Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Lucio Bedulli

3-varieta di Calabi-Yau generalizzate

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **8-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2005), n.3-1, p. 453–456.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_3-1_453_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2005.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VIII-A, Dicembre 2005/1, 453-456

3-varietà di Calabi-Yau generalizzate

LUCIO BEDULLI

Le varietà di Calabi-Yau sono varietà di Kähler dotate di una sezione mai nulla del fibrato canonico parallela rispetto alla connessione di Levi-Civita. Esse costituiscono uno dei più attivi ambiti di ricerca nel campo della Geometria Differenziale e della Geometria Algebrica contemporanee.

Lo studio delle varietà di Calabi-Yau ha tratto ispirazione anche dalla fisica teorica, la quale non solo ha fornito straordinarie motivazioni per lo studio, ma ha anche congetturato e talvolta predetto fenomeni sorprendenti di carattere puramente geometrico. Secondo una delle versioni più popolari della *teoria delle stringhe*, l'universo in cui viviamo è localmente una varietà $M = \boldsymbol{R}^4 \times X$, ove $\boldsymbol{R}^4$ è lo spazio di Minkowski e X è una varietà di Calabi-Yau compatta di dimensione complessa 3 il cui diametro deve essere dell'ordine di 10^{-33}cm (la *lunghezza di Planck*).

La «Simmetria Speculare» (*Mirror Symmetry*) è una misteriosa relazione fra coppie di varietà di Calabi-Yau prevista appunto nell'ambito della teoria delle (super-)stringhe.

Strominger, Yau e Zaslow diedero un notevole contributo alla chiarificazione e impulso alla ricerca formulando nel 1996 la loro famosa congettura che cerca di spiegare la Mirror Symmetry in termini di fibrazioni Lagrangiane speciali «duali». (Una sottovarietà n-dimensionale di una varietà di Calabi-Yau di dimensione reale $2n$ si dice *Lagrangiana speciale* se su di essa si restringono a zero la forma simplettica e la parte reale del volume olomorfo).

I tre autori congetturano che una varietà di Calabi-Yau ammetta sempre una fibrazione in *tori Lagrangiani speciali*, alcuni dei quali possono essere singolari.

L'«immagine speculare» $\hat{M}$ di M si ottiene «dualizzando» questa fibrazione.

Intimamente collegato a tale congettura è il teorema di McLean [4] secondo cui lo spazio dei moduli delle sottovarietà Lagrangiane speciali (compatte) di una varietà di Calabi-Yau M è sempre l'unione disgiunta di varietà lisce in generale *non compatte*. Se poi consideriamo solamente lo spazio dei moduli $\mathcal{M}(L)$ delle deformazioni di una data sottovarietà L, allora esso risulta una varietà liscia di dimensione $b_1(L)$. Un candidato locale per $\hat{M}$, secondo la congettura SYZ, è lo spazio $\mathcal{X} = \mathcal{M}(L) \times H^1(L, \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})$, che può essere considerato come lo spazio delle sottovarietà Lagrangiane speciali «vicine» a L dotate di un line-bundle unitario piatto.

Il Teorema di McLean suggerisce una generalizzazione di queste congetture: non è difficile osservare, infatti, che non sono le varietà di Calabi-Yau la categoria più generale in cui ha luogo e gode di proprietà tanto favorevoli una teoria delle deformazioni delle sottovarietà Lagrangiane. In [2] de Bartolomeis suggerisce di studiare le varietà simplettiche compatte (M, κ) di dimensione reale 6 dotate di una struttura quasi-complessa κ-compatibile e di una $(3,0)$-forma complessa mai nulla la cui parte reale sia chiusa (*3-varietà di Calabi-Yau generalizzate*). La tesi, di cui questa è una breve nota, pone le basi per lo studio di tali strutture, riesaminando il terreno algebrico su cui si fondano, stabilendo risultati di natura globale che ne chiariscono il comportamento e fornendo esempi espliciti.

