Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Andrea Bacciotti

Stabilità e controllo: il contributo di Maxwell

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **8-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2005), n.1, p. 23–36.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_1_23_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2005.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VIII-A, Aprile 2005, 23-36

Stabilità e controllo: il contributo di Maxwell.

ANDREA BACCIOTTI

1. – Introduzione.

C'è qualcosa in comune tra invenzione matematica e ispirazione poetica? A giudicare dai versi che seguono, sembrerebbe proprio di sì.

An inextensible heavy chain
lies on a smooth horizontal plain,
an impulsive force is applied at A,
required the initial motion of K.

Let ds be the infinitesimal link,
of which for the present we've only to think;
let T be the tension, and $T + dT$
the same for the end that is nearest to B.

L'autore del poemetto, intitolato *A Problem in Dynamics* e di cui abbiamo riportato solo l'inizio, è nientemeno che James Clerck Maxwell. Il grande scienziato scozzese, noto soprattutto per essere stato il primo a rappresentare con un formalismo matematico, cioè attraverso un sistema di equazioni, le leggi dinamiche del campo elettromagnetico, era infatti un apprezzato compositore di versi — oltre che, ci sia consentito di congetturare, un personaggio dotato di una buona dose di autoironia; il che non fa mai male.

Restando nell'ambito scientifico, che naturalmente è quello che qui più ci interessa, la figura di Maxwell colpisce per l'importanza e il valore innovativo dei contributi che egli è riuscito a dare in tutta una varietà di settori di ricerca. Le sue numerose biografie, disponibili anche su internet, ricordano, oltre alle equazioni del campo elet-

Fig. 1. – James Clerk Maxwell.

tromagnetico, gli studi sulla composizione degli anelli di Saturno, sull'ottica, sulla teoria cinetica dei gas e sul secondo principio della termodinamica, e l'ipotesi sulla natura ondulatoria della luce.

La storia che vogliamo raccontarvi in queste pagine prende spunto da un articolo dal titolo *On Governors* (1), che Maxwell pubblicò sui Proceedings della Royal Society nel 1868 ([6]). Raramente citato nelle biografie ufficiali, ma ben noto agli storici dell'ingegneria, questo articolo viene quasi unanimamente ritenuto la pietra angolare della moderna teoria matematica del controllo.

(1) Nel linguaggio tecnico, il termine inglese *Governor* si traduce «regolatore» o «controllore»; Maxwell nel suo articolo introduce anche il termine *moderator*, per indicare un dispositivo di natura più semplice che può esercitare la sua azione in una sola direzione.

2. – Dispositivi di controllo automatico.

La teoria matematica dei controlli sviluppa gli strumenti matematici utili per l'analisi delle proprietà qualitative dei sistemi fisici che hanno interesse per l'ingegneria, e per la progettazione di dispositivi di controllo automatico.

Alla base della teoria dei dispositivi di controllo automatico, c'è l'idea di retroazione ([2]), per la quale potremmo rinviare al volume di Calimani e Lepschy ([2]) e all'articolo di L. Pandolfi ([7]), recentemente apparso su questa stessa rivista. Tuttavia, per comodità del lettore, riteniamo opportuno inserire qualche richiamo.

