Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Lamberto Rondoni

Caos, informazione e calore

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **8-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2005), n.1, p. 51–82.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_1_51_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2005.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VIII-A, Aprile 2005, 51-82

Caos, informazione e calore.

LAMBERTO RONDONI

1. – Il caos.

Sembra facile trovare consensi all'affermazione che: «il nostro Mondo è sempre più "caotico" e la sua "complessità" cresce di giorno in giorno». Ma qual è l'oggetto del consenso? Forse il fatto che siamo in balia di eventi sempre più incontrollabili e refrattari ad ogni tentativo di comprensione? Questa interpretazione non solo è possibile ma è anche suggerita da buona parte della divulgazione scientifica quando parla, per esempio, del cosiddetto «effetto farfalla» (si veda, [1] p. 14). Questo effetto, per via della «caoticità» dell'atmosfera terrestre, consentirebbe al battito d'ali di una farfalla in Asia di scatenare, dopo qualche tempo, un uragano in America del Nord! In altre parole, un evento insignificante ed incontrollabile potrebbe avere catastrofiche conseguenze in un luogo lontano nel tempo e nello spazio.

Idee di questo tipo, astratte dal contesto in cui sono state orginariamente esposte (1) e riportate per fare tendenza nei più diversi circoli culturali e mediatici, rischiano di essere malamente fraintese (2). Come non lasciarsi prendere dallo sconforto se la scienza — che molti ritengono troppo ottimisticamente una fabbrica di certezze —

(1) Il contesto delle comunicazioni fra esperti di modelli teorici di meteorologia negli anni '60.

(2) Non è raro, oggi, imbattersi in fraintendimenti tali da offendere l'intelligenza umana. Per esempio, nel sito web di un'artista appassionata di geometria frattale (http://www.jessiegietl.com/theorypage.html) si legge: «*Supponiamo che la guerra sia un sistema caotico. Accettando questa supposizione, la caduta dell'Impero Romano (risultato di grandi proporzioni) potrebbe essere attribuita al fatto che un solo soldato romano, ad un certo punto in una data battaglia, avesse voltato il capo verso destra o verso sinistra (evento iniziale di proporzioni apparentemente insignificanti).*»

ammette che immani catastrofi possano risultare da eventi insignificanti, imprevedibili e, soprattutto, inevitabili? Si alimentano anche così sentimenti di disagio e di sospetto nei confronti della scienza e di coloro che la rappresentano, favorendo il preoccupante sviluppo delle varie espressioni dell'irrazionale al quale si sta assistendo in questo inizio di millennio.

Un atteggiamento diverso sembra animare chi pensa di aver trovato nel «caos» il paradigma della scienza del terzo millennio. Si sente parlare di caos nei contesti più disparati: dalla meteorologia all'urbanistica, dai protocolli di comunicazione per internet alla diagnosi dei processi cardiaci di fibrillazione, dalla psicologia della creatività allo studio dell'evoluzione del sistema solare, dall'analisi psicoterapeutica alla preparazione degli atleti per l'attività agonistica, dalla pittura espressionista alla termodinamica, tanto per fare solo qualche esempio. Non è ovvio, tuttavia, se questa entusiastica accettazione del nuovo «paradigma» rifletta una coscienza razionale superiore a quella che rifiuta la scienza, o se non si tratti semplicemente dell'attrattiva esercitata da una nuova moda. In tal senso gli stessi ambienti scientifici ed i centri preposti alla diffusione della cultura non sono immuni da esagerazioni e deviazioni [2, 3].

Per fare un esempio che lascia quantomeno perplessi, si consideri l'invito dell'Università di Western Sydney ad iscriversi al corso di Master dal titolo «Complexity, Chaos and Creativity», pubblicizzato nel 2001 nella pagina web di tale Università. L'invito recita: «*Questo programma di Master ti presenta gli approcci potenti ed eccitanti della teoria della complessità e del caos, che sono indispensabili per capire il mondo dinamico e complesso del ventunesimo secolo. Nuove visioni, metodi, concetti e strategie radicate su applicazioni pratiche in un vasto spettro di attività -in politica, affari, commercio, salute umana ed ambientale, vengono presentate per aumentare la tua abilità non solo di pensare nella complessità ma anche di far fronte creativamente ad una dinamica sociale critica,* Ai Confini del Caos, *che è la metafora del modo in cui la nostra vita si dispiega all'inizio del Nuovo Millennio*».

Ma che cosa si intende per Caos?

Alla voce «caos», nel Vocabolario Treccani troviamo: «*grande disordine, confusione, turbamento*». Il dizionario Webster della lingua inglese, aggiunge: «*uno stato di cose in cui il caso regna sovrano; specialmente l'intrinseca imprevedibilità del comportamento dei sistemi naturali.*»

Il caso e l'imprevedibilità di certi fenomeni naturali sono descritti con grande lucidità da H. Poincaré in un suo saggio del 1907 intitolato appunto «Il Caso» [4]. Poincaré distingue diversi concetti di caso, partendo dall'antichità: «*Gli antichi distinguevano i fenomeni che parevano obbedire a leggi armoniose, stabilite una volta per tutte, e quelli che venivano invece attribuiti al caso; questi ultimi erano imprevedibili perché ribelli ad ogni legge. [...] In questa concezione, la parola caso aveva un senso preciso, oggettivo; ciò che era caso per l'uno era caso anche per l'altro, e perfino per gli dei*». Venendo ad epoche più recenti, Poincaré contesta un'opinione diventata comune nel clima di ottimismo positivista del XIX secolo: «*[...] siamo diventati deterministi assoluti [...] Ogni fenomeno, per minimo che sia, ha una causa, e un'intelligenza infinitamente potente e infinitamente ben informata avrebbe potuto prevederlo fin dal principio dei secoli. [...] Per questa intelligenza, effettivamente, la parola «caso» non avrebbe alcun senso, o per meglio dire il caso non esisterebbe. È soltanto a causa della nostra debolezza e della nostra ignoranza che esso avrebbe un senso per noi. E anche senza uscire dai limiti della nostra umana debolezza, ciò che è caso per l'ignorante non lo è più per lo scienziato. Il caso non è che la misura della nostra ignoranza. I fenomeni fortuiti sono per definizione quelli di cui ignoriamo le leggi.*»

Non condividendo questa nozione di caso, Poincaré si chiede: «*Ma questa definizione è davvero soddisfacente? I primi pastori caldei, quando seguivano con lo sguardo i movimenti degli astri senza conoscere ancora le leggi dell'astronomia, avrebbero forse pensato di dire che gli astri si muovevano a caso? Se un fisico moderno studia un nuovo fenomeno e ne scopre la legge martedì, avrebbe forse detto lunedì che quel fenomeno era fortuito?*» Ritenendo paradossale una risposta affermativa a queste domande, Poincaré non accetta il caso come misura della nostra ignoranza e fa un esempio basato sul gioco della roulette, che evidenzia il suo modo di porre il problema. «*Supponiamo di avere un ago che possa girare attorno ad un perno su un quadrante diviso in cento settori, di colore alternativamente rosso e nero. Se esso si ferma su un settore rosso, la partita è vinta, altrimenti è perduta. Com'è evidente, tutto dipende dall'impulso iniziale che imprimiamo all'ago. [...] È sufficiente che l'impulso vari soltanto di uno oppure due millesimi perché il nostro ago si fermi su un settore nero oppure sul successivo, che è rosso. Si tratta di differenze che il senso muscolare non è in grado di apprezzare e che sfuggono anche a strumenti ben più sensibili. Mi è dunque impossibile prevedere che cosa farà l'ago che ho appena lanciato, ed è appunto per questo che ho il batticuore e conto solamente sul caso. La differenza fra una causa e l'altra è impercettibile, mentre la differenza fra un effetto e l'altro è per me della massima importanza, perché ne va di tutta la mia giocata.*»

Si delinea così l'idea che il caso, almeno in una sua possibile accezione, abbia a che fare con quei fenomeni che, pur essendo perfettamente deterministici e con leggi ben conosciute, a piccole variazioni nelle cause fanno seguire grandi differenze negli effetti. Poincaré poi cerca ulteriori ragioni che giustifichino il caso e considera un esempio che ben si raccorda con quanto diremo nei paragrafi successivi: la teoria cinetica dei gas. In sostanza Poincaré dice che le molecole di un gas sono distribuite a caso nel loro contenitore perché il loro numero è grande e le loro interazioni (le collisioni fra molcole) sono *numerose e complesse*. Questo si aggiunge al fatto che per ogni singola collisione, come nel gioco della roulette, una piccola variazione nelle cause cambia di molto gli effetti: variare anche di poco i parametri d'urto può far sì che un urto non avvenga proprio, o che avvenga con grande deviazione dei moti delle molecole dal loro cammino originale. Il cumulo di molti di questi eventi produce la distribuzione a caso delle molecole. E cosa si intende per distribuzione casuale? Che le molecole sono distribuite in modo uniforme all'interno del recipiente (Fi-

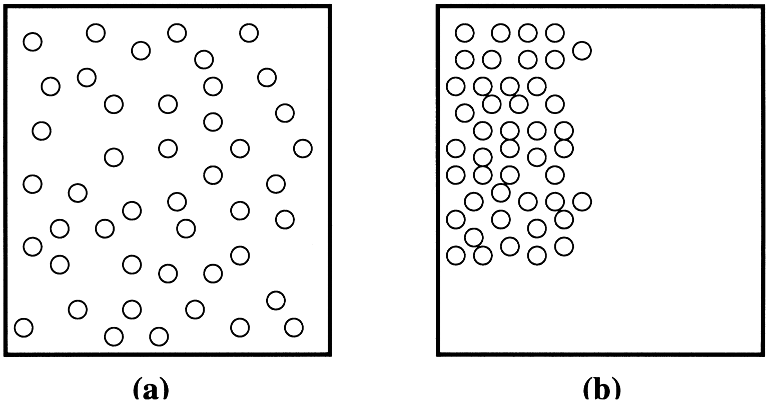

Fig. 1. – Molecole di un gas in un contenitore. A sinistra le molecole sono distribuite a caso nel contenitore, dando luogo ad una distribuzione disordinata e, quindi, circa uniforme di molecole nel contenitore. A destra lo stesso numero di molecole è distribuito in modo più ordinato e, quindi, non uniforme.

gura 1) ([3]). Similmente, il risultato di un certo esperimento o di una certa osservazione verrà ritenuto casuale se nessuno dei possibili risultati è privilegiato rispetto agli altri, ovvero se tutti i possibili esiti hanno uguale probabilità di essere ottenuti. In questi casi, sarà impossibile fare previsioni sul risultato di un esperimento od osservazione, anche se il sistema sotto studio obbedisce a leggi perfettamente deterministiche, come quelle della meccanica a cui sottostanno le molecole di un gas.

