Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Laura Antonelli

Sulla risoluzione numerica di un problema inverso mal posto in ambiente di calcolo ad alte prestazioni (Tomografie Computerizzate ad Emissione di Fotone Singolo: SPECT)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **8-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2005), n.3-1, p. 441–443.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_3-1_441_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2005.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VIII-A, Dicembre 2005/1, 441-443

Sulla risoluzione numerica di un problema inverso mal posto in ambiente di calcolo ad alte prestazioni (Tomografie Computerizzate ad Emissione di Fotone Singolo: SPECT)

LAURA ANTONELLI

1. – Introduzione.

Il lavoro di tesi descrive le esperienze svolte nell'ambito di un'applicazione di medical imaging, sulla ricostruzione ed il restauro di immagini provenienti da esami tomografici di tipo SPECT (*Single Photon Emission Computed Tomography*) in ambiente di calcolo ad alte prestazioni. Il problema della ricostruzione di dati SPECT è riconducibile alla ricostruzione di una immagine tridimensionale (distribuzione della concentrazione del radiofarmaco) a partire da un numero finito di sue proiezioni bidimensionali (immagini acquisite dal sistema SPECT). Il modello matematico assunto per descrivere il sistema di acquisizione di dati SPECT, è la *trasformata di Radon sfocata*[3], pertanto se si indica con $\boldsymbol{x} = \{x, y\}$ il vettore delle coordinate del piano dove è collocata la sezione bidimensionale dell'organo in esame centrata nell'origine degli assi, con z l'asse di rotazione del sistema di acquisizione SPECT, con $g(s, \phi, z)$ la funzione data ovvero l'immagine acquisita ovvero la *proiezione* bidimensionale ottenuta dal sistema di acquisizione all'angolo ϕ e con $u(\boldsymbol{x}, z)$ la funzione incognita ovvero la distribuzione tridimensionale del radiofarmaco, si ha:

$$Ku(\theta, s) := \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(\boldsymbol{x}, z')h(s - \boldsymbol{x}\cdot\theta, \boldsymbol{x}\cdot\theta^{\perp}, z - z')d\boldsymbol{x}dz' = g(s, \phi, z) \tag{1}$$

dove θ è il vettore $\{cos\phi, sin\phi\}$, $\theta^{\perp}$ è il vettore $\{-sin\phi, cos\phi\}$, ed infine $h(s, t, z)$ è la funzione che descrive il processo di acquisizione, ovvero la *Point Spread Function* (PSF) del sistema SPECT. In modo sintetico si può riscrivere la (1) come:

$$g = Ku + \eta \tag{2}$$

dove si è aggiunta la funzione η ignota, che descrive l'inevitabile *rumore* che contamina i dati.

2. – La ricostruzione di dati SPECT.

Il problema oggetto di studio è quindi descritto dal modello inverso di (2), ovvero:

$$u = K^{-1}(g - \eta) \tag{3}$$

K^{-1} è l'operatore inverso della trasformata di Radon ed è mal posto [2] essendo un integrale di Fredholm di I specie con nucleo di quadrato integrabile. La risoluzione numerico-computazionale di un problema governato da un operatore mal posto, (essendo il problema continuo mal posto) conduce inevitabilmente ad un problema discreto mal condizionato, fa uso di tecniche opportune, note come *Regolarizzazione*. Tra le possibili scelte, nell'ambito della tesi si è dato particolare riguardo all'utilizzo del funzionale di *Totale Variazione* (TV) perché *edge preserving*. Con *edge preserving* si intende una particolare proprietà della regolarizzazione in grado di preservare gli *edge* ovvero i punti di massimo locale del modulo del gradiente della funzione intensità luminosa (ovvero l'immagine stessa). Tale proprietà è di fondamentale importanza nella ricostruzione di dati SPECT in quanto il principale obiettivo è quello di enfatizzare il riconoscimento di «oggetti» che nelle immagini si evidenziano mediante *edge*.

La regolarizzazione mediante TV riformula il problema (2) come problema variazionale, ovvero si ricerca il minimo del seguente funzionale:

$$\min_u F(u) := \min_u \{ \| Ku - g \|_2^2 + a \| \nabla u \|_1 \} , \tag{4}$$

tale minimo, se esiste, coincide con la soluzione del sistema delle equazioni di Eulero-Lagrange associate,

$$\begin{cases} K^*(Ku-g) - a \cdot div\left(\dfrac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = 0 \ , & (x,y) \in \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 \ , & (x,y) \in \partial\Omega \end{cases} \tag{5}$$

dove $\Omega \subset \Re^3$ è un aperto di $\Re^3$, dominio di esistenza di u, $\| \cdot \|_2$ è la norma in $L^2(\Omega)$ e $\| \cdot \|_1$ è la norma in $L^1(\Omega)$.

