiamo pensare a un simile fraintendimento se consideriamo che nella scrittura a mano la sua forma maiuscola può confondersi con quella minuscola e che la scelta del carattere, da un punto di vista strettamente formale, è irrilevante. Nell'edizione curata da Taton, ottenuta sulla base del testo originale, sono riportate delle note aggiunte dallo stesso Deasrgues, una sorta di errata-corrige, che a nostra avviso confermano l'ipotesi che abbiamo fatta. Infatti, in relazione all'enunciato del teorema di Menelao, Desargues sente la necessità di precisare che «generalmente le K sono lettere maiuscole». Poichè da quel punto in poi le K sono comunque tutte maiuscole, non si capisce il senso della precisazione se non per il fatto che in quel caso (e solo in quel caso) la k è scritta, per il significato che ha, minuscola. Quanto al fatto che abbiamo usato la q al posto del 4 che invece troviamo, questa volta coerentemente, nella versione di Taton, la cosa ci pare meno rilevante. È certamente più naturale l'uso di una lettera al posto di un numero in questo contesto dove essendo pochi i punti in gioco, non avrebbe alcun senso mischiare lettere a numeri.

but. (10). Anche la relazione algebrica, per ragioni di continuità, deve avere una naturale «degenerazione» non difficile da trovare. Desargues nota esplicitamente (11):

> Ci sono molte cose da osservare in questo enunciato quando due dei tre rami sono paralleli tra loro; quando al tronco ci sono due nodi uniti in uno e ciò che ne deriva dove il pensiero non vede più nulla.

Ciò che accade, infatti, quando k tende all'infinito è che il rapporto tra Gk e Hk tende a 1 e la regola si riduce alla uguaglianza

$$\frac{\mathrm{Dh}}{\mathrm{Dq}} = \frac{\mathrm{Hh}}{\mathrm{Gq}}$$

che esprime la proporzionalità dei lati corrispondenti in due triangoli HhD e GqD che diventano simili quando il ramo per H è parallelo a quello per G. Il teorema sulla proporzionalità dei lati nei triangoli simili diventa una degenerazione del teorema di Menelao quando parte della figura va all'infinito. I teoremi stessi diventano oggetti dinamici, degenerano uno nell'altro in un quadro complessivo dove il rapporto con l'infinito genera un nuovo ordine, nuova conoscenza.

Ancora più ardita è la degenerazione ottenuta quando un nodo vada a sovrapporsi ad un altro: la forma cambia completamente, il suo significato sfugge, *«l'entendement ne voit goute»* e la figura limite, con la formula che si porta dietro, viene a dipendere dal modo con cui i due nodi, e i rami per essi, vanno a sovrapporsi tra loro.

In questo quadro l'oggetto euclideo, il triangolo, appare solo come caso accidentale e non ha alcun ruolo. In tutto il *Brouillon* il termine «triangolo» non è mai usato, se non in contesti molto particolari dove si applicano i risultati della teoria in situazioni standard. Lo stesso teorema oggi noto come teorema di Desargues sui triangoli omologici, nell'enunciazione originale (12) non contiene il termine

(10) In [2] pa. 100.

(11) Il y a plusieurs choses à remarquer de cette énunciation, quand deux des trois rameaux sont parallels entre eux; quand au tronc il y a deux noeuds unisen un, & ce qui en dépende où l'entendement ne void goutte. In [2], pag. 126.

(12) In [1], pp. 206-207.

triangolo. Questo termine richiama alla mente lati e angoli che irrigidiscono la figura entro confini di un foglio mentre per Desargues un «triangolo» è una terna di rette che non fanno parte di uno stesso fascio e che può toccare l'infinito.

Appare dunque come l'universo che Desargues ha in mente sia completamente diverso da quello euclideo, sia nella definizione dell'ambiente che per le forme che in questo ambiente vivono, e come sia di conseguenza opportuno rimuovere rigidità mentali legati a una consolidata consuetudine per far emergere le nuove concezioni. Crediamo che proprio l'uso del nuovo linguaggio, che più di d'ogni altra cosa è stato avversato, avrebbe potuto aprire le porte della comprensione alla geometria proiettiva. Purtroppo la storia ha avuto esiti diversi e le proposte di Desargues sono state ignorate e perdute per quasi 200 anni e oggi che questa materia si è imposta con i suoi oggetti e le sue definizioni seguendo strade diverse diventa improponibile tornare alle origini. Ci resta il significato esemplare del metodo desarguesiano, la sua attenzione didattica nei confronti delle immagini mentali, il suo legame con la concretezza e l'intuizione anche nelle situazioni più astratte, ci resta lo stimolo a rivedere criticamente il nostro stesso lavoro di insegnanti.

3. – Menelao si piega sul tronco.

I vari movimenti che Desargues suggerisce presentandoci il teorema di Menelao e il suo linguaggio metaforico, ci hanno fatto pensare a una ulteriore drastica degenerazione ottenuta «chiudendo» tutta la configurazione sul tronco e ci hanno indotto a cercare di capire le conseguenti modificazioni della formula algebrica. Se fossimo riusciti a trovare un risultato interessante avremmo capito il motivo per cui Desargues parla di rami dispiegati e piegati sul tronco: questa metafora, apparentemente enigmatica, sarebbe diventata «produttiva». Dato il contesto, abbiamo pensato a una proiezione centrale: abbiamo proiettato sul tronco la configurazione relativa al teorema di Menelao. Così facendo i getti si stendono nell'unica dimensione della retta e otteniamo in questo modo sei punti: i tre nodi e le proiezioni dei tre *but*. Sei punti che possiamo accoppiare tra loro in modo naturale, associando ad un nodo la proiezione del *but* comune ai due rami che non passano per il nodo stesso. Ecco la nostra nuova immagine: proiettando sul tronco da un punto d scelto ad arbitrio, i *but* a, b, c nei punti A′, B′, C′ e accoppiandoli con i nodi A, B, C otteniamo le tre coppie AA′, BB′, CC′.