Il concatenarsi di piccole cause fino a produrre grandi effetti, che fa apparire tali effetti come fortuiti ed imprevedibili pur essendo determinati da leggi ben precise, è la base del concetto moderno di caos, detto «caos deterministico». Si tratta, tuttavia, di un'idea già nota a Filone di Bisanzio nel terzo secolo avanti Cristo, che, come sostenuto da L. Russo in [5], fu dimenticata e ripresa solo in tempi recenti, quando è stata caratterizzata in termini quantitativi come crescita *esponenziale* delle incertezze iniziali. Per esempio, se la

([3]) Questa è la condizione di equilibrio del gas: al suo interno non ci sono regioni privilegiate e le sue proprietà fisiche, che come vedremo dipendono dal moto delle sue molecole, appaiono uniformi (stessa temperatura e stessa pressione in ogni punto).

freccia scoccata da un arciere si muove di moto rettilineo uniforme e se si ha una piccola incertezza sulla mira dell'arciere, si avrà anche una certa incertezza sul punto in cui la freccia colpirà il bersaglio e tale incertezza crescerà linearmente con la distanza del bersaglio dall'arciere (cf. Figura 2). Per un bersaglio abbastanza lontano si farà addirittura impossibile prevedere se la freccia colpirà il bersaglio o meno. La crescita lineare dell'incertezza (doppia distanza implica doppia incertezza), fa sì che basti ridurre l'incertezza iniziale di un fattore n per migliorare la precisione finale dello stesso fattore (cf. Figura 2). Questo non è il caso del caos deterministico. Nel caos de-

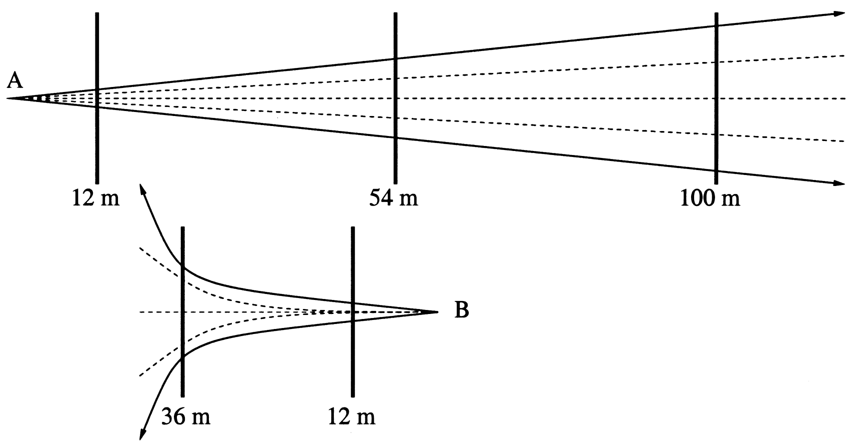

Fig. 2. – La figura in alto rappresenta un arciere che dal punto A scocca una freccia con un'incertezza nella direzione delimitata dall'angolo fra le due linee rette che terminano con una freccia. L'incertezza sul punto in cui la freccia colpirà il bersaglio (una delle linee verticali) è delimitata dall'intersezione delle rette oblique con il bersaglio. Se il bersaglio è vicino all'arciere, l'incertezza è minima; man mano che il bersaglio si allontana, l'incertezza cresce proporzionalmente alla distanza (data in metri in figura). Migliorare di un fattore n la previsione sul punto in cui la freccia cadrà richiede che l'incertezza sulla direzione venga ridotta dello stesso fattore (linee tratteggiate). La figura in basso mostra cosa succederebbe se le incertezze crescessero in modo esponenziale, come nei moti caotici: diventa quasi subito impossibile perfino prevedere se la traiettoria colpirà il bersaglio o meno, e per migliorare la previsione di un fattore n, l'incertezza iniziale dovrà essere ridotta di e^n.

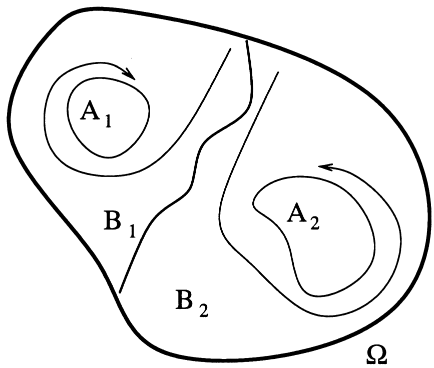

Fig. 3. – Lo spazio delle fasi Ω contiene due attrattori A_1 ed A_2 con bacini di attrazione B_1 e B_2. Una traiettoria con origine in B_i, si avvicinerà sempre più ad A_i col trascorrere del tempo. Due traiettorie in un attrattore caotico si separano ad un tasso esponenziale e, quindi, possono seguire cronologie d'eventi molto diverse, ma visitano con stessa frequenza le stesse regioni dell'attrattore.

terministico le incertezze crescono ad un tasso esponenziale, pertanto un miglioramento nelle previsoni di un fattore n richiede una crescita nella precisione iniziale di un fattore e^n. Questo fatto quantitativo comporta un balzo anche qualitativo nel comportamento dei sistemi caotici rispetto a quelli che non lo sono, che li qualifica anche in linea di principio come entità decisamente diverse.

Può tutto questo giustificare le interpretazioni catastrofiche dell'effetto farfalla?

In primo luogo il buon senso fa concludere che questo effetto non possa essere preso alla lettera e che le sue implicazioni culturali, catastrofiche o esaltanti che si voglia, debbano essere ridimensionate. Alcune considerazioni di carattere matematico, poi, possono aiutare a capire il perché.

Se l'atmosfera terrestre è descrivibile come un sistema deterministico e caotico, come pare essere il caso, la sua dinamica è anche «dissipativa», per via della sua viscosità e, quindi, vincolata a svolgersi in prossimità di un certo «attrattore», determinato dalla condizione iniziale del sistema stesso (Figura 3). Questo significa che se l'evoluzione temporale è espressa in termini di traiettorie $\{S^t x\}_{t=0}^{\infty}$

che vagano in un certo spazio delle fasi Ω, si evidenziano uno o più sottoinsiemi di Ω, $\{A_i\}_{i=1}^n$, ai quali le diverse traiettorie si avvicinano e non se ne allontanano più (4) Se una traiettoria viene «attratta» dal sottoinsieme A_i, non viene attratta da altri sottoinsiemi e si dice che il suo punto iniziale x appartiene al «bacino d'attrazione» di A_i (Figura 3).

In un dato attrattore, se il moto è caotico, due traiettorie con condizioni iniziali molto vicine possono essere viste allontanarsi in modo esponenziale l'una dall'altra. Questo non vuol dire che i due moti saranno sostanzialmente diversi, anzi, le due traiettorie ripercorreranno praticamente gli stessi passi, seppur in ordini cronologicamente diversi. L'impredicibilità dei moti caotici di cui si è detto, dunque, resterebbe ma riguarderebbe più l'impossibilità di predire *quando* un certo evento si verificherà che non il fatto che possa verificarsi o meno. Nel parallelo con l'effetto farfalla, si potrebbe dire che se un uragano in Nord America è contemplato da un dato attrattore, prima o poi si verificherà, mentre se non vi è contemplato non si verificherà. Variazioni di condizione iniziale all'interno dello stesso bacino non cambierebbero questo fatto (5). Perché si abbiano moti sostanzialmente diversi, con comportamenti anche statisticamente diversi, ci vorrebbero delle perturbazioni dello stato iniziale tutt'altro che piccole, perturbazioni capaci di portare la condizione iniziale dall'interno di un bacino di attrazione all'interno di un altro, relativo ad un attrattore di caratteristiche macroscopicamente diverse. Tuttavia, data la grande massa ed estensione e, quindi, la grande inerzia dell'atmosfera terrestre, sembra ingenuo credere nella probabilità che il battito d'ali di una farfalla nelle Filippine possa avere que-

(4) Qui t rappresenta il tempo, $x \in \Omega$ il punto iniziale della traiettoria e $S^t x \in \Omega$ il punto della traiettoria al tempo t.