La discretizzazione delle equazioni (5) di tipo ellittico non lineari, conduce ad un sistema di equazioni non lineare la cui risoluzione impone notevoli difficoltà numerico computazionali. Nel seguito si illustrano alcune delle principali difficoltà incontrate insieme con le strategie e/o i metodi adottati con cui sono state affrontate e risolte.

1. *Non differenziabilità dell'operatore* $L(u) = div\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)$ *nei punti in cui* $|\nabla u| = 0$;

Si osservi innanzitutto che il verificarsi di $|\nabla u| = 0$ non è un'ipotesi remota, un'immagine infatti è un insieme di regioni ad intensità luminosa costante separate da *edge*, pertanto ci sono intere regioni di punti nelle quali risulta $L(u)$ non differenziabile. Per ovviare a tale inconveniente si è adottata una tecnica numerica: modificare il funzionale aggiungendo una *piccola* costante positiva β al modulo del gradiente di u, pertanto in (4) e (5) si è adottato il funzionale TV «modificato», ovvero:

$$TV_\beta = \int \sqrt{|\nabla u|^2 + \beta^2} \, . \tag{6}$$

2. *Non linearità dell'operatore differenziale* $L(u)$.

La non linearità di $L(u)$ e quindi del sistema (5) è stata da un lato affrontata in maniera «classica» con l'utilizzo di opportuni metodi di risoluzione quali Punto Fisso e Newton, dall'altra si è indagato sulla possibilità di ingrandire il dominio di attrazione dei metodi utilizzati con l'introduzione nel sistema (5) di una variabile duale $\omega = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$ [4]. Pertanto anziché linearizzare (5) si è linearizzato il seguente sistema:

$$\begin{cases} K^*(Ku - g) + a\nabla \cdot \omega = 0 \\ \sqrt{|\nabla u|^2 + \beta^2} \quad \omega - \nabla u = 0 \end{cases} \tag{7}$$

I sistemi derivanti dalla linearizzazione di (7) sono stati risolti con il metodo del Gradiente Coniugato.

3. *Mal condizionamento dell'operatore integrale K.*

Per far fronte al mal condizionamento della matrice K si è precondizionato opportunamento il sistema (7) e quindi si è utilizzata la versione precondizionata del Gradiente Coniugato.

4. *Elevate dimensioni del sistema* (5) *ovvero di* (7).

La complessità di calcolo del problema di ricostruzione di dati SPECT descritto dal sistema (5) e quindi da (7), e la necessità di produrre una soluzione in tempo reale ha condotto allo sviluppo del software in ambiente di calcolo ad alte prestazioni. In particolare sono state affrontate le principali problematiche relative alla progettazione ed all'implementazione di software paralleli efficienti a partire dai metodi numerici utilizzati.

Gli algortimi ed il relativo software prodotto nell'ambito di questo lavoro sono stati collezionati in una libreria parallela, MEDITOMO[1] che è oggetto di un'effettiva sperimentazione clinica presso l'ospedale «Careggi» di Firenze.

BIBLIOGRAFIA

[1] ANTONELLI L., CARRACCIUOLO L., CECCARELLI M., D'AMORE L. e MURLI A., *High Performance Edge Preserving Restoration in 3D SPECT Imaging*, Parallel Computing to appear.
[2] BERTERO M. e BOCCACCI P., *Introduction to Inverse Problems in Imaging*, Institute of Physics Publishing, 1998.
[3] BOCCACCI P., BONETTO P., CALVINI P. e FORMICONI A., *A simple model for the efficient correction of collimator blur in 3D SPECT imaging*, Inverse Problems, **15** (1999).
[4] CHAN T. e MULET P., *Iterative method for Total Variation image restoration* SIAM Journal on Applied Mathematics (1995).

via Matilde Serao, 39 - 80013 Casalnuovo (Napoli)
e-mail: laura.antonelli@dma.unina.it
Dottorato in Matematica Applicata ed Informatica
(sede amministrativa: Università degli Studi di Napoli «Federico II») - Ciclo XV
Direttore di ricerca: Prof. Luigi M. Ricciardi
Tutore scientifico: Prof. Almerico Murli