Sia (V, κ) uno spazio vettoriale simplettico. In analogia con l'operatore di Hodge associato a uno spazio vettoriale orientato e dotato di un prodotto scalare, è utile definire l'*operatore di Hodge simplettico* $\star : \wedge^r V^* \to \wedge^{2n-r} V^*$ per mezzo della relazione

$$a \wedge \star\beta = \wedge^r \kappa(a, \beta) \frac{\kappa^n}{n!},$$

dove a e β sono r-forme arbitrarie e $\wedge^r\kappa$ è la forma bilineare indotta da κ su $\wedge^r V^*$. Supponiamo ora che V abbia dimensione 6. Indichiamo quindi con $\wedge_0^3$ il nucleo 14-dimensionale dell'applicazione $L_3 : \wedge^3 \to \wedge^5$; $\gamma \mapsto \gamma \wedge \kappa$ e chiamiamo *forme effettive* i suoi elementi. Ad ogni $\Omega \in \wedge_0^3$ possiamo associare il seguente endomorfismo del duale

$$P_\Omega : a \mapsto -\frac{1}{2} \star (\Omega \wedge \star(\Omega \wedge a)).$$

Fissata $\Omega \in \wedge^3 V^*$, chiamiamo infine F_Ω la moltiplicazione esterna per Ω sulle 1-forme. La proposizione seguente riassume l'algebra lineare soggiacente alle varietà CYg.

PROPOSIZIONE 1. – *Sia Ω una 3-forma effettiva su uno spazio vettoriale simplettico (V, κ) di dimensione 6. Allora i fatti seguenti sono equivalenti:*

1) *F_Ω è iniettiva e la forma bilineare simmetrica $\wedge^4\kappa$ è definita negativa su $F_\Omega(V^*)$;*

2) *esiste una base simplettica $e^1, \dots, e^6$ di (V, k) tale che $\Omega = \lambda \operatorname{Re}\{(e^1 + ie^4) \wedge (e^2 + ie^5) \wedge (e^3 + ie^6)\}$ per qualche $\lambda > 0$;*

3) *l'endomorfismo P_Ω è invertibile e $\widetilde{P_\Omega} = (\det P_\Omega)^{-\frac{1}{6}} P$ è una struttura complessa su V compatibile con κ.*

Diciamo *κ-positiva* una 3-forma che soddisfa una delle tre condizioni equivalenti della proposizione precedente.

Alla luce della proposizione 1, si può riformulare la definizione di varietà CYg in maniera puramente simplettica. Una *varietà di Calabi-Yau generalizzata* è una varietà simplettica compatta (M, κ) di dimensione 6, dotata di una 3-forma chiusa e κ-positiva Ω. Diremo anche che $J_\Omega : x \mapsto \widetilde{P}_\Omega[x]$ è la struttura quasi complessa associata a Ω. Poiché la 3-forma complessa $\Omega + iJ_\Omega\Omega$ banalizza $\wedge^3_{J_\Omega}$, affinché una 6-varietà simplettica ammetta una struttura CYg è necessario che sia nulla la prima classe di Chern.

Osserviamo che il punto 2) della 1 si può parafrasare dicendo che il gruppo di Lie $G = \mathrm{Sp}(3, \boldsymbol{R}) \times \boldsymbol{R}_+$ (di dimensione 22) agisce in modo transitivo sullo spazio delle 3-

forme κ-positive. Inoltre tale G-orbita risulta *aperta* in $\wedge_0^3$, infatti si prova che lo stabilizzatore di una forma κ-positiva è isomorfo a SU(3). Lo studio delle varietà CYg è pertanto avvicinabile allo studio delle geometrie «stabili» nel senso di Hitchin [3].

La SU(3)-riduzione del fibrato principale dei riferimenti lineari induce una metrica sulle varietà CYg, pertanto è naturale considerarne le proprietà di curvatura ed olonomia. Evidentemente l'olonomia di una 3-varietà CYG non è più riducibile a trasformazioni unitarie in generale, anzi, in una verietà almost-Kähler (M, κ, J), la condizione $\nabla J = 0$ equivale all'integrabilità di J. Tuttavia in una varietà quasi Hermitiana è naturale considerare la cosiddetta prima connessione Hermitiana canonica, la cui derivata covariante $\tilde{\nabla}_X$ è definita dalla formula

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \frac{1}{2} J(\nabla_X J)Y,$$

ove ∇ è la connessione di Levi-Civita di $g = \kappa(\cdot, J\,\cdot\,)$. La connessione $\tilde{\nabla}$ è metrica e preserva J, ma in generale non è priva di torsione. Ricordiamo ora che, in una varietà quasi complessa, $d : \wedge^{p,q} \to \wedge^{p+2,q-1} \oplus \wedge^{p+1,q} \oplus \wedge^{p,q+1} \oplus \wedge^{p-1,q+2}$. Ciò è una conseguenza del fatto che il differenziale esterno d è una derivazione e del fatto che localmente $\wedge(M) \otimes \boldsymbol{C}$ è generato da $\wedge^{0,0}$, $\wedge^{1,0}$ e $\wedge^{0,1}$. In accordo con la scomposizione di cui sopra, l'operatore d ammette a sua volta la scomposizione: $d = A_J + \partial_J + \bar{\partial}_J + \bar{A}_J$.