(5) In questo linguaggio, lo stato iniziale dell'atmosfera è rappresentato da un punto in un certo spazio delle fasi, che viene detto condizione iniziale. L'atmosfera perturbata dal battito d'ali di una data farfalla corrisponde ad una condizione iniziale dalla quale avrà origine un certa evoluzione temporale; l'atmosfera non perturbata da quel dato battito d'ali corrisponde ad una condizione iniziale diversa, dalla quale avrà origine una diversa evoluzione temporale. Se queste due condizioni iniziali appartengono ad un stesso bacino d'attrazione, le due diverse evoluzioni temporali hanno stessa statistica, anche se diversa cronologia.

sto tipo di influenza sulle condizioni climatiche. Il fatto è che l'instabilità che rende impredicibile il comportamento fine (istante per istante) dei sistemi caotici è perfettamente conciliabile con una forte stabilità da un punto di vista più grossolano, ovvero statistico.

Questo ragionamento richiede che le nozioni di «piccola» e «grande» perturbazione siano accuratamente definite, perché è proprio a causa delle «piccole» incertezze sulle condizioni dell'atmosfera che le previsioni del tempo sono a volte così lontane dalla realtà. In particolare, si dovrebbe fare un'analisi delle scale che vengono ritenute piccole ai fini delle previsioni meteorologiche ed osservare che sono enormemente più grandi delle scale che riguardano il moto di un insetto qualsiasi.

Ma molto più banalmente, l'inganno celato nelle enunciazioni catastrofiche dell'effetto farfalla può essere svelato senza far ricorso a concetti sofisticati quali quelli di spazi delle fasi, attrattori e via dicendo. Basta osservare che la viscosità dell'aria annulla l'effetto del battito d'ali di una farfalla entro pochi centimetri di distanza da dove è avvenuto e che, in ogni caso, contemporaneamente a questo battito d'ali avvengono miriadi di altri piccoli moti (come la caduta di una foglia lì vicino) che interferiscono con quello dell'insetto, contrastandone gli effetti.

L'effetto farfalla non giustifica dunque la tesi deresponsabilizzante e demoralizzante secondo la quale l'Umanità dall'antichità ad oggi è stata vittima di eventi insignificanti ed incotrollabili, ovvero del caso più cieco, piuttosto che delle responsbilità personali e collettive degli uomini di tutti i tempi. Si dovrebbe invece concludere che il catastrofico effetto farfalla è, in un certo senso, tanto realistico quanto il fluire del calore da un corpo freddo ad uno caldo (della qual cosa si parlerà nei prossimi paragrafi).

Il modello di Lorenz.

In un articolo del 1963, [6], il meteorologo Edward Lorenz presentò un'analisi del seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie nello spazio $\mathbb{R}^3$:

$$(1) \qquad \begin{cases} \dot{x} = \sigma(y-x) \\ \dot{y} = \varrho x - y - xz \\ \dot{z} = -\beta z + xy \end{cases} \qquad \text{con parametri } \sigma, \varrho, \beta > 0$$

che è un modello altamente idealizzato per la convezione di uno strato sottile di un fluido riscaldato dal basso.

Prendendo $\sigma = 10$ e $\beta = 8/3$, Lorentz dimostrò l'esistenza di una regione chiusa e semplicemente connessa D, che contiene il punto $(0, 0, 0)$, dalla quale nessuna traiettoria può uscire ($S^t x \in D$ per ogni $t > 0$ se $x \in D$). Si può poi vedere che se ϱ è piccolo, una traiettoria generica converge nel tempo verso il punto $(0, 0, 0)$; per ϱ un po' più grandi emergono due nuovi punti verso uno dei quali una traiettoria può convergere; infine, per ϱ più grandi di un certo valore critico il moto diventa caotico.

Si deve evidenziare il fatto che il sistema di equazioni (1.1) non è e non ha alcuna pretesa di essere un buon modello dell'atmosfera terrestre e che pertanto, senza opportuna giustificazione, non è lecito estendere ai comportamenti reali dell'atmosfera le conclusioni dedotte da esso. Il modello di Lorenz è servito invece a comprendere alcuni aspetti qualitativi delle evoluzioni temporali dei sistemi deterministici. In particolare è servito a scoprire quanto comuni siano i moti caotici e solo per questo è diventato a ragione molto popolare.

Come il modello di Lorenz, qualunque modello matematico di un sistema reale è una schematizzazione del sistema che non può rappresentarlo in tutte le sue sfaccettature. Di conseguenza, i risultati ottenuti a partire da un modello qualsiasi, devono essere valutati con cautela e solo il confronto con l'esperienza può chiarire quali aspetti della realtà sono ben rappresentati dal modello e quali invece non lo sono. Questo fatto sembra sfuggire a chi prende alla lettera l'effetto farfalla, o a chi prende alla lettera modelli ancor più estremi che quello di Lorenz, come quelli di cui diremo qualcosa nel § 3. A questo riguardo, vale anche la pena osservare che l'aver ottenuto rigorosamente certi risultati, come teoremi per un dato modello di un sistema reale, non costituisce una garanzia che i risultati stessi abbiano qualche attinenza con la realtà.

2. – L'Informazione.

Un'evoluzione continua nel tempo, come quella descritta dalle equazioni di Lorenz (1.1), può essere ridotta ad una evoluzione discreta nel tempo, osservandola stroboscopicamente, cioè a dati istanti di tempo successivi $t_1, t_2, \ldots$. Per esempio, Lorenz osservò i valori della variabile z del sistema (1.1) quando questa aveva un massimo relativo. In tal modo scoprì che le corrispondenti successioni temporali $\{z_1, z_2, \ldots\}$, pur essendo diverse fra loro per diversi dati iniziali, erano con buona approssimazione descritte da un'unica legge del tipo $z_{n+1} = f(z_n)$. Normalizzando i dati (6) in modo tale che tutti cadano entro l'intervallo $[0, 1]$ l'evoluzione discreta determinata dalla f può essere ricondotta alla semplice (ma approssimativa) forma analitica:

$$\xi_{n+1} = 2\xi_n \mod 1 \tag{2}$$

che costituisce uno dei modelli più semplici e conosciuti di dinamica caotica. La funzione f di Eq. (2.2), infatti, è una trasformazione di $[0, 1]$ in se stesso e le sue traiettorie dipendono sensibilmente dalle condizioni iniziali: due punti inizialmente vicini si allontanano ad un tasso esponenziale λ finché la loro distanza non è dell'ordine di 1. Questo tasso, determinato dall'equazione $e^{\lambda n} = 2^n$ perché le distanze crescono come 2^n al crescere del numero di iterate n [7], viene detto esponente di Ljapunov e la sua positività comunemente identifica le dinamiche «caotiche» (7).

(6) Sostituendo le z_n con delle nuove variabili ξ_n che appartengono a $[0, 1]$.

(7) Si precisa che il concetto matematico di caos non è definito in un unico modo in tutti i contesti e che non è sempre (o solo) legato alla positività degli esponenti di Ljapunov. Pertanto il termine caos acquista significati leggermente diversi a seconda del tipo di studio che si sta svolgendo. Osserviamo anche che l'uso del termine caos può apparire inadeguato a quanto si vuole esprimere, dato che è ora evidente che non si riferisce ad un qualche tipo di disordine nelle leggi che determinano le dinamiche «caotiche». Al contrario, queste leggi sono in genere sorprendentemente semplici ed «armoniose», se così si vuol dire per contrasto. È solo per motivi storici (e mediatici) che

Il passaggio da una evoluzione continua nel tempo ad una discreta è possibile in molte circostanze e consente di semplificare molti problemi senza alcuna perdita dei dettagli importanti della dinamica. Pertanto ci limitiamo a considerare evoluzioni discrete nel tempo, rappresentabili per mezzo di leggi deterministiche del tipo $x_{n+1} = f(x_n)$, con spazio delle fasi Ω dato da un insieme compatto nello spazio euclideo a d dimensioni.

Il collegamento fra dinamica, legge f, ed «informazione» viene fatto quando della dinamica vengono studiate le proprietà statistiche ([8]) A questo fine, si suddivide lo spazio delle fasi con una particolare partizione finita $\mathcal{P}_0 = \{C_{0,1}, C_{0,2}, \dots, C_{0,N}\}$, e si attribuisce ad ogni cella $C_{0,i}$ un peso μ_i proporzionale alla frequenza con cui $C_{0,i}$ viene visitata da una generica traiettoria. L'insieme dei pesi delle celle determina una distribuzione di probabilità in Ω che costituisce un ponte fra la dinamica dovuta ad f che, nonostante il suo determinismo è disordinata e apparentemente incomprensibile, e le proprietà statistiche della dinamica stessa. In questo caso si adotta la visione frequentista del concetto di probabilità, cosicché la probabilità μ_i di trovare la traiettoria nella cella $C_{0,i}$ rappresenta la frequenza con cui la traiettoria visita $C_{0,i}$. Collegamenti via via più raffinati fra f e le sue proprietà statistiche vengono ottenuti prendendo partizioni via via più fini (con celle di volume decrescente) $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots$ e così via, facendo tendere a zero i volumi delle celle. Il risultato di questa ope-

l'uso di questo termine è diventato così comune ma, al di là della sua validità linguistica, noi lo riterremo semplicemente un termine tecnico, scevro di qualunque altro significato che non sia quello datogli dalla definizione.