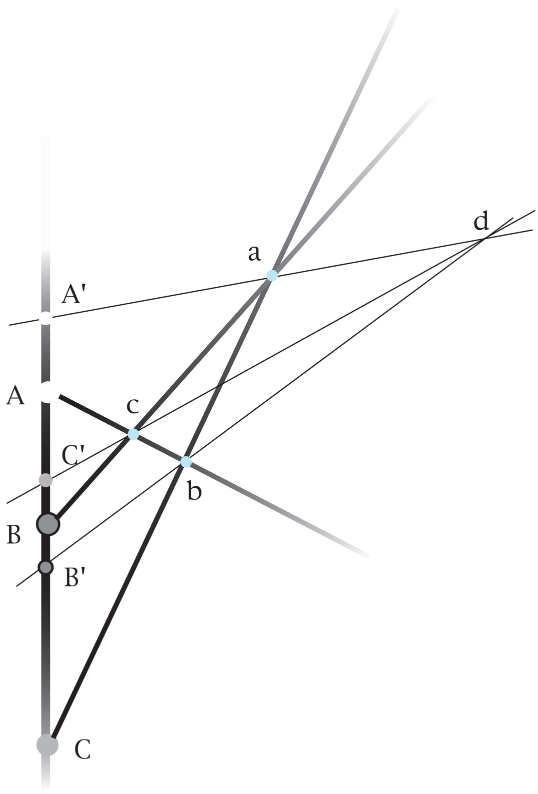


Immagine 3

Se ora cerchiamo di vedere come si trasforma la relazione di Menelao ci rendiamo conto, con soddisfazione, che anch'essa continua a valere semplicemente sostituendo i getti dispiegati dal tronco con le loro proiezioni ([13]): precisamente la relazione

$$\frac{\mathrm{Ab}}{\mathrm{Ac}} = \frac{\mathrm{Ba}}{\mathrm{Bc}} \times \frac{\mathrm{Cb}}{\mathrm{Ca}}$$

degenera nella:

$$\frac{\mathrm{AB'}}{\mathrm{AC'}} = \frac{\mathrm{BA'}}{\mathrm{BC'}} \times \frac{\mathrm{CB'}}{\mathrm{CA'}} \tag{2}$$

e quest'ultima relazione che è equivalente alla (1) ci dice che le tre coppie AA′, BB′, CC′ formano una involuzione.

Non possiamo dire se Desargues conoscesse o meno questo risultato perché non è mai esplicitamente enunciato, né lo abbiamo trovato nella letteratura corrente; non possiamo neanche dire se questa possa essere stata la strada con la quale lui è pervenuto all'idea di involuzione. Resta comunque il fatto che il teorema di Menelao «piegato sul tronco» produce 6 punti legati nella forma dell'involuzione inquadrando sotto una nuova luce, anche dal punto di vista didattico l'intera materia che, in questa maniera, crediamo possa essere in parte rivista. In ogni caso abbiamo trovato, non senza emozione, nel *Brouillon* una incomprensibile incongruenza che potrebbe aiutarci a entrare nel pensiero di Desargues. Nella formulazione del suo celebre teorema sulla involuzione definita su un retta da un fascio di coniche, sul quale torneremo più avanti, Desargues aggiunge alla fine un enunciato (di dimostrazione ovvia) completamente inutile, mai usato nel seguito, nel quale il linguaggio non è coerente con le definizioni da lui stesso date in precedenza. È come se questo enunciato, frutto di precedenti considerazioni, poi superate da nuove idee, gli

([13]) La dimostrazione di questo fatto si ottiene facilmente applicando ai tre rami il seguente

LEMMA. – Consideriamo un ramo che si dispiega da un nodo C di un tronco e siano Ca e Cb due getti del ramo che nascono in C. Proiettando da un qualunque punto d del piano i due getti sul tronco, indicando con A′ la proiezione di a e B′ quella di b, risulta:

$$\frac{\mathrm{CA'}}{\mathrm{CB'}} = \frac{\mathrm{Ca}}{\mathrm{Cb}} \times \frac{\mathrm{dA'}}{\mathrm{da}} \times \frac{\mathrm{db}}{\mathrm{dB'}}.$$

fosse sfuggito per sbaglio nel Brogliaccio. Ma proprio questo eventuale sbaglio può aiutarci a chiarire la genesi di queste metafore.

Ecco il testo (14)

> Se due rette di confine BCN, EDN sono parallele tra loro, il rettangolo dei getti dispiegati IB, IC sta al suo relativo il rettangolo KD, KE come il rettangolo dei getti piegati sul tronco IQ, IP gemello del rettangolo IB, IC sta al suo relativo il rettangolo dei getti piegati sul tronco KQ, KP gemello del rettangolo KD, KE cosa che è evidente dal parallelismo di questi rami di confine BC, DE.