I primi dispositivi di controllo automatico di cui si abbia notizia, risalgono all'antica Grecia e servivano a far funzionare gli orologi ad acqua. Un orologio ad acqua è costituito da una vasca principale, nella quale si trova un galleggiante dotato di un'asta. Sulla parete interna della vasca sono segnate le ore. Facendo affluire dell'acqua nella vasca, il galleggiante sale e l'asta indica il trascorrere del tempo. Naturalmente, il corretto funzionamento dell'orologio dipende in maniera cruciale dalla regolarità del flusso dell'acqua. Questa regolarità era garantita interponendo, tra la sorgente dell'acqua e la vasca principale, una seconda vasca molto più piccola, dotata di un proprio galleggiante. L'afflusso dell'acqua nella vasca piccola era regolato da una valvola azionata dal galleggiante mediante un sistema di leve. La vasca piccola inoltre, veniva posizionata più in alto rispetto alla vasca grande, di modo che l'acqua potesse fluire dalla prima alla seconda, semplicemente per effetto della pressione: poiché la pressione esercitata da una colonna di liquido è proporzionale all'altezza, per ottenere un flusso costante è sufficiente mantenere costante il livello dell'acqua nella vasca piccola. Il galleggiante della vasca piccola si comporta di fatto come un sensore, misurando le variazioni dell'altezza dell'acqua e così, indirettamente, le variazioni del flusso nella vasca grande. Il galleggiante quindi «retroagisce» sulla valvola, chiudendola se l'altezza dell'acqua cresce, aprendola se l'altezza

([2]) *Retroazione* (o *controreazione*) è la traduzione italiana più accreditata del termine inglese *feedback*.

dell'acqua diminuisce rispetto al livello che corrisponde al flusso desiderato.

L'invenzione di questi meccanismi era evidentemente il frutto di una geniale intuizione e di una buona dose di capacità empiriche, ma certamente non si fondava su una solida consapevolezza scientifica. Per trovare esempi più significativi di «retroazione», è necessario arrivare all'epoca della rivoluzione industriale, all'epoca in cui si comincia cioè ad impiegare sistematicamente le macchine nei processi di produzione. Per datare l'invenzione di macchine capaci di trasformare vari tipi di energia naturale in energia meccanica (mulini a vento e mulini ad acqua per esempio) bisogna in realtà risalire molto più indietro nel tempo. La paternità della stessa macchina a vapore viene spesso attribuita a Papin (1681), anche se la costruzione di un primo modello finalizzato ad usi pratici (azionamento di pompe per drenaggio, sollevamento di carichi nei pozzi di miniera) è dovuta a T. Newcomen (1712). Tuttavia, proprio come nel caso dell'orologio ad acqua, la possibilità di sfruttare efficacemente macchine di questo tipo dipende dalla capacità di garantire la regolarità del loro funzionamento. La macchina a vapore comincia a diffondersi con successo quando J. Watt, nel 1787, vi adatta un meccanismo di regolazione della velocità di regime, oggi noto col nome di regolatore centrifugo di Watt, che era già stato impiegato in precedenza su certi tipi di mulini a vento (3).

Il regolatore di Watt può essere schematicamente descritto come una coppia di aste. Un'estremità di ciascuna di esse è imperniata ad un asse verticale, il quale viene messo in rotazione dall'albero motore principale. Alla seconda estremità di ciascuna asta è fissato un peso (di regola, una massa sferica). Le aste sono libere di oscillare in un piano passante per l'asse verticale e sono a loro volta collegate, mediante un sistema di leve, alla valvola del vapore. Se la velocità angolare dell'albero motore cresce, per effetto della forza centrifuga le aste tendono a divaricarsi, formando un angolo via via crescente

(3) Le poche notizie storiche qui riportate sono per lo più tratte da [1] e sono comunque ben note; le date devono essere considerate puramente indicative: altri autori infatti forniscono a volte date leggermente diverse.

con l'asse verticale. Di conseguenza la valvola del vapore tende a chiudersi, facendo decrescere la potenza della macchina e quindi la velocità angolare. Viceversa, se la velocità diminuisce, le aste tendono a riavvicinarsi, la valvola del vapore a riaprirsi e la potenza della macchina a crescere. In questo modo, la velocità della macchina viene mantenuta costantemente vicino al valore desiderato. Dispositivi di questo tipo sono in genere ben visibili sui modelli di macchine a vapore esposti nei grandi musei di storia della scienza e della tecnica.