([8]) Anche se altri tipi di studio sono possibili, come quelli di carattere topologico o geometrico, l'approccio statistico è praticamente inevitabile se si considera la dinamica caotica di sistemi fisici. Per esempio, seguire il moto delle singole molecole che compongono un fluido non solo è impossibile per via del loro numero (un multiplo del numero di Avogadro, il quale vale $6.022 \cdot 10^{23}$) e del disordine che lo caratterizza, ma è anche del tutto inutile: corrisponde ad un livello di dettaglio di conoscenza del sistema che non ha nessun riferimento con la nostra esperienza sensibile. Quello che invece è possibile ed interessante fare è calcolare le proprietà medie della dinamica, in quanto ad esse corrispondono i concetti di temperatura, pressione e via dicendo, che sono effettivamente misurabili negli esperimenti e che hanno un'immediata corrispondenza coi nostri sensi e, quindi, anche con il nostro modo di percepire gli oggetti che si trovano in Natura.

razione, quando possibile, è una misura di probabilità μ_f su Ω per la quale si può scrivere

$$\langle \Phi \rangle_f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \Phi(f^i x) = \int_{\Omega} \Phi d\mu_f \tag{3}$$

dove la media temporale $\langle \Phi \rangle_f$ della funzione $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}$ è definita dalla prima uguaglianza mentre la seconda uguaglianza, che definisce μ_f, deve essere con probabilità 1 indipendente da x (cioè l'integrale deve assumere lo stesso valore per ogni $x \in \Omega$, a meno di un insieme di punti di misura nulla) ([9]) Per esempio, la temperatura di un gas perfetto monoatomico ad alte temperature, che si trovi in equilibrio termodinamico, è un'osservabile proporzionale alla media temporale dell'energia cinetica delle molecole che lo costituiscono, nel sistema di riferimento in cui il corpo è a riposo ([10]) Una misura μ_f così costruita e dotata di alcune proprietà tecniche su cui non ci soffermiamo, viene detta misura di SRB, dai nomi di Sinai, Ruelle e Bowen che la studiarono per primi.

Le condizioni sotto le quali hanno senso sia l'Eq. (3) che quanto segue in questo paragrafo, sono oggetto della cosiddetta «Teoria Ergodica» [9], ma ci pare inopportuno entrare nei dettagli di questa questione, che è molto tecnica. Ai nostri fini basterà tenere presente che esiste almeno una classe di sistemi dinamici per i quali le affermazioni di questo paragrafo valgono come teoremi: la classe dei sistemi di Anosov [10].

Data la partizione $\mathcal{P} = \{C_1, C_2, \dots, C_N\}$ (cf. Figura 4), i moti determinati su Ω da una legge f possono essere considerati dal punto di vista della sequenza di celle visitate da una data traiettoria $\{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \dots\} \subset \Omega$, dove per $f^2(x)$ si intenda $f(f(x))$, per $f^3(x)$ si intenda $f(f(f(x)))$ e così via. A questo fine si pone $\sigma_0(x) = i$

([9]) La quantità $\langle \Phi \rangle_f$ è il risultato atteso in una misurazione della Φ e pertanto viene detto «osservabile» in fisica.

([10]) Si osserva che la proporzionalità fra energia cinetica e temperatura di un corpo teoricamente sussiste solo nel caso del gas perfetto monoatomico ad alte temperature. Si può avere un'idea di cosa questo significhi in pratica, osservando che la proporzionalità suddetta descrive accuratamante sistemi come il gas di potassio alla temperatura di 157 °C (cfr. [8], cap. 14).

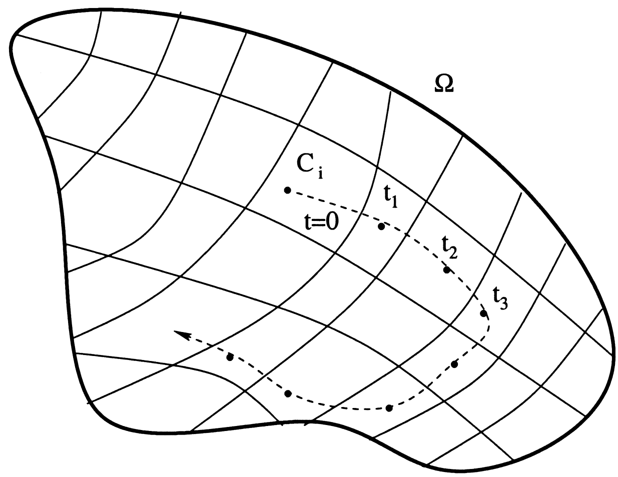

Fig. 4. – Lo spazio delle fasi Ω è suddiviso nelle celle $C_1, \ldots, C_N$ della partizione $\mathcal{P}$. Una traiettoria ha origine nella cella C_i e poi visita le celle C_j, C_k, C_l, … agli istanti di tempo t_1, t_2, t_3, …. In tal modo la traiettoria viene associata alla sequenza simbolica $\sigma(0)\,\sigma(1)\,\sigma(2)\,\sigma(3)\ldots$, dove $\sigma(0)=i$, $\sigma(1)=j$, $\sigma(2)=k$, $\sigma(3)=l, \ldots$

se $x \in C_i$, $\sigma_1(x) = j$ se $f(x) \in C_j$, $\sigma_2(x) = k$ se $f^2(x) \in C_k$ ecc., e si costruisce la successione di numeri $\sigma(x) = \{\sigma_0(x), \sigma_1(x), \sigma_2(x), \ldots\}$. In tal modo, i numeri $1, 2, \ldots, N$ diventano dei simboli che indicano quale cella la traiettoria si trova a visitare ad un certo punto dell'evoluzione, e la traiettoria stessa può essere espressa in un certo senso dalla successione di simboli $\sigma(x)$. Intuitivamente, quanto più fine è la partizione e, di conseguenza, quanto più grande è N, tanto più accurata sarà la rappresentazione simbolica della dinamica. Difatti il volume della cella C_i rappresenta l'incertezza che si ha sul punto iniziale x di una data traiettoria, se tutto ciò che si conosce di questo punto è la sua appartenenza a C_i. In altre parole, questo volume rappresenta l'accuratezza con cui un ipotetico strumento di misura individua la posizione del punto x: l'appartenenza di x a C_i costituisce quindi l'**informazione** che una sola misurazione fatta con quello strumento fornisce sul punto x e sull'evoluzione che da x ha origine. Una partizione fine corrisponde ad uno strumento preciso, dotato di elevata risoluzione, mentre una partizione grossolana corrisponde ad uno strumento inaccurato, dotato di scarsa risoluzione.

Per sistemi caotici, le cui traiettorie con origini vicine tendono fortemente a separarsi, un'accurata rappresentazione della dinamica non necessita di partizioni particolarmente fini: anche con uno strumento di misura abbastanza impreciso si può ottenere una rappresentazione accurata delle condizioni iniziali e, quindi, delle traiettorie. Si capisce questo osservando che due punti iniziali vicini, $x, y \in C_i$, per un certo tempo visitano le stesse celle, $\sigma_1(x) = \sigma_1(y), \ldots, \sigma_m(x) = \sigma_m(y)$ fino ad un certo m, e poi, per via della crescita esponenziale delle distanze, percorrono sequenze diverse. Indichiamo con E_m l'insieme di punti contenente x e contenuto in C_i, dai quali partono traiettorie i cui primi m passi sono codificati dalla stessa sequenza $\{\sigma_1(x), \sigma_2(x), \ldots, \sigma_m(x)\}$. Il numero di passi durante i quali due diverse traiettorie restano tanto vicine da seguire la stessa sequenza di celle, dipende dalla distanza fra le loro origini ed aumenta al diminuire di questa. Così per $m = 0$ si ha $E_m = C_i$, mentre per $m = 1$ i punti vicini al bordo di C_i non fanno parte di E_m perché f li manda in celle diverse da quella di $f(x)$; per $m = 2$ i punti che fanno parte di E_m sono ancora di meno e si può scrivere $E_0 \supset E_1 \supset E_2 \supset \ldots$. Specificare una certa sequenza di simboli $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m\}$ diventa allora lo stesso che rappresentare il punto x con un certo grado di approssimazione: tanto più piccolo è E_m, tanto maggiore è la precisione con cui x viene individuato, ovvero tanto maggiore è l'informazione codificata dalla data sequenza di simboli. Che la partizione utilizzata sia grossolana, ovvero che ogni singola misura sia inaccurata, non costituisce pertanto un problema: per avere una buona precisione basta ripetere le misurazioni un numero abbastanza grande di volte.

L'insieme dei simboli $\alpha = \{1, 2, \ldots, N\}$ costituisce una specie di *alfabeto* con il quale si possono scrivere delle *parole*, $P_{0,m} = \{\sigma_0 \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_m\}$; e la successione infinita di simboli che codifica una certa traiettoria può essere vista come un libro scritto da f utilizzando l'alfabeto α. Questo libro contiene un'informazione che si può quantificare in vari modi. Se come misura dell'informazione contenuta in una successione infinita di simboli prendiamo il numero di parole diverse di data lunghezza m che vi si trovano, si possono definire come *semplici* le traiettorie di un punto fisso ($f(x) = x$) e di un'orbita periodica ($f^m(x) = x$). Tali traiettorie, infatti, contengono in sostanza una sola parola che viene ripetuta lungo la traiettoria: $P_{0,m} = \{ii \dots i\}$ (i ripetuto m volte) per il punto fisso e $P_{0,m} = ij \dots k$ (m simboli diversi) per l'orbita periodica. Sequenze simboliche più complicate, come quelle che codificano traiettorie caotiche, contengono una varietà di parole maggiore. In questo caso l'informazione può essere misurata utilizzando le frequenze con cui le diverse parole sono ripetute all'interno delle successioni. Per esempio, date le frequenze $\mu(1), \dots, \mu(N)$ delle parole fatte di un solo simbolo, una misura dell'informazione che si può ottenere con la partizione $\mathcal{P}$ è la cosiddetta *entropia* di $\mathcal{P}$, definita da

$$\eta(\mathcal{P}) = -\sum_{i=1}^{N} \mu(i) \log \mu(i) \quad (\text{avendo posto } 0 \log 0 = 0). \tag{4}$$

