
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

GENNARO AMENDOLA

3-varietà non orientabili di complessità bassa

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 8-A—La Matematica nella Società e nella Cultura (2005), n.3-1, p. 433–436.

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_3-1_433_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_3-1_433_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

3-varietà non orientabili di complessità bassa

GENNARO AMENDOLA

Lo studio delle 3-varietà da un punto di vista topologico ha una storia molto lunga. La congettura di Poincaré infatti è stata formulata più di un secolo fa. Negli ultimi anni lo studio dei legami tra topologia e geometria ha portato molti risultati profondi: uno di essi sembra essere proprio la dimostrazione della congettura di Poincaré. Tali risultati sono spesso di natura teorica e non danno informazioni di tipo numerico sulle 3-varietà: ad esempio non si conosce ancora il rapporto numerico tra le varietà orientabili e quelle non orientabili. Uno degli studi di tipo numerico consiste nell'enumerazione delle 3-varietà. Per fare tale enumerazione (di un numero infinito di oggetti) è necessario un ordine da seguire, ovvero una «filtrazione» delle 3-varietà.

In [3] Matveev ha definito per ogni 3-varietà compatta M un intero non negativo $c(M)$, detto *complessità* di M . La funzione c gode di molte proprietà [4]:

- la complessità della somma connessa di due varietà coincide con la somma delle complessità delle due varietà,
- la complessità di una varietà non aumenta dopo un taglio lungo una superficie incompressibile,
- la controimmagine di ogni intero è finita se ci si restringe alle più interessanti classi di 3-varietà (più precisamente, tra le 3-varietà compatte che hanno una fissata complessità c ce ne sono solo un numero finito di chiuse irriducibili e $\mathbb{P}^2$ -irriducibili e di iperboliche di volume finito, con cuspidi e/o con bordo geodetico).

Al momento, le varietà iperboliche con cuspidi sono classificate per $c \leq 7$, mentre quelle iperboliche orientabili con bordo geodetico sono classificate per $c \leq 4$. Noi ci siamo concentrati sulle varietà *chiuse irriducibili* e $\mathbb{P}^2$ -*irriducibili*: la complessità di una tale M coincide con il minimo numero di tetraedri necessari per triangolare M , eccetto quando $c(M) = 0$, ossia quando M è S^3 , $\mathbb{RP}^3$ o $L_{3,1}$.

Ricordiamo che ci sono 8 importanti geometrie 3-dimensionali [5]. Sei di esse sono proprie delle varietà di Seifert. La geometria di una varietà di Seifert è determinata da due invarianti di una delle sue fibrazioni: la caratteristica di Eulero χ^{orb} dell'orbifold di base e il numero di Eulero e della fibrazione, come descritto nella Tabella 1. Le due geometrie rimanenti sono quella iperbolica e quella Sol.

Utilizzando il calcolatore, sono state classificate le 3-varietà orientabili chiuse irriducibili per $c \leq 9$ (dapprima per $c \leq 6$ da Matveev [3] e poi per $c \leq 9$ da Martelli e Petronio [1]). La lista è riassunta nella prima metà della Tabella 2. In particolare, le varietà orientabili con $c \leq 5$ sono di Seifert con $\chi^{\text{orb}} > 0$, mentre quelle con $c \leq 6$ sono

di Seifert con $\chi^{\text{orb}} \geq 0$, comprese le 6 varietà piatte. Le varietà di Seifert con $\chi^{\text{orb}} < 0$ e quelle di tipo Sol compaiono per $c = 7$, mentre le prime iperboliche hanno $c = 9$. Le varietà con decomposizione JSJ non banale compaiono per $c = 7$ e ogni tale varietà con $c \leq 9$ si decompone in pezzi di Seifert. La prima varietà che ha decomposizione JSJ non banale e che contiene un pezzo di tipo iperbolico ha $c \leq 11$.

Tabella 1. – Le sei geometrie di Seifert.

	$\chi^{\text{orb}} > 0$	$\chi^{\text{orb}} = 0$	$\chi^{\text{orb}} < 0$
$e = 0$	$S^2 \times \mathbb{R}$	E^3	$H^2 \times \mathbb{R}$
$e \neq 0$	S^3	Nil	$\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$

Nella tesi abbiamo mostrato che le varietà *non orientabili* chiuse irriducibili e $\mathbb{P}^2$ -irriducibili seguono lo stesso schema. In realtà la situazione nel caso non orientabile è leggermente più semplice. Infatti da un lato il numero di Eulero di una varietà di Seifert non orientabile è necessariamente 0 e quindi non esistono varietà non orientabili di tipo S^3 , Nil o $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$; dall'altro non esistono varietà non orientabili chiuse irriducibili e $\mathbb{P}^2$ -irriducibili di tipo $S^2 \times \mathbb{R}$.