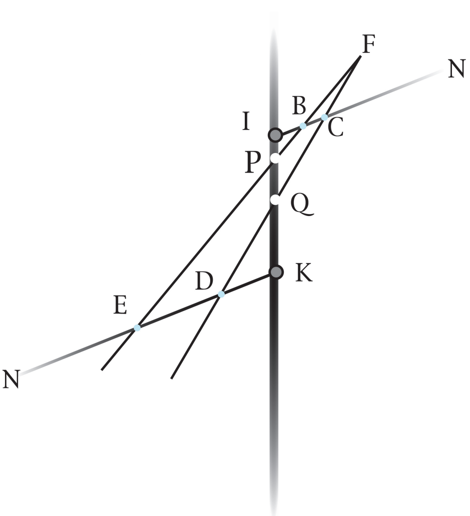


Immagine 4

Intanto le definizioni di rettangoli gemelli e rettangoli relativi date in precedenza si riferiscono sempre a getti piegati sul tronco (15), mentre ora ci si riferisce ai rettangoli di lati IB, IC (dispiega-

(14) Que si les deux bornales d'une couple BCN, EDN sont parallèles entre elles, le rectangle des brins déployez IC, IB est à son relatif le rectangle KD, KE, comme le rectangle de la couple des quelconques brins pliez au tronc IQ, IP, gemeau du rectangle IB, IC est a son relatif le rectangle des brins pliez au tronc KQ, KP gemeau du rectangle KD, KE, ce qui est evident du parallelisme de ces rameaux ou bornales entrelles BC, DE. [2] pg. 145.

(15) In [2] pp. 107-108.

ti) e IP, IQ (piegati) come se fossero rettangoli gemelli. La stessa cosa avviene sul ramo KN. Ma la cosa più importante e molto chiara è che l'operazione di piegare un getto sul tronco consiste proprio nella proiezione centrale (in questo caso la proiezione dal punto F).

Tornando alle involuzioni, emerge una cosa importante: abbiamo ora due modi per riguardare l'involuzione, uno algebrico e l'altro geometrico. Quello algebrico consiste nel verificare se i 6 nodi sono posizionati in modo tale da verificare l'uguaglianza (1) (o la (2) a essa equivalente) e queste formule permettono, dati 5 dei sei nodi in involuzione, di trovare in modo univoco la posizione del sesto. Da un punto di vista geometrico, invece, tre coppie di nodi di un tronco formano una involuzione se esiste una configurazione grafica come quella rappresentata dall'immagine 3 che lega tra loro i vari nodi. Il fatto, ottenuto per via algebrica, che 5 nodi individuano univocamente la posizione del sesto, dimostra che, qualunque sia la configurazione per i 5 nodi assegnati, la posizione del sesto non cambia.

Dati ad esempio A, B, C, A′, B′ possiamo trovare graficamente il nodo C′ in modo che le tre coppie AA′, BB′, CC′ formino una involuzione. Lo possiamo fare in infiniti modi, anzi, in «infinito a tre» modi, per essere più precisi. Possiamo dispiegare arbitrariamente i rami per A, B, C, e trovare così i *but* a, b, c comuni alle tre coppie di rami. Collegando poi a con A′ e b con B′ troviamo il centro di proiezione d che ci permette, proiettando c, di trovare C′. Il punto C′, lo stesso punto C′, è determinato comunque si siano dispiegati i tre rami iniziali, proprio perché le due coppie AA′ e BB′ individuano un'unica involuzione.

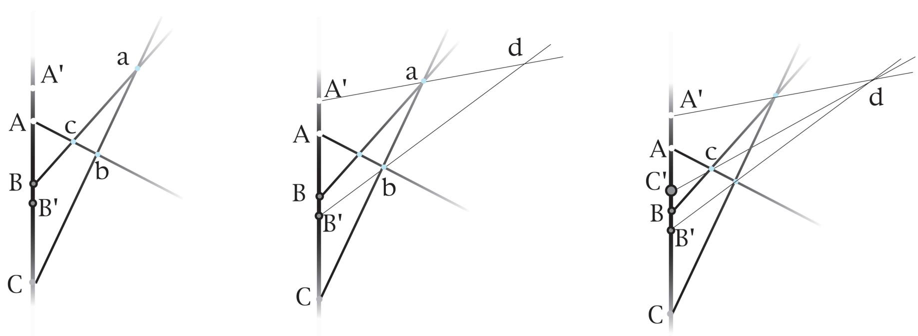


Immagine 5

Dunque se 5 di 6 nodi in involuzione sono dati, il sesto è determinato non solo tramite una relazione numerica che ne fissa la posizione rispetto agli altri, ma anche da una configurazione grafica che coinvolge solo il concetto di retta, di punto (al finito o all'infinito) con le proprietà grafiche di appartenenza. Per questa via è possibile fondare la geometria proiettiva indipendentemente dal campo numerico di base, partendo da assiomi grafici così come è stato fatto nel magnifico trattato di Enriques del 1904, *Lezioni di geometria proiettiva*.