Una diversa misura dell'informazione contenuta in una sequenza σ viene ottenuta separando le sue parole lunghe «rare» da quelle che non lo sono. Questo viene fatto scegliendo un numero $\varepsilon > 0$ e suddividendo le parole di data lunghezza m in due classi F_m^ε e D_m^ε, di cui la prima contiene solo le parole la cui frequenza $\mu(P)$ si somma ad un numero inferiore ad ε, cioè

$$\sum_{P \in F_m^\varepsilon} \mu(P) < \varepsilon \tag{5}$$

e la seconda contiene tutte le altre parole. Fra tutte le possibili scelte di F_m^ε si prende poi quella che rende minimo il numero $\mathcal{N}_{m,\varepsilon}$ di parole in D_m^ε e si calcola il limite

$$s(\sigma) = \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \log \mathcal{N}_{m,\varepsilon}. \tag{6}$$

Ammesso che tutte queste quantità esistano, il numero $s(\sigma)$ viene detto **informazione** o **complessità** di σ [7]. Questa terminologia deriva dal fatto che le parole contenute in σ, ovvero i messaggi che σ comunica, possono essere riscritti, salvo casi rari, con un alfabeto di $\widetilde{N}$ simboli, con $\widetilde{N} < N$, purché si abbia $s(\sigma) < \log \widetilde{N}$. Questo è poi equivalente a dire che, a parte casi rari, si possono riscrivere le parole di lunghezza m nello stesso alfabeto ad N simboli, ma accorciandole fino ad una lunghezza che non scenda sotto $\widetilde{m}$, con $\widetilde{m}$ dato da $s(\sigma)m = \widetilde{m}\log N$, come un breve calcolo dimostra. Pertanto $s(\sigma)$ quantifica l'informazione realmente contenuta in σ, cioè al netto delle ridondanze.

3. – L'Universo è un gigantesco calcolatore?

La popolarità delle teorie sul caos alla quale si è accennato sopra è dovuta in buona parte alla disponibilità di calcolatori sufficientemente veloci e capaci da consentire la visualizzazione di quegli oggetti *frattali* che sono gli attrattori delle dinamiche caotiche. I frattali sono strutture di indubbio fascino e bellezza, che possono essere generate anche iterando regole di calcolo sorprendentemente semplici [11, 12] (Figure 5, 6).

L'attrattiva esercitata dai fantastici eppur apparentemente realistici mondi frattali che si possono rappresentare con i moderni calcolatori (Figura 7), la possibilità almeno teorica di poter codificare le evoluzioni più complesse in programmi di calcolo, la capacità dei calcolatori di gestire banche dati di dimensioni immani e di comandare le macchine più sofisticate come sarebbe impossibile all'uomo e la possibilità di sostituire con un calcolatore e una rete di trasmisssione dati perfino le persone fisiche per lavorare, giocare e comunicare quotidianamente, sono fra le ragioni che stanno portando il calcolatore a svolgere un ruolo sempre più importante nella società. Inoltre, sono in molti a ritenere sempre più plausibile il fatto che presto i calcolatori saranno dotati di un'intelligenza autonoma dai loro programmatori, con il vantaggio di una rapidità di esecuzione dei comandi che è già ordini di grandezza superiore a quella umana. Guadagna dunque sempre più credito l'opinione che tutta la realtà possa ridursi, nella sua sostanza, ad elaborazione, trasferimento e immagazzinamento di dati, di *informazioni*. Infatti, un calcolatore altro non fa che lavorare con grandissima efficienza su lunghe sequenze simboliche come quelle del paragrafo precedente, fatte di zeri e di uni.

D'altro canto, la supremazia dell'informazione sulla materia appare già evidente in molti contesti. Senza entrare nel merito dei grandi dibattiti di politica internazionale, è facile accorgersi che chi ha possibilità di comunicare ed agire nei diversi punti del pianeta in

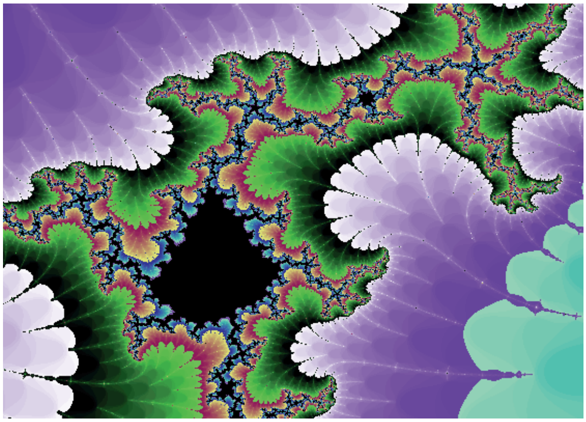

Fig. 5. – Un dettaglio del più famoso fra i frattali: l'insieme di Mandelbrot, ottenuto iterando la semplice regola $z_{n+1} = z_n^2 + c$, dove la variabile z ed il parametro c sono numeri complessi.

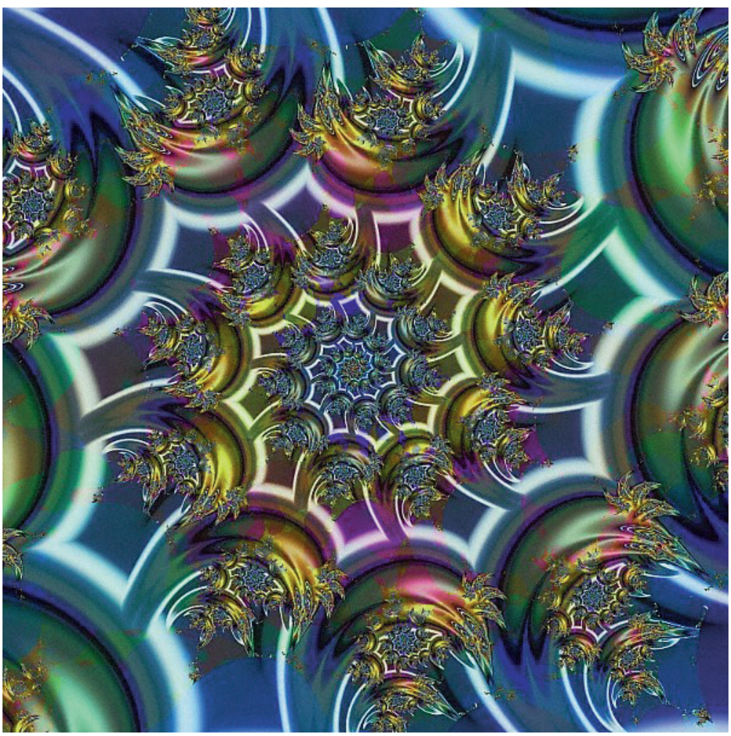

Fig. 6. – Esempio di arte frattale creata da G. W. F. Albrecht, scaricata dal sito internet http://www.gwfa.de/

Fig. 7. – Paesaggio frattale immaginario generato al calcolatore ispirandosi alle montagne della Nuova Zelanda, scaricato dal sito internet http://www.fractal-landscapes.co.uk/links.html

tempo reale e senza doversi spostare da casa ha un vantaggio anche su chi è in possesso di ingenti risorse naturali. La ricchezza prodotta è più patrimonio di chi detiene le redini della finanza che non di chi la produce e per la finanza l'informazione è basilare: l'informazione è leggera, si trasporta con grande facilità e non richiede ampi spazi per essere accumulata. Questo vale anche in biologia: la nostra statura, il colore dei nostri occhi, le nostre attitudini ecc. sono codificate nelle sequenze simboliche realizzate dalle molecole dei nostri geni. Sembrerebbe quasi che il materiale di cui sono fatti questi geni e le cellule che li contengono, siano puramente accidentali e che solo l'informazione contenuta in essi sia importante. Difatti, nella continuazione delle specie ciò che conta non è tanto l'individuo e la sua materialità, quanto l'informazione contenuta nel suo patrimonio genetico che viene passata di generazione in generazione. Dopo tutto, neanche nella vita di un singolo individuo si può identificare una parte materiale che lo abbia accompagnato lungo tutto il suo corso: le cellule muoiono e vengono rimpiazzate da altre cellule e c'è un continuo flusso di materia che contribuisce a far sì che nessuna molecola di un corpo ne faccia parte stabilmente.

L'unica cosa che sembra rimanere è l'Informazione ed i processi con cui questa viene trasferita, modificata e resa in qualche modo superiore agli individui stessi che l'hanno utilizzata. Gli individui rischiano pertanto di essere visti come particolari tipi di calcolatori: calcolatori fatti di materiale organico piuttosto che di silicio, plastica e metalli vari, ma nientaltro che meri substrati sui quali l'Informazione prospera. Come per una persona l'automobile è solo uno strumento per spostarsi da un posto all'altro e le sue caratteristiche materiali sono in larga parte secondarie, la persona diventa il mezzo secondario con cui l'informazione genetica viene trasportata. La stessa informazione, infatti, potrebbe essere codificata in un qualunque altro calcolatore che fosse ugualmente potente.

Continuando su questa linea, si può arrivare alla conclusione che: *«l'Universo è un gigantesco misterioso Computer del quale la sola cosa che conta è il trasporto di informazione»*, che è quanto affermato da T. Siegfried nell'ambito di una moderna cosmogonia [13]. L'idea non è nuova: se si sostituisce l'informazione con l'*energia*, si ottiene una visione del mondo piuttosto vicina a quella dei cosiddetti *energetisti* del XIX secolo, i quali ritenevano che tutti i fenomeni fisici fossero riconducibili ad un continuo fluire e trasformarsi di varie forme d'energia [14, 15].