TEOREMA 1 (con Martelli). – • *Non ci sono 3-varietà non orientabili chiuse irriducibili e $\mathbb{P}^2$ -irriducibili con $c \leq 5$,*

- *le uniche con $c = 6$ sono le 4 piatte e il fibrato torico su S^1 di tipo Sol con monodromia $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,*
- *ce ne sono alcune di tipo $H^2 \times \mathbb{R}$ e di tipo Sol con $c = 7$.*

Questi risultati sono riassunti nella seconda metà della Tabella 2. Sottolineiamo che la dimostrazione è puramente teorica, ossia non è stato utilizzato il calcolatore.

Le tecniche usate per dimostrare il Teorema 2 non sembrano generalizzabili a complessità maggiori. Abbiamo quindi descritto un approccio differente per arrivare a una lista delle 3-varietà non orientabili chiuse irriducibili e $\mathbb{P}^2$ -irriducibili con complessità maggiore. In [2] Martelli e Petronio hanno sviluppato una teoria di decomposizione delle 3-varietà chiuse irriducibili e $\mathbb{P}^2$ -irriducibili. La decomposizione è fatta lungo tori e bottiglie di Klein (come per la decomposizione JSJ), in modo che la complessità della varietà originale è la somma delle (opportunamente definite) complessità dei pezzi, chiamati *mattoni*. I mattoni sono varietà a bordo con una struttura supplementare: un insieme finito di grafi trivalenti, ciascuno contenuto in una componente di bordo. Questi grafi hanno un ruolo fondamentale sia nella definizione dei mattoni che nell'assemblaggio di essi.

Questa teoria sembra essere molto utile per il nostro scopo, infatti in [1] Martelli e Petronio hanno usato la versione orientabile di essa per ottenere la lista delle varietà orientabili chiuse irriducibili con complessità fino a 9. Ci sono molte ragioni che

Tabella 2. – Il numero delle varietà chiuse irriducibili e $\mathbb{P}^2$ -irriducibili raggruppate per complessità (fino a 9) e per geometria (i riquadri vuoti indicano 0).

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
orientabili										
spazi lenticolari	3	2	3	6	10	20	36	72	136	272
altre ellittiche			1	1	4	11	25	45	78	142
piatte							6			
Nil							7	10	14	15
$\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})$								39	162	514
Sol								5	9	23
$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$									2	
iperboliche										4
JSJ non banale								4	35	185
totale orientabili	3	2	4	7	14	31	74	175	436	1155
non orientabili										
piatte							4			
Sol							1	> 0	?	
$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$								> 0	?	
totali non orientabili							5	> 0	?	

rendono questa teoria utilizzabile, per lo meno nel caso orientabile fino a complessità 9: per esempio, ci sono veramente pochi mattoni rispetto alle varietà chiuse, essi devono soddisfare molte restrizioni topologiche (quindi la ricerca dei mattoni è più facile di quella delle varietà chiuse), essi possono essere assemblati (per produrre varietà chiuse) solo in un numero finito (e piccolo) di modi, la decomposizione in mattoni è un raffinamento della decomposizione JSJ (quindi è facile dare un “nome” alle varietà ottenute assemblando mattoni).

Nella tesi abbiamo descritto alcune restrizioni topologiche che i mattoni (non orientabili) devono soddisfare e abbiamo trovato la lista dei mattoni non orientabili con complessità minore o uguale a 3.

TEOREMA 2. – *Ci sono 10 mattoni non orientabili con complessità minore o uguale a 3; essi sono tutti varietà di Seifert.*

Osserviamo che ci sono molte differenze tra il caso orientabile e quello non orientabile. Per esempio, per quanto riguarda le componenti di bordo toriche si ha una sola possibilità per la forma del grafo trivalente che esse contengono; al con-

trario, le bottiglie di Klein ne permettono due. Inoltre nel caso non orientabile compaiono molti fenomeni che invece sono vietati in quello orientabile. Infine l'ipotesi di $\mathbb{P}^2$ -irriducibilità deve essere aggiunta all'irriducibilità per ottenere la finitezza delle varietà chiuse con una fissata complessità.

BIBLIOGRAFIA

- [1] MARTELLI B. e PETRONIO C., *Three-manifolds having complexity at most 9*, Experiment. Math., **10** (2001), 207-236.
- [2] MARTELLI B. e PETRONIO C., *A new decomposition theorem for 3-manifolds*, Illinois J. Math., **46** (2002), 755-780.
- [3] MATVEEV S. V., *Complexity theory of three-dimensional manifolds*, Acta Appl. Math., **19** (1990), 101-130.
- [4] MATVEEV S. V., *Algorithmic topology and classification of 3-manifolds*, Algorithms and Computation in Mathematics, vol. 9, Springer-Verlag (2003), xii+478.
- [5] THURSTON W. P., *Three-dimensional geometry and topology*. Vol. 1, Princeton Mathematical Series, **35** (1997), x+311.

Dipartimento di Matematica, Università di Pisa

e-mail: amendola@mail.dm.unipi.it

Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Pisa) - Ciclo XV

Direttore di ricerca: Prof. Carlo Petronio, Università di Pisa