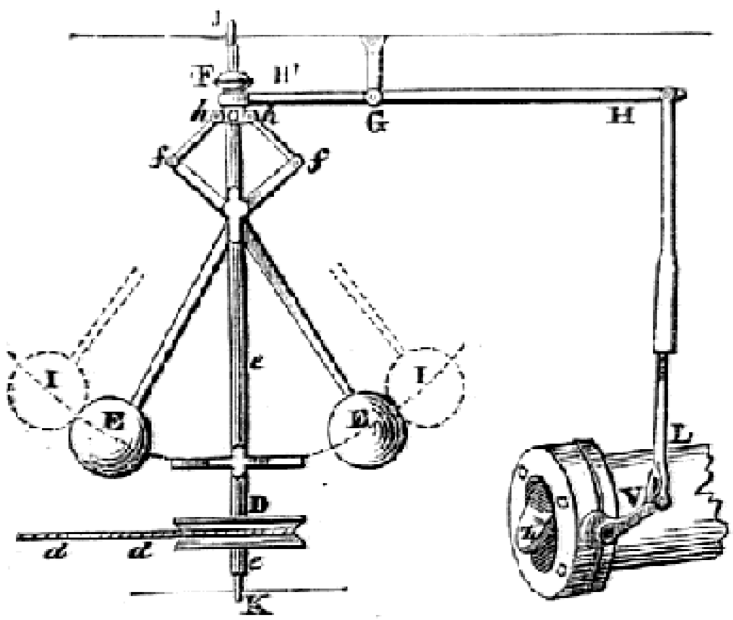

Fig. 2. – Regolatore di Watt. Per gentile concessione del Museo Nazionale della Scienza e della Tecnologia «Leonardo da Vinci» Milano.

In realtà, all'epoca della rivoluzione industriale venne ideata e progettata una grande varietà di regolatori di velocità, i quali si differenziavano per tutta una serie di dettagli non del tutto secondari. Molti di questi furono effettivamente utilizzati in pratica. Si trattava infatti di rispondere alle diverse esigenze di vari tipi di impianto, ma anche di cercare di ovviare a tutta una serie di difetti di funzionamento che troppo spesso si presentavano nei dispositivi di questo tipo. Il fatto è che in questa fase, si procedeva ancora in maniera empirica, per tentativi; nessuno si era ancora preoccupato di analizzare la dinamica del sistema «impianto+regolatore» da un punto di vista scientifico rigoroso.

Il problema di ottenere una regolazione molto accurata della velocità era particolarmente sentito quando la macchina doveva assolvere a compiti che richiedevano alta precisione: non tanto nello sfruttamento industriale quindi, quanto piuttosto nelle applicazioni scientifiche, come ad esempio nel posizionamento dei grandi telescopi per le osservazioni astronomiche. Non è un caso che uno dei primi ad intraprendere uno studio matematico sulla questione sia stato proprio un astronomo, l'inglese G.B. Airy. Airy era riuscito a interpretare il comportamento dinamico di un regolatore per mezzo di equazioni differenziali, ma si era trovato in difficoltà davanti alla loro integrazione (cioè davanti alla ricerca di soluzioni esplicite).

3. – L'approccio dinamico di Maxwell.

J. C. Maxwell comincia ad interessarsi al problema quando viene chiamato a far parte di una commissione incaricata di stabilire gli standards di misura di certe grandezze elettriche. In particolare, gli esperimenti condotti a partire dal 1863 al King's College di Londra, presso il quale Maxwell si trovava a quel tempo, richiesero l'utilizzo di una macchina elettrica dotata di un regolatore di velocità di tipo molto sofisticato.