Il limite estremo di questa visione è forse raggiunto dal cosmologo F. Tipler, che si spinge fino a proporre una sua metafisica: la teologia di un «dio-che-si-evolve», chiamata «Teoria del punto Omega» [16, 17]. Secondo questa teoria i singoli e la specie umana nel suo complesso dovranno estinguersi per lasciare il posto ad una nuova specie i cui individui saranno come sofisticatissime macchine per l'elaborazione dell'informazione, sempre più capaci di controllare tutte le forze della Natura, fino ad arrivare al controllo completo dell'Universo. Al raggiungimento di questo traguardo tutta la realtà verrebbe a costituire il «Punto Omega»: un misterioso gigantesco calcolatore nella cui memoria tutta la storia precedente dell'Universo avrebbe posto. Una discussione critica di questa teoria esula dagli scopi del presente articolo e si rimanda a due interessanti lavori di S. Rondinara [18] per possibili approfondimenti.

Per una ragione o l'altra, l'idea che tutto sia informazione si fa sempre più strada nella cultura moderna, ma qualche dubbio sulla sua validità universale è lecito, come vedremo nel prossimo paragrafo, prendendo spunto dalla termodinamica.

4. – Il calore.

Il caos e l'informazione sono diventati patrimonio anche di chi si occupa delle leggi della termodinamica: la branca della fisica che studia le proprietà dei corpi macroscopici attraverso concetti quali quelli di temperatura, calore, entropia ecc. Questo riguarda in particolare la meccanica statistica, che si propone di comprendere le leggi macroscopiche partendo dalla dinamica dei costituenti elementari della materia, come gli atomi e le molecole nei casi più comuni. Tale dinamica viene solitamente ritenuta caotica, nel senso dato a questo termine da Ludwig Boltzmann [14], o come espresso da recenti rivisitazioni di quell'idea, quali l'*ipotesi caotica* di Gallavotti e Cohen [19]. L'informazione viene così ad assumere rilievo in termodinamica, per caratterizzare i moti caotici microscopici che dovrebbero spiegare i comportamenti macroscopici dei sistemi materiali.

Il calore è un'entità macroscopica direttamente collegata ai moti caotici microscopici, che prima di essere definitivamente riconosciuto come tale verso la metà del secolo XIX, è stato considerato ora un fluido che può essere trasportato da un corpo ad un altro, ora come il prodotto del moto rapido degli atomi. La definitiva accettazione della seconda ipotesi non avvenne in modo semplice ed incontrastato, anzi, come spiegato da Brush in [15], fu più una conseguenza dell'accettazione della teoria ondulatoria della luce, che non degli esperimenti fatti a suo sostegno. Più precisamente, il calore è quell'energia che può essere scambiata fra un sistema e l'ambiente circostante *esclusivamente* in virtù di una differenza di temperatura [20]. Dato che il calore si connota come energia che viene trasferita, in assenza di questo trasferimento non si parla neanche di calore «in un corpo» (cfr. [20], § 4.5). Altre forme d'energia (meccanica, chimica, nucleare ecc.) possono essere integralmente trasformate in calore, ma il contrario non è mai stato osservato, per cui se ne postula l'impossibilità. Perché? Cerchiamo di comprenderne le ragioni riprendendo in considerazione il gas perfetto monoatomico ad alte temperature, per semplicità ([11]). L'energia di un tale sistema ([12]) si suddivide in due parti: energia potenziale Φ dovuta alle interazioni fra le particelle ed energia cinetica K dovuta al loro moto. Come detto nel § 2, la temperatura del gas è legata all'energia cinetica K, la quale si esprime come somma delle energie cinetiche dei suoi N atomi:

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2 \; , \tag{7}$$

dove m_i è la massa dell'i-esimo atomo e v_i ne è la velocità. In generale, K può anche essere decomposta in una parte relativa al moto ordinato del sistema, definito come quello di velocità media (o velocità del baricentro)

$$\overline{v} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i v_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \tag{8}$$

ed una parte di moto disordinato, cioè quello che resta delle velocità dei componenti elementari quando se ne sottrae il moto ordinato:

$$c_i = v_i - \overline{v} \, , \qquad i = 1, \dots, N \, . \tag{9}$$

Solitamente, $\overline{v}$ è una velocità trascurabile rispetto alle velocità delle particelle ed è esattamente nulla nel sistema di riferimento nel quale un corpo è a riposo. Vale però la pena considerare separatamente

([11]) Come osservato da uno dei recensori di questo articolo, cui si è grati per la precisazione, resta sottinteso che la discussione sarà soggetta a delle limitazioni. La più grave di queste limitazoni riguarda il fatto che la relazione fra temperatura ed energia cinetica del moto disordinato (detto moto d'agitazione termica) non è così semplice come nel caso del gas perfetto monoatomico ad alte temperature, nel quale è una relazione di semplice proporzionalità. Il meccanismo del trasporto del calore che vogliamo descrivere, come effetto delle interazioni fra le particelle di corpi a diverse temperature, resta invece valido nella sua essenza anche più in generale.

([12]) Che pensiamo sia costituito da moltissime particelle microscopiche (il numero di Avogadro per una grammomolecola di materia).

il moto ordinato, o di insieme, del gas e quello disordinato per almeno due motivi. Immaginiamo, per esempio, che $\overline{v}$ sia la velocità del contenitore del gas posto su di un treno. Se non si sottraesse questa quantità dalle velocità v_i degli atomi, si arriverebbe alla conclusione che la temperatura del gas dipende dalla velocità del treno, il che mostra che la relazione fra energia cinetica e temperatura può solo riguardare l'energia cinetica del moto disordinato K_d e non quella del moto di insieme. Alle alte temprature, poi, K_d è predominante rispetto all'energia potenziale e si trova la relazione di proporzionalità fra la temperatura e K_d cui si è accennato nel § 2.

L'energia del moto di insieme di tutto il sistema, o di sue parti macroscopiche, ha però interesse in quanto può essere spesa interamente per compiere lavoro. Per esempio, il contenitore del gas può andare ad urtare contro un altro oggetto a velocità $\overline{v}$ cedendo tutta la sua energia e quella del moto ordinato del gas, fermandosi e mettendo in moto l'altro oggetto.

Al contrario, il moto disordinato delle molecole non è utilizzabile integralmente per fare del lavoro: sarebbe come cercare di far sollevare un peso ad un grande numero di mosche, tramite altrettanti fili sottili attaccati alle mosche. Sebbene gli insetti possano essere dotati di grande energia, per via del loro numero, il peso verrebbe sollevato solo nell'improbabile caso che le mosche fossero orientate a muoversi in una stessa direzione (moto ordinato). In genere, dato il disordine del loro moto, ben poco dell'energia delle mosche andrebbe spesa per il lavoro desiderato. Un modo di utilizzare l'energia associata al moto disordinato degli atomi di un gas è quello di sfruttare la sua pressione per spingere un pistone, come nella fase di espansione della miscela di aria e benzina che si ha nei cilindri dei motori a scoppio. La pressione sul pistone, infatti, è il risultato delle collisioni degli atomi con la superficie del pistone, le quali sono quelle che sono grazie al moto disordinato. Tuttavia, nell'espansione aumenta il volume occupato dal gas, il quale cambia il suo stato termodinamico, raffreddandosi e perdendo la sua capacità di compiere lavoro molto prima che tutta l'energia del suo moto disordinato sia stata spesa ([13])

L'energia del moto disordinato può essere utilizzata anche senza compiere direttamente del lavoro, perché può essere ceduta, sotto forma di *calore*, a quei corpi che si trovino a temperature più basse, in virtù della sola diffrenza di temperatura. Questo avviene come segue. Dati due corpi dello stesso materiale, le molecole di quello a temperatura più alta hanno in media una maggior energia cinetica di quelle del corpo a temperatura più bassa. Quando i due corpi vengono messi a contatto fra loro, le collisioni fra le molecole dell'uno e dell'altro accelerano in media le molecole del corpo più freddo, aumentandone la temperatura, e rallentano quelle del corpo più caldo, raffreddandolo e trasferendo dell'energia da questo a quello più freddo. In qualunque modo si cerchi di utilizzare il calore mentre passa dal corpo caldo a quello freddo, il suo stesso fluire è dovuto ad una cessione di energia al corpo freddo per incrementarne il moto d'agitazione termica. Pertanto, solo una frazione del calore perduto dal corpo caldo può essere utilizzata per compiere lavoro. Vedremo ora che quello che ci si aspetta in media effettivamente si verifica, grazie al fatto che i moti microscopici sono disordinati e che coinvolgono un grande numero di particelle.

Disordine e caos.