È ora possibile formulare il seguente

TEOREMA 1. – *Sia (M, κ, J) una varietà almost-Kähler (cioè una varietà simplettica dotata di una struttura quasi complessa compatibile) compatta di dimensione 6. Sia $\varepsilon = \Omega + iJ\Omega$ una $(3,0)$-forma mai nulla tale che*

$$\varepsilon \wedge \bar{\varepsilon} = -ie^{\sigma}\kappa^3,$$

con $\sigma \in C^\infty(M; \boldsymbol{R})$. Allora

$$\begin{cases} d\Omega = 0 \\ \sigma \equiv \text{cost.} \end{cases} \iff \begin{cases} \tilde{\nabla}\varepsilon = 0 \\ A_J(\bar{\varepsilon}) + \bar{A}_J(\varepsilon) = 0 \end{cases}$$

Come conseguenza, se (M, κ, Ω) è una 3-varietà CYg e $\tilde{\nabla}$ è la prima connessione Hermitiana canonica di (g_Ω, J_Ω), e $\Omega \wedge J\Omega$ è un multiplo di κ^3, allora $\mathrm{Hol}_0(\tilde{\nabla}) \subseteq \mathrm{SU}(3)$. Per quanto riguarda invece la curvatura di g_Ω, sfruttando un risultato di Bryant sulle G_2-strutture, non è difficile provare il seguente

TEOREMA 2. – *Sia (M, κ, Ω) una 3-varietà di Calabi-Yau generalizzata compatta. Se la metrica g_Ω associata Ricci-piatta, allora J_Ω è integrabile.*

Altri risultati assai più generali sulla curvatura di Ricci della metrica indotta da una SU(3)-struttura fanno parte di un lavoro attualmente in preparazione.

La ricerca di esempi di strutture CYg *non integrabili* è resa difficoltosa dallo scarso numero di esempi espliciti e calcolabili di varietà simplettiche non Kähleriane. La classe di varietà che meglio si presta a questo scopo è quella delle nilvarietà (quozienti compatti di gruppi di Lie nilpotenti modulo sottogruppi discreti) per diversi motivi:

- quasi tutte le nilvarietà ammettono struttura simplettica, ma nessuna di esse (a parte il toro) ammette una struttura Kähleriana
- le nilvarietà sono parallelizzabili, quindi non presentano ostruzioni di tipo topologico alla presenza di una 3-forma κ-positiva globale.
- è possibile eseguire calcoli espliciti sull'algebra esterna di tali varietà utilizzando le forme invarianti.

Facendo anche uso di una osservazione contenuta in [1] e tramite calcoli espliciti riusciamo a classificare le nilvarietà con $b_1 \geq 4$ che ammettono una struttura CYg omogenea.

TEOREMA 3. – *Se $M = G/\Gamma$ è una nilvarietà di dimensione 6 con $b_1(M) \geq 4$ dotata di una struttura CYg G-invariante, allora M è diffeomorfa o al toro $\boldsymbol{R}^6/\boldsymbol{Z}^6$ o a $G_{5,2}/\Gamma \times S^1$, ove Γ è un reticolo cocompatto nel gruppo di Lie nilpotente $G_{5,2}$ costituito dalle matrici della forma*

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_4 & x_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Come si vede, tutte le nilvarietà con $b_1 \geq 4$ CYg omogenee sono prodotti. Ciò non è più vero se lasciamo cadere l'ipotesi coomologica: esiste un esempio di nilvarietà (con $b_1 = 3$) che non è un prodotto e ammette una famiglia 1-dimensionale di strutture CYg omogenee.

BIBLIOGRAFIA

[1] ABBENA E., GARBIERO S. e SALAMON S., *Almost Hermitian geometry on six dimensional nilmanifolds*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **30** (2001), 147-170.

[2] DE BARTOLOMEIS P., *Geometric structures on moduli spaces of special Lagrangian submanifolds*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), **179** (2001) 361-382.

[3] HITCHIN N., *Stable forms and special metrics*, «Global differential geometry: the mathematical legacy of Alfred Gray» (Bilbao, 2000), 70-89, Contemp. Math., **288**, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2001).

[4] MCLEAN R. C., *Deformations of calibrated submanifolds*, Comm. Anal. Geom. **6** (1998), 705-747.

Dipartimento di Matematica «U. Dini», Università di Firenze
E-mail: bedulli@math.unifi.it
Dottorato in Matematica, (sede amministrativa: Firenze) - Ciclo XVI
Direttore di ricerca: Prof. Paolo de Bartolomeis, Università di Firenze