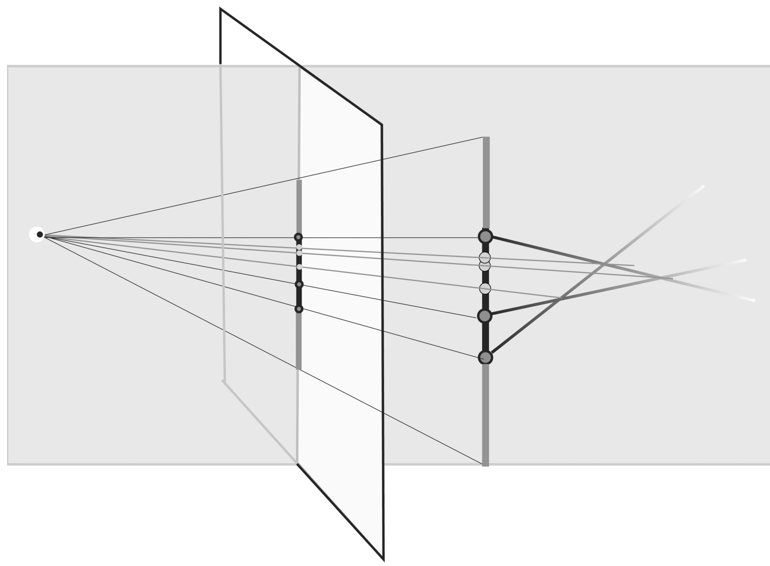


Immagine 6

Osserviamo infine come la trasformazione che proietta sul tronco una data configurazione sia familiare all'attitudine del pittore a rappresentare un oggetto tridimensionale nelle due dimensioni del quadro. Anche in questo caso il teorema di Menelao che si dispiega nelle due dimensioni si proietta nell'unica dimensione del tronco conservando tuttavia una determinata traccia della sua genesi. Questa traccia è l'involuzione: la proiezione dei nodi e quelle dei tre *but* accoppiati tra loro.

4. – Il teorema del rameto.

L'invarianza proiettiva del concetto di involuzione, intuito in questo modo, viene rigorosamente dimostrato da Desargues nel «teorema del rameto». Un **rameto** è formato da un tronco che contiene sei nodi in involuzione dai quali escono sei rami con uno stesso «but». Se un secondo tronco interseca i sei rami del rameto in sei nuovi nodi, anche questi formano una involuzione.

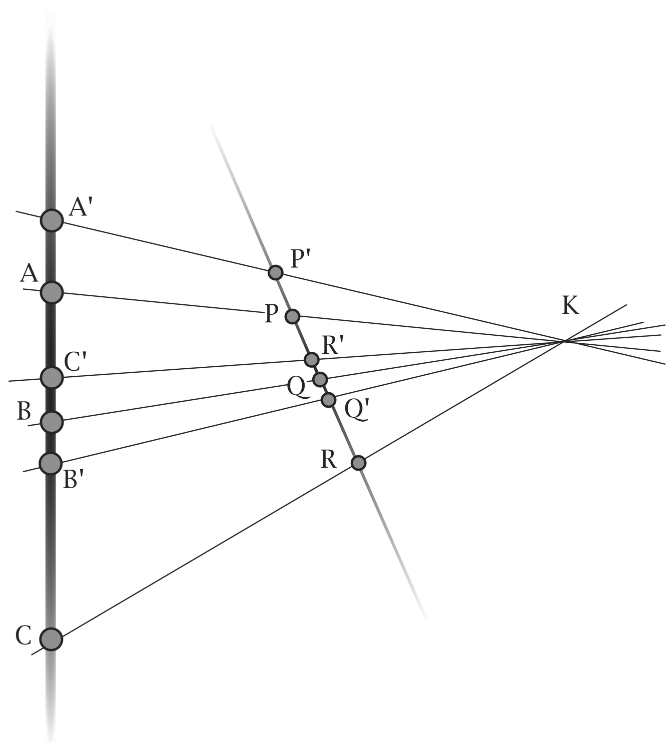


Immagine 7

Il teorema può essere dimostrato in modo tradizionale, senza uscire dal piano del rameto, cercando di provare che la relazione (1) non cambia forma durante la proiezione, cioè si trasforma nella relazione

$$\frac{\mathrm{PQ} \times \mathrm{Q'P}}{\mathrm{P'Q} \times \mathrm{P'Q'}} = \frac{\mathrm{PR} \times \mathrm{R'P}}{\mathrm{P'R} \times \mathrm{R'P'}}$$

e questo può essere fatto considerando, sullo stesso piano del rameto, varie configurazioni di rami e applicando varie volte e in modo opportuno il teorema di Menelao. È questo il modo che segue Desargues, come volesse procedere nelle sue dimostrazioni coi piedi di piombo. Possiamo tuttavia, in questo caso, proporre una dimostrazione che non faccia uso delle relazioni algebriche che caratterizzano le involuzioni e che pare Desargues voglia indicare più avanti ([16]). Cominciamo col dispiegare dal tronco, tre rami per A, B e C appartenenti a un nuovo piano α, che immaginiamo orizzontale e costruiamo su questo piano l'intera configurazione che caratterizza l'involuzione iniziale. Alziamo ora una piramide col vertice in K e base sul quadrangolo abcd.