Dagli studi sulla dinamica del regolatore, Maxwell trae un unico articolo, pubblicato, come abbiamo già detto sui Proceedings della Royal Society nel 1868. Come osservato anche in [1], questo articolo non sembra brillare per concretezza, completezza, e lucidità di esposizione. Forse per questa ragione, agli effetti pratici la ricaduta del lavoro di Maxwell fu molto inferiore di quella registrata dal lavoro, quasi contemporaneo, del russo J. Vischnegradski, nel quale si giunge sostanzialmente alle stesse conclusioni (4). Il lavoro di Vischne-

(4) Un modello matematico costituito da un sistema di tre equazioni differenziali ricavato dagli studi di Vischnegradski è presentato e analizzato con grande chiarezza nel libro di Pontryagin [8].

gradski fu tradotto prima in tedesco (1876) e poi in francese (1877): da esso gli ingegneri costruttori di macchine trassero, negli anni successivi, indicazioni fondamentali per migliorare le prestazioni dei regolatori di velocità.

L'articolo di Maxwell rimane comunque sorprendente, specialmente se riletto in un'ottica moderna, per la quantità di idee e di contributi che vi si possono riconoscere. La frase posta all'inizio del lavoro viene spesso citata come una delle definizioni più concise di che cosa si deve intendere per «regolatore automatico»:

A governor is a part of a machine by means of which the velocity of the machine is kept nearly uniform, notwithstanding variations in driving-power or the resistance ([5]).

[Un regolatore è una parte della macchina per mezzo della quale la velocità della macchina è mantenuta approssimativamente costante, nonostante le variazioni nella potenza del motore o nella resistenza del carico.]

Di grande attualità anche la frase con la quale egli cerca di indirizzare le ricerche verso la costruzione e lo studio di modelli matematici astratti:

I propose at present, without entering into any details of mechanism to direct the attention of engineers and mathematicians to the dynamical theory of such governors.

[Io propongo, senza entrare nei dettagli del meccanismo, di concentrare in questo momento l'attenzione degli ingegneri e dei matematici sulla teoria dinamica di tali regolatori.]

Il ragionamento di Maxwell passa attraverso una successione di fasi, in ciascuna delle quali sono riconoscibili elementi di originalità e di modernità:

1) la regolarità del funzionamento della macchina viene interpretata attraverso il concetto di stabilità;

([5]) Si è ritenuto opportuno riportare, di questa e delle successive citazioni, una traduzione (libera).

2) il sistema «impianto+regolatore» viene studiato in termini dinamici: il sistema di equazioni differenziali ordinarie che se ne ricava risulta non lineare;

3) entro limiti ben determinati, gli effetti dei termini non lineari vengono trascurati;

4) al sistema di equazioni differenziali lineari così ottenuto, viene associata un'equazione algebrica (equazione caratteristica);

5) viene enunciata l'equivalenza tra la condizione di stabilità e la condizione che tutte le radici dell'equazione caratteristica abbiano parte reale negativa;

6) quest'ultima condizione viene infine ricondotta alla verifica di un certo numero di disuguaglianze, scritte a partire dai coefficienti delle equazioni.

Si noti che attraverso questi passaggi, Maxwell arriva alla conclusione che il comportamento dinamico del regolatore può essere analizzato effettuando alcuni semplici calcoli, e senza alcun bisogno né di integrare le equazioni differenziali, né di calcolare esplicitamente le radici dell'equazione caratteristica, superando in tal modo le difficoltà che aveva incontrato Airy. Egli fornisce quindi la seguente spiegazione del malfunzionamento dei regolatori di velocità:

The actual motions corresponding to these impossible roots are not generally taken notice of by the inventors of such machines, who naturally confine their attention to the way in which it is designed to act; and this is generally expressed by the real root of the equation. If, by altering the adjustments of the machine, its governing power is continually increased, there is generally a limit at which the disturbance, instead of subsiding more rapidly, becomes an oscillating and jerking motion, increasing in violence till it reaches the limit of action of the governor. This takes place when the possible part of one of the impossible roots becomes positive.