Il passo da disordinato a caotico sembrerebbe breve a questo punto ma, in realtà, non è così semplice come potrebbe apparire, se per caotico s'intende un moto con le caratteristiche descritte nel paragrafo 1. Esistono infatti molti tipi di moti caotici in quel senso che nulla hanno a che vedere con i moti delle molecole, né è chiaro che

([13]) Il modello del gas perfetto ad alte temperature non è più utilizzabile a questo punto e con ciò cessa di valere anche la legge di proporzionalità fra temperatura ed energia cinetica K_d. Quello che avviene è che parte di K_d viene spesa per muovere il pistone, quindi K_d (e con essa la temperatura del gas) diminuisce fino a che non è più predominante rispetto all'energia potenziale delle forze di attrazione fra le particelle. Queste forze si fanno allora sentire contrastando l'espansione del gas ed impedendo che si compia ulteriore lavoro, quando K_d è ancora una frazione importante dell'energia totale.

tale tipo di caos sia effettivamente richiesto per la validità delle leggi che governano il comportamento dei corpi macroscopici (si veda per esempio [21] per quanto riguarda il trasporto di materia). Si sa che i moti molecolari sono disordinati a causa delle interazioni fra le molecole stesse (collisioni) e fra le molecole e le pareti dei contenitori nei quali i fluidi sono contenuti. In queste interazioni si ha uno scambio di energia e di quantità di moto che varia molto per piccole variazioni nei parametri di collisione ed il numero di collisioni, come quello delle particelle, è molto grande. Il risultato è che dopo un numero abbastanza ridotto di collisioni per particella, le particelle appaiono distribuite a caso nel contenitore, con velocità ugualmente casuali. In particolare, nel caso di un gas perfetto ad alta temperatura, i moduli delle velocità degli atomi risultano distribuiti con densità di probabilità «Maxwelliana»:

$$P(\vec{v})\, d\vec{v} = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-m\vec{v}^2/2k_B T}\, d\vec{v} \tag{10}$$

dove $P(\vec{v})\, d\vec{v}$ rappresenta la probabilità di trovare una particella la cui velocità stia dentro un volumetto tridimensionale $d\vec{v}$ centrato su $\vec{v}$, m è la massa di una particella, k_B è detta costante di Boltzmann e T è la temperatura. È grazie a ciò che vale la semplice legge di proporzionalità fra temperatura ed energia cinetica, in questo caso.

Le interazioni stanno dunque alla base del concetto di calore; sono esse che possono trasformare un moto ordinato la cui energia potrebbe essere interamente utilizzata per compiere lavoro, in un moto disordinato la cui energia è utilizzabile solo in parte. Ed è grazie alle interazioni che si può trasferire l'energia da un corpo ad un altro per effetto delle sole differenze di temperatura, come visto sopra (14).

(14) Da un punto di vista matematico, il problema del comportamento termodinamico di un sistema di particelle interagenti presenta delle difficoltà enormi e passa per la dimostrazione dell'ergodicità del sistema. A tutt'oggi, questa dimostrazione è stata fornita per sistemi di particelle «dure», la cui superficie è convessa, cosa che potrebbe andar bene per descrivere i gas perfetti monoatomici, se non fosse per qualche limitazione tecnica sulle masse delle particelle. Per esempio, sono esclusi dalla dimostrazione i sistemi con particelle tutte uguali! Una rassegna di risultati ottenuti in questo campo si trova in [22].

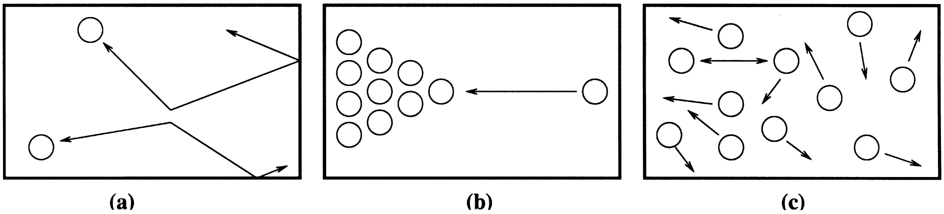

Fig. 8. – In un biliardo con due sole bocce, come in (a), il moto in avanti o indietro delle bocce non indica se il tempo sta scorrendo in avanti o indietro, pertanto le traiettorie con freccia in avanti e con freccia indietro sono ugualmente possibili e probabili. Nel caso della carambola, come in (b) e (c), la direzione del tempo è chiaramente individuata dal moto che va da una distribuzione ordinata delle bocce ad una disordinata. Anche se possibile, il moto nella direzione opposta è così improbabile da non essere mai osservato.

Il fatto che le particelle sono tante è un ingrediente necessario perché il comportamento dei corpi macroscopici corrisponda alla nostra esperienza quotidiana (per esempio, affinché il calore passi dai corpi più caldi a quelli più freddi). Questo lo si può capire pensando alle molecole di un corpo macroscopico come alle bocce di un biliardo. Se le bocce sono solo due, le si mette in moto colpendole con la stecca, e poi le si riprende con una telecamera tagliando la parte iniziale del moto (quella in cui si vede la stecca) e la parte finale (quella in cui le bocce si fermano), il filmato proiettato all'indietro non mostrerà nulla di strano e sembrerà altrettanto realistico che quello proiettato in avanti (Figura 8 (a)). Che le bocce seguano un certo percorso avvicinandosi o allontanandosi le une dalle altre non dice nulla sulla reale sequenza temporale del moto.

Se invece le bocce sono 10 o più, inizialmente disposte a formare un triangolo come nel gioco della carambola, e vengono messe in moto come al solito, la sequenza temporale è inequivocabilmente determinata dal passaggio da una situazione ordinata (Figura 8 (b)) ad una sempre più disordinata, in cui le bocce sono più o meno distribuite uniformemente nel biliardo (Figura 8 (c)). La proiezione del filmato all'indietro salterebbe subito all'occhio perché, seppur possibile, quella sequenza corrisponde ad un tipo di moto tanto improbabile da apparire del tutto irreale sulla base della nostra esperienza quotidiana. Non sono le leggi fondamentali della fisica ad impedire che tante bocce percorrano traiettorie che le conducono da uno stato disordinato ad uno ordinato, ma i nostri sensi sono così abituati dall'esperienza a vedere solo il contrario, da ritenere questo moto del tutto irreale. Il fatto è che le configurazioni disordinate sono realizzabili in molti più modi di quelle ordinate e, in assenza di vincoli che impediscano il libero moto, i sistemi naturali si troveranno più frequentemente in uno stato disordinato che in uno ordinato. Questo squilibrio fra stati ordinati e disordinati si fa esponenzialmente più pronunciato al crescere del numero N dei componenti del sistema, al punto che nei sistemi macroscopici ($N = O(10^{23})$) i moti dal disordine all'ordine possono essere esclusi anche in linea di principio, perlomeno entro le scale di tempo che ci possono anche remotamente riguardare (ben oltre la scala di tempo che scandisce l'evoluzione della vita sulla Terra).

Il trasporto del calore da un corpo caldo ad uno freddo è un fenomeno analogo: la situazione in cui due corpi a diversa temperatura sono in contatto fra loro corrisponde ad una situazione in cui c'è minor disordine che nel caso in cui entrambi corpi hanno la stessa temperatura e, dato il grande numero di molecole di cui i corpi macroscopici sono fatti, non si vedrà mai fluire del calore da un corpo freddo ad uno caldo, facendo crescere l'ordine nel sistema. Che questo non sia imposto dalle leggi fondamentali della fisica, ma sia una conseguenza dei grandi numeri che riguardano i sistemi macroscopici potrebbe essere stato evidenziato anche da esperimenti fatti recentemente su corpi di taglia intermedia fra quelli macroscopici e quelli microscopici [23]: oggetti della dimensione del micron, i cui comportamenti sono in media quelli del livello macroscopico, ma che su piccole scale di tempo hanno fluttuazioni che contraddicono la nostra esperienza quotidiana, codificata nelle leggi della termodinamica (15).

(15) Il condizionale è d'obbligo, dato che la validità di questi esperimenti è ancora oggetto di dibattiti all'interno della comunità scientifica.

Calore o informazione?

Per la comprensione dei fenomeni macroscopici, il concetto moderno di caos gioca il ruolo di un importante paradigma da un punto di vista teorico, ma da solo non basta, né è ovvio che sia strettamente necessario, come menzionato sopra. I due elementi dai quali invece non si può prescindere sono le interazioni fra i componenti microscopici di un corpo ed il loro grande numero. È grazie a questi che gli scambi di energia possono avere luogo e tendere ad equilibrare le differenze. Come si spiega, allora, che certe teorie recenti [24] sembrano ottenere le leggi della termodinamica per sistemi di particelle senza interazioni?

Secondo queste teorie il caos delle dinamiche microscopiche sarebbe sufficiente a spiegare i fenomeni macroscopici, associando il fenomeno della dissipazione di energia meccanica in calore alle perdite di informazione sullo stato microscopico di un sistema dovuto ai moti caotici. Così leggi formalmente identiche a quelle familiari in termodinamica sono state derivate perfino per le cosiddette catene di «mappe del fornaio», il cui analogo fisico più vicino è detto essere il canale di Lorentz rappresentato in Figura 9 [24]. Qui si hanno due serbatoi infiniti di particelle non interagenti fra loro (puntiformi) e di diversa densità (diverso numero di particelle per unità di area), le quali urtano con dei centri diffusori circolari perfettamente rigidi. In questo caso non c'è alcuno scambio di energia né fra le particelle né fra le particelle ed il loro ambiente. Di conseguenza anche il numero delle particelle diventa irrilevante: ogni particella seguirà il moto che le leggi della meccanica e le sue condizioni iniziali le impongono, tanto che sia attorniata da molte altre particelle quanto che sia sola.