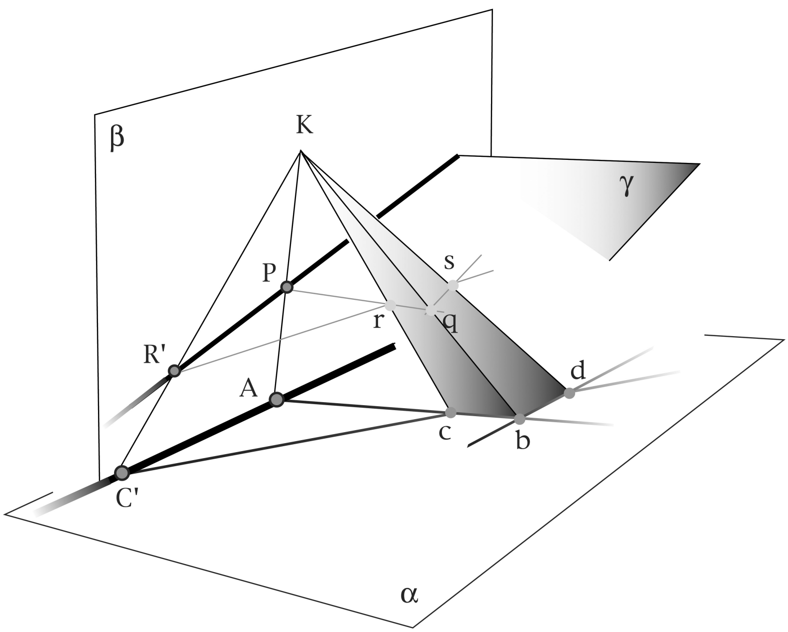


Immagine 8

Prendiamo ora un nuovo piano γ che passi per la retta che contiene i nodi PP′, QQ″, RR″. Tale piano interseca la piramide in un ulteriore quadrangolo pqrs che si proietta, punto per punto, retta per

([16]) In [2], pp 144, 145.

retta, sul quadrangolo iniziale e che trasporta quindi la configurazione del piano α definita dall'involuzione iniziale, in una analoga configurazione sul piano γ che conferisce quindi alle tre coppie PP′, QQ′, RR′ la forma di involuzione.

Questa dimostrazione si fonda sul fatto che la proiezione centrale conserva l'allineamento e quindi ogni configurazione grafica formata da rette e loro intersezioni, conformemente alla geometria della visione e all'intuizione del pittore.

Abbiamo trovato in questo modo una particolare configurazione tra i punti di una retta che non cambia dispiegando arbitrariamente dal tronco i tre rami per A, B, C e cambiando il punto di vista. Le involuzioni diventano uno strumento per allenare il pensiero su un terreno che gli è proprio (quello euclideo) ma anche per potenziarlo verso la geometria dell'infinito.

5. – La proprietà meravigliosa.

Possiamo pensare le involuzioni come un modo per accoppiare i punti di una retta o meglio come un modo per far corrispondere a un dato punto X un punto X′ e a X′ lo stesso punto X, cioè, come si dice oggi, ad una trasformazione involutoria della retta in sé. Date due coppie distinte AA′ e BB′ di punti (eventualmente doppi) e dato un qualunque punto X della retta (estesa all'infinito), esiste un unico punto X′ tale che AA′, BB′, XX′ formino una involuzione. Tale punto è univocamente determinato sia sul piano analitico, tramite la formula (1), sia su quello sintetico proprio di Desargues, tramite la costruzione grafica che abbiamo vista nel paragrafo precedente.

L'involuzione può essere definita, oltre che dalle due coppie di punti AA′ e BB′, anche da una coppia di punti e una coppia di rette indicate in grigio nell'immagine seguente. In questo caso la costruzione è identica al caso precedente e viene fatta a partire dai punti B e B′ nei quali le rette date incontrano il tronco, ma ne cambia radicalmente l'interpretazione. La coppia di rette è pensata come una «curva di ordine due» cioè come una configurazione che interseca una qualunque retta in due punti ed è solo questa la proprietà che viene usata per costruire l'involuzione.

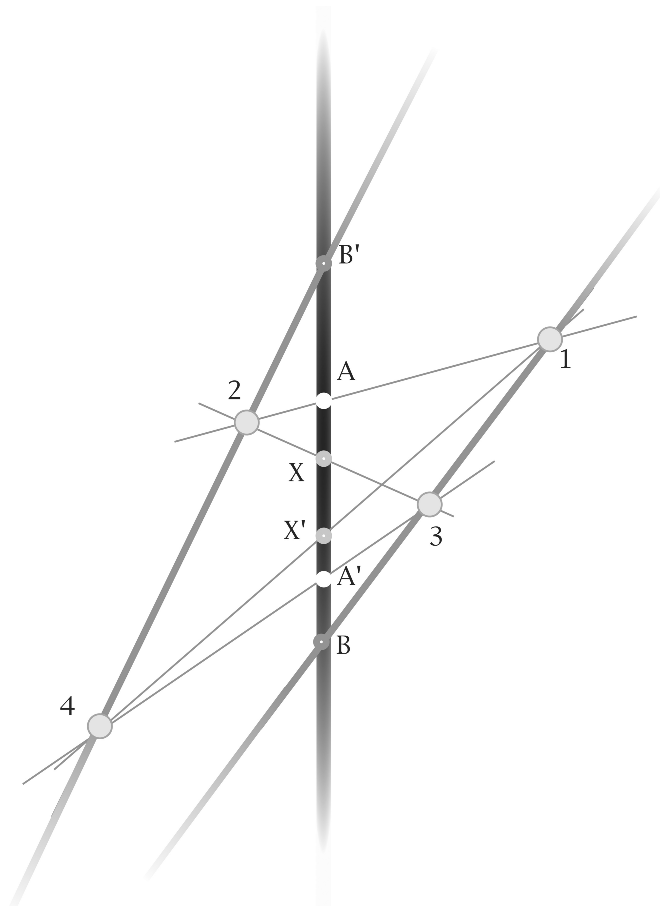


Immagine 9

Si comincia col dispiegare un qualunque ramo per A, che incontra la coppia di rette nei punti 1 e 2. Si congiunge 2 con X e si trova il punto 3, si congiunge 3 con A′ e si trova il punto 4, si congiunge 4 con 1 e si trova il punto X′ che cercavamo, trasformato di X mediante l'involuzione definita dalle coppie AA′, BB′ o dalla coppia di punti AA′ e dalla coppia di rette fissate. Il punto X′ che abbiamo costruito non dipende dai (infinito a uno) modi con cui si è dispiegato il ramo da A o, equivalentemente, dalla posizione del punto 1 sulla coppia di rette. Abbiamo una involuzione definita dalle due rette e dai due punti AA' indipendente da come abbiamo «inscritto» un quadrangolo 1,2,3,4 nelle rette stesse.