[I moti effettivi corrispondenti a queste radici non reali non sono genericamente presi in considerazione dagli inventori di tali macchine, i quali naturalmente limitano la loro attenzione ad una modalità di regime in funzione della quale la macchina viene progettata, e che corrisponde in genere alla radice reale dell'equazione. Se, agendo sui comandi della macchina, la potenza viene aumentata in modo continuo, si incontra genericamente una soglia a cui il disturbo, invece che attenuarsi più rapidamente, diventa un moto oscillatorio e irregolare, aumentando la sua forza finché non raggiunge il limite di azione del regolatore. Questo accade quando la parte reale di una delle radici non reali diventa positiva.]

È interessante notare come in questo paragrafo Maxwell ci descriva quello che oggi chiameremmo un fenomeno di biforcazione ([6]).

Maxwell si era interessato alla nozione di stabilità in precedenza, nel corso dei sui studi sugli anelli di Saturno. Già in quell'occasione egli aveva osservato come la soluzione del problema dipendesse dal segno delle parti reali delle radici di una certa equazione algebrica. Nel caso degli anelli di Saturno, l'equazione ottenuta era di tipo biquadratico: Maxwell potè dunque calcolare esplicitamente le radici e verificarne il segno delle parti reali per ispezione diretta. Nel lavoro *On governors* Maxwell esamina vari tipi di regolatori, di crescente complessità. Nel primo caso l'equazione caratteristica risulta di terzo grado. Maxwell enuncia allora le condizioni necessarie e sufficienti affinchè le radici di un'equazione di terzo grado abbiano tutte parte reale positiva, senza per altro dare nessuna spiegazione di come sia giunto a determinarle (il lettore troverà queste condizioni enunciate e dimostrate in appendice). Ne deduce quindi le regole che devono essere osservate nella costruzione dei regolatori per garantirne la stabilità.

Negli altri casi esaminati da Maxwell, le equazioni caratteristiche risultano di grado cinque o maggiore di cinque: e qui Maxwell non può far altro che dichiarare la propria incapacità a scrivere un sistema completo di condizioni necessarie e sufficienti. Tuttavia, il problema sollevato da Maxwell non resterà a lungo irrisolto; il matematico E. J. Routh, collega di Maxwell a Cambridge, fornirà la soluzione del problema nel 1874 per il grado cinque e, infine, nel 1877 per il grado arbitrario. Qualche anno più tardi, si occuperà della questio-

([6]) In [5], partendo dal modello di Vischnegradski, si dimostra che effettivamente quella che si verifica nel comportamento dinamico del regolatore quando si lascia variare il coefficiente di attrito, è una biforcazione di Hopf.

ne, in maniera del tutto indipendente, anche il matematico svizzero A. Hurwitz. Hurwitz era venuto a conoscenza del lavoro di Vischnegradski attraverso un collega ingegnere del politecnico di Zurigo, A.B. Stodola. Le condizioni necessarie e sufficienti pubblicate da Hurwitz nel 1895 sono ovviamente equivalenti a quelle trovate da Routh, ma un po' più semplici da enunciare.

4. – Il concetto di stabilità.

Come abbiamo già osservato, Maxwell fu tra i primi a intuire che l'analisi del comportamento di un dispositivo di regolazione dovesse essere correttamente effettuata facendo riferimento al concetto di stabilità. Nel linguaggio tecnico-scientifico, il termine *stabiltà* viene utilizzato con un significato molto simile a quello con cui lo si usa nel linguaggio comune. Per illustrarlo, possiamo ricorrere ad un esperimento molto familiare. È ben noto che un pendolo, libero di oscillare in un piano verticale sotto l'azione della forza di gravità, presenta due posizioni d'equilibrio: una «stabile», col peso in basso, e una «instabile», col peso in alto. Gli aggettivi «stabile» e «instabile» si riferiscono al fatto che la posizione d'equilibrio col peso in basso viene mantenuta in maniera naturale anche in presenza di (piccole) perturbazioni, mentre la posizione d'equilibrio col peso in alto viene irrimediabilmente perduta non appena si verifica una perturbazione (comunque piccola). In base al secondo principio della dinamica, l'equazione del moto del pendolo (in assenza di attriti) si scrive