Queste teorie sfruttano un'analogia formale fra misure di informazione ed entropia dei sistemi in equilibrio (nozione sulla quale non ci soffermiamo), e suppongono che le pareti circolari non siano tali ma siano, invece, una seconda specie di particelle. Se queste teorie fossero corrette, i flussi di calore altro non sarebbero che «perdite di informazione» dovute ai moti delle particelle puntiformi, che sono resi caotici dagli urti con le pareti circolari, come descritto in [24]. Riemergerebbe

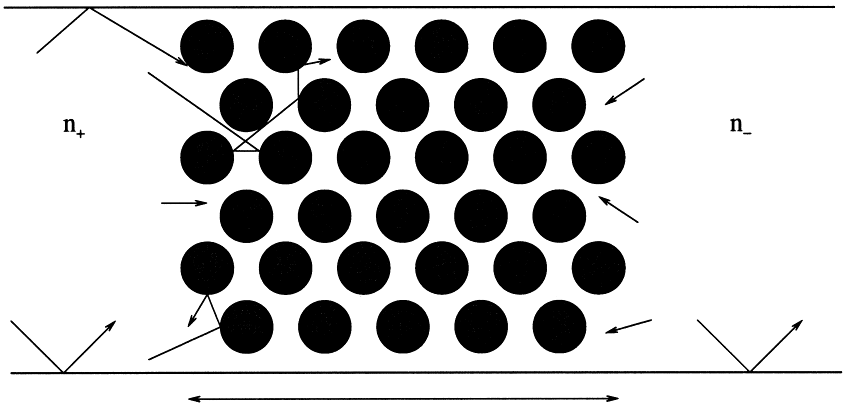

Fig. 9. – Canale di Lorentz. Fra due pareti orizzontali riflettenti è ancorato un certo numero di dischi perfettamente rigidi che coprono una regione di lunghezza L. A sinistra dei dischi c'è un serbatoio di particelle puntiformi (non interagenti), il cui numero per unità di area (la densità) è n_+. A destra c'è un serbatoio analogo di densità n_-. Il moto delle particelle puntiformi è reso caotico dalle collisioni con i dischi fissi.

così l'idea che tutto è informazione e che il substrato su cui il trasporto di questa quantità ha luogo è del tutto accidentale.

Ma le cose stanno veramente così? Nessuno nega che l'informazione costituisca oggi un'idea guida pregna di significato e capace di impartire un benefico impulso al progresso scientifico ed all'elaborazione della cultura moderna, ma le sue deviazioni sono altrettanto pericolose ed è bene averle presenti. Per fortuna nel caso del trasporto di energia e materia le incongruenze di certe opinioni possono essere scoperte sulla base di nozioni classiche di termodinamica e meccanica statistica [25]. Ci si accorge così che i sistemi di particelle non interagenti ([16]) obbediscono a leggi che non sono quelle della termodinamica e che non hanno alcuna tendenza ad equilibrare le differenze (per esempio) di temperatura. Se invece si applicano le teorie di [24] a sistemi di molte particelle interagenti, si ottengono leggi che non sono quelle della termodinamica. In tal modo si scopre

([16]) Fra questi ci sono molti esempi di forte interesse tecnologico, come i gas nelle pompe ad alto vuoto, i gas di Knudsen, i plasmi senza collisioni ecc.

che la pretesa di aver compreso la termodinamica solo in termini di moti caotici e di trasporto di informazione viene meno, la materialità delle cose riacquista la sua giusta importanza e l'idea che tutto l'Universo, noi compresi, altro non sia che un enorme misterioso calcolatore perde sostegno.

Da un punto di vista pratico si potrebbe concludere che, se ci si è bruciati con un oggetto incandescente, conviene ricorrere prima di tutto ad un dermatologo, per intervenire materialmente sull'ustione ed evitare conseguenze peggiori. La consulenza psichiatrica volta al recupero dell'informazione perduta nel processo di trasmissione del calore (perdita che nessuno nega), potrebbe non essere così urgente e, comunque, pare inadeguata al recupero della pelle bruciata.

5. – Epilogo.

Senza dubbio, la nostra riflessione sui concetti di caos, informazione e calore ci ha portato lontano; forse troppo lontano, per un breve articolo come questo. Gli argomenti qui trattati, infatti, sono difficili ed anche di moda, il che basta perché molti li trovino suggestivi, ma altrettanti non li sopportino proprio. Per capire l'irritazione che qualcuno può provare di fronte alla vastità dei temi qui sfiorati, si pensi all' immenso lavoro di C. Truesdell sull'origine dei concetti di calore, temperatura ecc. che è stato necessario per mettere un po' d'ordine nella bufera di risultati buoni e di affermazioni fasulle che riguardavano un sottocampo minimo rispetto alla varietà di questioni qui toccate.

Tuttavia, se l'essere di moda rende da un lato «insopportabili» certi argomenti, da un altro lato impone che li si prenda in considerazione in un ambito culturale più vasto di quello degli addetti ai lavori, ai quali, per esempio, Truesdell autorevolmente si rivolgeva. A questo riguardo vale la pena precisare che non riteniamo e non pretendiamo di aver sviscerato un argomento con così vaste implicazioni, o di aver detto l'ultima parola a riguardo di questo o di quello. Ci basti aver invitato il lettore a tenere un atteggiamento critico nei confronti di quelle affermazioni apparentemente scientifiche, che di quando in quando balzano alla ribalta del grande pubblico, senza per questo averne voluto negare l'interesse e, anzi, avendone proposto una possibile chiave di lettura.

L'autore desidera ringraziare A. Bacciotti, L. Galgani, A. Gamba, C. Giberti, M. Musso, J. Povilus ed A. Ricciuti per i commenti molto interessanti ed utili da loro fatti su una prima stesura di questo lavoro. I tre recensori ed il comitato di redazione del Bollettino meritano una particolare menzione per la paziente attenzione con cui hanno valutato questo articolo e per numerose ed acute osservazioni.

REFERENCES

[1] JAMES GLEICK, *Caos*, Sansoni, Milano (1997).

[2] P. GROSS, N. LEVITT, M.W. LEWIS, *The flight from science and reason*, Annals New York Academy of Sciences, **775** (1996).

[3] A. SOKAL, J. BRICMONT, *Imposture intellettuali*, Garzanti (1999).

[4] H. POINCARÉ, *Geometria e caso*: *scritti di matematica e fisica*; a cura di C. Bartocci, Bollati Boringhieri (1995).

[5] L. RUSSO, *La rivoluzione dimenticata*, Feltrinelli, Milano (1997).

[6] E. N. LORENZ, *Deterministic non periodic flow*, J. Atmos. Sci., **20** (1963), 130.

[7] G. GALLAVOTTI, *Meccanica statistica*, Quaderni del C.N.R., Gruppo Nazionale Fisica Matematica, **50** (1995).

[8] C. KITTEL, H. KROEMER, *Termodinamica statistica*, Boringhieri, Torino (1985).

[9] G. GALLAVOTTI, *Aspetti della teoria ergodica, qualitativa e statistica del moto*, Pitagora, Bologna (1981).

[10] D. RUELLE, *Elements of differentiable dynamics and bifurcation theory*, Academic Press, Boston (1989).

[11] B. B. MANDELBROT, *Gli oggetti frattali : forma, caso e dimensione*, Einaudi, Torino (2000).

[12] HEINZ-OTTO PEITGEN, H. RICHTER PETER, *La bellezza dei frattali. Immagini di sistemi dinamici complessi*, Bollati Boringhieri (1987).

[13] T. SIEGFRIED, *The Bit and the Pendulum*, Wiley, New York (200).

[14] C. CERCIGNANI, *Ludwig Boltzmann, the man who trusted atoms*, Oxford University Press, New York (1998).

[15] S.G. BRUSH, *The kind of motion we call heat*, North Holland, Amsterdam (1986).

[16] J.D. Barrow, F.J. Tipler, *The antropic cosmological principle*, Oxford University Press (1986).

[17] F. Tipler, *La fisica dell'immortalità. Dio, la cosmologia e la risurrezione dei morti*, Mondadori, Milano (1995).

[18] S. Rondinara, *L'escatologia fisica di Tipler I*, Nuova Umanità, **117-118** (1998), 419. *L'escatologia fisica di Tipler II*, Nuova Umanità, **119** (1998), 559.

[19] G. Gallavotti, *Meccanica dei fluidi*, Quaderni del C.N.R., Gruppo Nazionale Fisica Matematica, **52** (1996).

[20] M.W. Zemansky, *Calore e termodinamica*, Zanichelli, Bologna (1970).

[21] S. Lepri, L. Rondoni, G. Benettin, *The Gallavotti-Cohen fluctuation theorem for a non-chaotic model*, J. Stat. Phys., **99** (2000), 857. C. P. Dettmann, E. G. D. Cohen, *Note on chaos and diffusion*, J. Stat. Phys., **101** (2000), 775; G. Benettin, L. Rondoni, *A new model for the transport of particles in a thermostatted system*, Math. Phys. Electronic Journal (2001).

[22] D. Szasz (editor), *Hard ball systems and the Lorentz gas*, Encycl. Math. Sci., Springer Verlag, Berlin (2000).

[23] G. M. Wang, E. M. Sevick, E. Mittag, D. J. Searles, D.J. Evans, *Experimental demonstration of violations of the second law of thermodynamics for small systems and short time scales*, Phys. Rev. Lett., **89** (5) (2002), 050601-1.

[24] P. Gaspard, *Chaos, scattering and statistical mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge (1998).

[25] L. Rondoni, E. G. D. Cohen, *Gibbs entropy and irreversible thermodynamics*, Nonlinearity, **13** (2000), 1905. E. G. D. Cohen, L. Rondoni, *Particles, maps and irreversible thermodynamics*, Physica A, **306** (2002), 117. L. Rondoni, E. G. D. Cohen, *On some derivations of irreversible thermodynamics from dynamical systems theory*, Physica D, **168-169** (2002), 341.

Lamberto Rondoni, Dipartimento di Matematica
e Istituto Nazionale di Fisica della Materia
Politecnico di Torino, Corso Duca degli Abruzzi 24, I-10129 Torino
e-mail: lamberto.rondoni@polito.it