Questa immagine, che sembrerebbe riproporre la situazione precedente, ci spinge, in realtà, in una direzione nuova molto importante. Una coppia di rette possiamo infatti pensarla, come fa Desargues, come una conica degenere ottenuta segando il cono con un piano che passa per il suo vertice. Ora tutte queste figure si ottengono l'una dall'altra con continuità, muovendo con continuità il piano sezione. Sembrerebbe dunque naturale estendere la costruzione precedente, che è invariante per proiezioni, anche al caso di una qualunque conica.

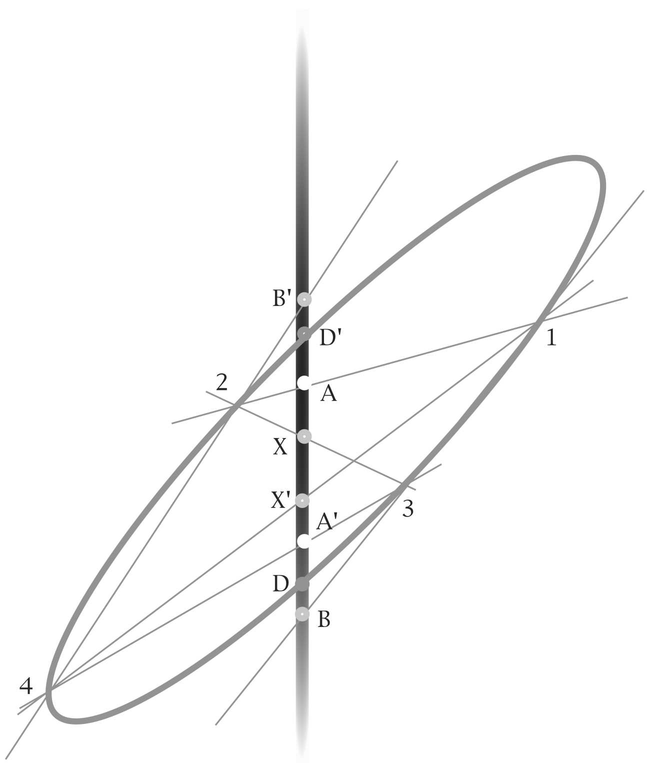


Immagine 10

Desargues riesce di fatto a dimostrare che una qualunque conica, che passi per i 4 punti 1,2,3,4 interseca il tronco in una ulteriore coppia DD′, che insieme ad AA′, BB′, XX′, appartiene alla stessa involuzione, legando in questo modo, con una geniale intuizione, le involuzioni alle coniche. Questo risultato è quello che Pascal chiamerà *proprieté merveilleuse* (17)

(17) In [7] *Essay pour les coniques*, pg. 60-63.

il cui primo inventore è Desargues, lionese, uno dei più grandi spiriti dei suoi tempi, dei più versati verso le matematiche e in particolare verso le coniche, i cui pochi scritti su questa materia hanno dato un'ampia testimonianza a coloro che hanno voluto capirne il significato: devo confessare che io devo il poco che ho trovato su questa materia ai suoi scritti e che ho cercato d'imitare per quanto mi è stato possibile il suo metodo su questo soggetto.

Lo stesso Poncelet ([18]), che non conosceva Desargues, parlerà di questo teorema come *un des plus féconds qui existent sur les coniques* per le numerosissime conseguenze che esso comporta.

Possiamo vedere anche come, fissata una conica degenere o non degenere e due nodi AA′ su un tronco, resta individuata univocamente una involuzione, ottenuta sia che la conica intersechi in DD′ il tronco, sia che non lo incontri, la quale involuzione, con la stessa costruzione di prima, permette di trovare il coniugato X′ di un qualunque nodo X comunque si voglia dispiegare da A il ramo A1:

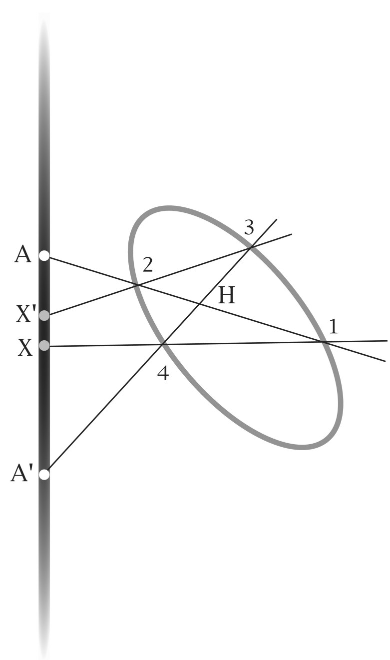


Immagine 11

([18]) In [8], Vol. 1, pg. 92.

In nota (19) diamo la dimostrazione di Desargues di questo fatto e della *proprieté merveilleuse* poiché essa introduce per la prima volta nella storia della matematica un metodo dimostrativo molto fecondo che consiste nel trasformare una figura in un'altra più semplice, per la quale sia possibile dimostrare la proprietà che interessa, la quale, se invariante rispetto alla trasformazione effettuata, resterà valida anche per la figura più complessa iniziale. In questo caso la trasformazione è una trasformazione proiettiva che permette di trasferire su una qualunque conica proprietà valide per una circonferenza ed invarianti per proiezione.