$$\ddot{x} = -k \sin x$$

dove k è una costante positiva dipendente dal campo gravitazionale e dalla lunghezza del pendolo. È facile verificare che la posizione d'equilibrio stabile ($x = 0$, a meno di multipli di 2π) corrisponde ad un minimo dell'energia potenziale, mentre la posizione d'equilibrio instabile ($x = \pi$, a meno di multipli di 2π) corrisponde ad un massimo. L'affermazione secondo la quale nei sistemi conservativi, in corrispondenza di un minimo dell'energia potenziale si ha una posizione d'equilibrio stabile viene talvolta citata come *Teorema di Lagrange-Dirichlet* ([7]).

Una formulazione matematicamente soddisfacente della nozione di stabilità, nella forma in cui la si usa ancor oggi, fu data più tardi, dal matematico russo A. M. Liapunov. Nella tesi discussa a Mosca per il conseguimento del titolo di dottore di ricerca e pubblicata nel 1892, Liapunov introdusse anche un metodo generale per l'analisi della stabilità dei sistemi (il così detto secondo metodo o metodo diretto di Liapunov) il cui successo, a distanza di più di cento anni, può indiscutibilmente dirsi straordinario, per le innumerevoli e importanti applicazioni di ordine teorico e pratico che ne sono state e ne vengono continuamente date.

Quello di stabilità è in realtà un concetto composito, nel quale vanno separati due aspetti.

Una posizione d'equilibrio si dice *stabile* (in senso proprio) se comunque si sceglie un margine di errore $\varepsilon > 0$ ritenuto accettabile, si può determinare un valore $\delta > 0$ tale che lo stato del sistema, se inizialmente si trova a distanza minore di δ dalla posizione d'equilibrio, rimarrà per tutta l'evoluzione futura a distanza minore di ε dalla posizione d'equilibrio stessa.

Una posizione d'equilibrio si dice *asintoticamente stabile* se è stabile, e inoltre la distanza tra lo stato del sistema e la posizione d'equilibrio, nel corso dell'evoluzione, tende a zero quando il tempo tende all'infinito.

5. – Appendice.

Data un'equazione algebrica di grado n a coefficienti reali

(1) $$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

siamo interessati alle condizioni sotto le quali sussiste la seguente proprietà:

(**P**) tutte le radici della (1) hanno parte reale negativa.

([7]) L'affermazione compare nel trattato sulla Meccanica Analitica pubblicato da Lagrange del 1788, ma la dimostrazione che egli ne dà viene considerata oggi imprecisa; una dimostrazione più corretta venne data da Dirichlet nel 1846.

Se $n = 2$, l'equazione si riduce a

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0 \,, \tag{2}$$

e la condizione necessaria e sufficiente affinché si verifichi la proprietà (**P**) è che a_1 e a_2 siano entrambi positivi. Questa conclusione, quando le radici sono reali è conseguenza immediata della regola di Cartesio; quando invece le radici sono complesse coniugate (circostanza che può darsi solo se $a_2 > 0$), segue dalla ben nota formula risolutiva, in base alla quale le parti reali delle radici hanno segno opposto a quello di a_1.

Se $n = 3$, la condizione di positività dei coefficienti risulta, come vedremo, ancora necessaria per la validità della (**P**), ma in generale non più sufficiente (non è difficile costruire controesempi). Vogliamo dimostrare il seguente enunciato: *data l'equazione algebrica di terzo grado a coefficienti reali*

$$\lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0 \tag{3}$$

la proprietà (**P**) *sussiste se e solo se*

$$a_i > 0 \,, \qquad \text{per ogni } i = 1, 2, 3 \tag{4}$$

e inoltre

$$a_1 a_2 - a_3 > 0 \,. \tag{5}$$

Anche qui conviene distinguere due casi.