6. – Mysterium hexagrammaticum.

La teoria delle involuzioni così come è stata abbozzata nelle sue linee essenziali nel *Brouillon* di Desargues, permette di dimostrare facilmente, come vedremo più avanti, il teorema attribuito a Pascal sull'esagono inscritto in una conica. Pascal, che è stato allievo di Desargues, all'età di soli 16 anni, nel 1640, pubblicò un saggio nel quale enunciava alcune proprietà delle coniche, tra cui il teorema secondo il quale un qualunque esagono inscritto in una circonferenza ha i lati opposti che si intersecano in tre punti allineati, proprietà che poi estese, molto probabilmente col metodo di Desargues, al caso che l'esagono sia inscritto in una conica qualunque. Il saggio, di sole 3 pagine, non contiene le dimo-

(19) Ci riferiamo all'immagine 11 nel caso la conica sia un cerchio: si applica il teorema di Menelao al triangolo AHA' tagliato dalla trasversale $X1$ e dalla trasversale $X'2$ e si utilizza il fatto che $3H.4H = 2H.1H$ (Euclide, Elementi, Libro III, proposizione 35). Con questo si vede che il rapporto tra i rettangoli (relativi) $(AX \times AX'):(A'X \times A'X')$ coincide col rapporto $(A1 \times A2):(A'3 \times A'4)$ e quindi non dipende dalla scelta del punto 1 sul cerchio (Euclide, Elementi, Libro III, proposizione 37). Ne segue che ogni quadrangolo 1,2,3,4 inscritto nella circonferenza che abbia due lati opposti passanti per A e A' definisce sulla retta AA' la stessa involuzione. Se poi la retta AA' incontra la circonferenza nei punti DD' allora si ha $AD \times AD' = A1 \times A2$ e $A'D \times A'D' = A'3 \times A'4$ (Euclide, Elementi, Libro III, proposizione 35) e quindi il rapporto tra i rettangoli relativi $(AX \times AX'):(A'X \times A'X')$ coincide col rapporto tra i loro gemelli $(AB \times AB'):(A'D \times A'D')$ dunque le coppie AA', XX', DD' fanno parte di una stessa involuzione. Poiché queste proprietà sono invarianti per proiezione abbiamo che le stesse affermazioni restano valide se la circonferenza è sostituita da una qualunque conica che di questa è una proiezione.

strazioni, ma si suppone, per quanto testimonia lo stesso Pascal, che esse fossero fortemente influenzate dalle idee e dai metodi di Desargues. Poncelet riferisce ([20]) [8], senza indicare la fonte, che Descartes avrebbe attribuito questo teorema allo stesso Desargues. Una conferma indiretta di questo si può trovare in una lettera di Beaugrand ([21]) [2], nella quale questi risolve alcuni problemi posti da Desargues e che Desargues poteva risolvere coi suoi nuovi metodi. Il problema consisteva nel costruire una conica passante per dati punti (eventualmente sovrapposti), problema che, come è noto, si risolve facilmente usando il teorema di Pascal. In questo modo oggi i programmi di computer grafica calcolano e disegnano la conica passante per 5 punti assegnati.

Vogliamo ora proporre una dimostrazione molto semplice di questo teorema che non abbiamo trovato in letteratura e che si basa sulla nozione di involuzione e sui metodi di Desargues.

Consideriamo un esagono di vertici 1,2,3,4,5,6 inscritto in una conica, eventualmente anche degenerata in due rette. Vogliamo dimostrare che le coppie di lati opposti 1-2 con 4-5, 2-3 con 5-6, 3-4 con 6-1 si incontrano in tre punti P, Q ed R allineati.

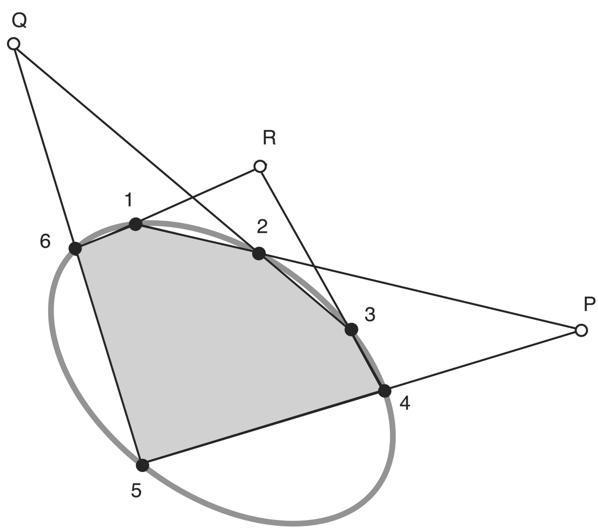


Immagine 12

([20]) In Vol. I, pg. xxviii.
([21]) In [2], pp. 186-190.