Caso (A). Le radici della (3) sono tutte reali, diciamo $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

Caso (B). Una sola radice della (3) è reale, diciamo γ, e le altre due sono complesse coniugate, diciamo $\alpha \pm i\beta$.

Nel caso (A) il primo membro della (3) si fattorizza come

$$(\lambda - \gamma_1)(\lambda - \gamma_2)(\lambda - \gamma_3) \,.$$

Si ricavano immediatamente le relazioni

$$a_1 = -(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3), \; a_2 = (\gamma_1 + \gamma_2)\gamma_3 + \gamma_1\gamma_2, \; a_3 = -\gamma_1\gamma_2\gamma_3. \tag{6}$$

Nel caso (B) si ha invece la fattorizzazione

$$(x-\gamma)[x-(\alpha+i\beta)][x-(\alpha-i\beta)]$$

e le relazioni

$$a_1 = -(\gamma+2\alpha), \quad a_2 = (\alpha^2+\beta^2+2\alpha\gamma), \quad a_3 = -\gamma(\alpha^2+\beta^2). \tag{7}$$

A questo punto non è difficile concludere che in entrambi i casi, se vale la (**P**), allora devono valere le condizioni (4).

D'altra parte, invocando ancora la regola di Cartesio, è immediato rendersi conto che se valgono le (4), allora tutte le radici reali della (3) sono negative (8). Nel caso (A), le (4) risultano quindi anche sufficienti per la validità della (**P**). Nel caso (B) tuttavia, per essere certi che tutte le radici abbiano parte reale negativa bisogna far intervenire anche la (5). Per convincersene, basta osservare che in virtù delle (7),

$$a_1 a_2 - a_3 = -2\alpha[(\alpha+\gamma)^2+\beta^2].$$

L'espressione $a_1 a_2 - a_3$ ha quindi sempre segno opposto a quello di α.

Il lettore interessato potrà trovare enunciate le condizioni necessarie e sufficienti per il caso generale ($n > 3$) in [4], oppure nel già citato libro di Pontryagin [8], o infine in [3].

(8) Si può arrivare alla stessa conclusione con un semplice ragionamento di tipo analitico. La funzione $y = f(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$ interseca l'asse y in un punto la cui ordinata è positiva. La sua derivata $y = f'(\lambda) = 3\lambda^2 + 2a_1\lambda + a_2$ è ovviamente positiva per $\lambda > 0$. Quindi $f(\lambda)$ è crescente se $\lambda > 0$, e le eventuali radici reali dell'equazione $f(\lambda) = 0$ saranno necessariamente tutte negative.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] BENNET S., *A History of Control Engineering*, Peter Peregrinus LTD, London, 1979.
[2] CALIMANI R. - LEPSCHY A., *Feedback*, Garzanti, 1990.
[3] COPPEL W. A., *Stability and asymptotic behavior of differential equations*, Heath Mathematical Monographs, 1965.
[4] GANTMACHER F. R., *Théorie des matrices*, Dunod, 1966, Vol. 2.

[5] HASSARD B. D. - KAZARINOFF N. D. - WAN Y. H., *Theory and Applications of Hopf Bifurcation*, London Mathematical Society Lecture Notes Series 41, 1981.

[6] MAXWELL J. C., *On Governors*, Proceedings of the Royal Society **16** (1867/68), pp. 270-283.

[7] PANDOLFI L., *Viaggi avventurosi e linee telefoniche: l'idea di controreazione*, Bollettino UMI *La Matematica nella Società e nella Cultura*, Serie VIII, Vol. III-A (2000), pp. 57-79.

[8] PONTRYAGIN L. S., *Ordinary Differential Equations*, Addison-Wesley Pub. Company, 1962.

Bacciotti Andrea, Dipartimento di Matematica del Politecnico di Torino
C.so Duca degli Abruzzi, 24 - 10129 Torino - Italy