Consideriamo il tronco definito dalla retta PQ e l'involuzione che il quadrangolo 1,2,3,6, definisce sul tronco come è mostrato nell'immagine 11:

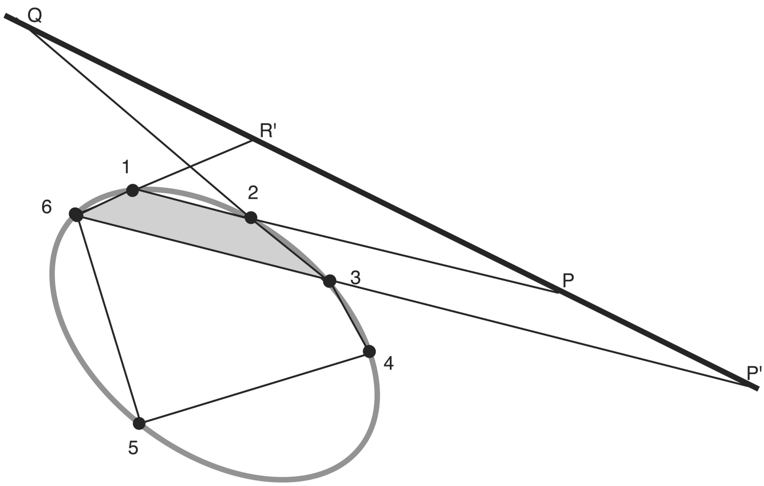


Immagine 13

P risulta coniugato a P′ e Q al nodo R′ ottenuto intersecando il tronco con il lato 6-1.

Consideriamo ora l'involuzione definita dal quadrangolo 3,4,5,6:

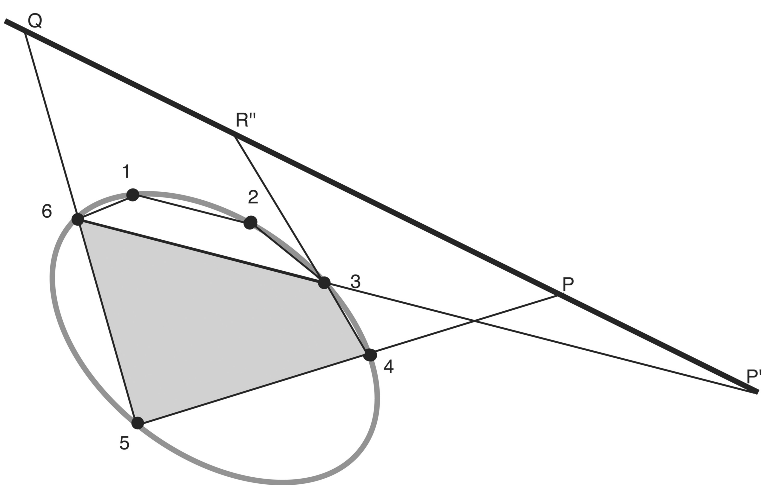


Immagine 14

Abbiamo ancora che P è coniugato con P′ e Q è coniugato con R″ essendo R″ il nodo in cui il lato 3-4 interseca il tronco. Dato che le due involuzioni sono definite da una stessa conica e dalla stessa coppia PP′, esse coincidono e quindi Q ha lo stesso coniugato nei due casi. Ne segue che R′ = R″ cioè che il lato 3-4 interseca il tronco nello stesso nodo R nel quale lo interseca il lato 1-6. Ne segue ancora che il nodo R, intersezione dei due lati, si trova allineato sul tronco a P e a Q.

Questa dimostrazione, molto semplice e naturale se pensata nello spirito desarguesiano, si basa sul concetto d'involuzione, centrale nel suo approccio, e corrisponde all'enunciato originale così come è formulato da Pascal [7] nel quale, anziché affermare che i punti P, Q ed R sono allineati, si conclude che, definiti P e Q come abbiamo fatto qui, le rette per PQ, 1-6 e 3-4 passano da uno stesso punto.

Le dimostrazioni elementari del teorema di Pascal più diffuse nei vari manuali di geometria proiettiva, considerano prima il caso che la conica sia un cerchio, per poi estendere il teorema nel caso generale. Per il cerchio si usa il concetto di birapporto tra quattro rette e la sua invarianza, al variare del centro del fascio di rette sulla circonferenza. Il caso degenere, quando la conica si spezza in due rette, caso che corrisponde al teorema di Pappo, richiede, seguendo questa via, una dimostrazione particolare. La dimostrazione che qui abbiamo proposto vale invece in ogni caso e ci pare concettualmente più semplice e diretta.

BIBLIOGRAFIA

[1] N. Poudra, *Oeuvres de Desargues réunies et analysées*, 2 Volumi, Paris, 1864.

[2] R. Taton, *L'oeuvre mathématique de G. Desargues*, Presses Universitaires de France, 1951 (seconda edizione rivista 1981).

[3] J. V. Field - J. J. Gray, *The Geometrical Work of Girard Desargues*, Springer-Verlag, 1987.

[4] J. P. Le Goff, *Desargues et la naissance de la géométrie projective*, in J. Dhombres - J Sakarovitch, *Desargues en son temps* Libraire scientifique A. Blanchard, 1994.

[5] J. FIELD, *Linear perspective and the projective geometry of Girard Desargues*, Nuncius An. Storia Sci., **2** (1987), 3-40.
[6] F. ENRIQUES, *Lezioni di geometria proiettiva*, Zanichelli, 1904.
[7] B. PASCAL, *Oeuvres complètes*, par J. Chevalier, 1954, Pleiade.
[8] J. V. PONCELET, *Traité des propriétés projectives des figures*, Paris, 1865.
[9] MENELAO, *Sphaericorum*, Traduzione dall'arabo in latino di Halley, Sumptibus Academicis, 1758.
[10] PTOLEMY, *Almagest*, a cura di G. J. Toomer, Duckworth, 1984.
[11] FIBONACCI, *Scritti di Leonardo Pisano*, pubblicati da B. Buoncompagni, Roma 1862.

Laura Catastini, Via di Tre Colli 21, 56011 Calci, Pisa
catastin@math.uniroma2.it

Franco Ghione, Dip. Matematica Università di Roma «Tor Vergata»
Via della Ricerca Scientifica, 00133 Roma