
BOLLETTINO

UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

SILVIA BIASOTTI

Metodi di topologia computazionale per applicazioni inerenti la modellazione di forme

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 8-A—La
Matematica nella Società e nella Cultura (2005), n.3-1, p. 461–463.*

Unione Matematica Italiana

http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_3-1_461_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Metodi di topologia computazionale per applicazioni inerenti la modellazione di forme

SILVIA BIASOTTI

Questa tesi si colloca nell'ambito della topologia computazionale, un'area di ricerca recentemente sviluppatasi dalla combinazione di tematiche di matematica e informatica, e affronta lo sviluppo di strumenti relativi a concetti topologici che possono essere utilizzati in ambito scientifico. In ambito di grafica computazionale, una forma, cioè uno spazio che ha apparenza visuale ed è connesso, compatto e ha dimensione finita, è generalmente approssimata da un modello digitale. Poiché la topologia evidenzia le proprietà qualitative di uno spazio, quali la connessione e il numero/tipo di buchi di una forma, rappresenta un ottimo strumento per descrivere astrattamente la forma di un modello matematico. La geometria, al contrario, è maggiormente correlata alle caratteristiche quantitative di una forma [4]. A questo proposito la combinazione di topologia e geometria origina un nuovo tipo di strumenti che automaticamente descrivono le caratteristiche più rappresentative della forma e le codificano in modo appropriato. Uno degli obiettivi principali nella modellazione di forme è riconoscere l'informazione qualitativa, ossia legata ad una interpretazione semantica della forma e della sua struttura morfologica, contenuta in un modello discreto.

In questa tesi si è proposto un modello concettuale che rappresenta una superficie attraverso la codifica della sua topologia e ne definisce una bozza ad alto livello, tralasciando dettagli irrilevanti e classificandone il tipo topologico. Alla base di questo approccio sono la teoria di Morse e il grafo di Reeb [5, 6], che forniscono un'astrazione della forma molto utile per analizzare e strutturare l'informazione contenuta nella geometria del modello discreto. Il contesto di applicazione dei grafi di Reeb, in particolare, riguarda l'analisi di forme geometriche e la costruzione di strutture scheletrali che le rappresentino in maniera sintetica, pur mantenendone le proprietà topologiche e le principali caratteristiche morfologiche. In particolare, si affrontano i problemi relativi alla discretizzazione della teoria di Morse dei punti critici nel dominio delle funzioni definite su una mesh triangolare. Per sviluppare questo approccio, è stato necessario considerare sia gli aspetti teorici che computazionali relativi alla definizione e all'estensione in ambito discreto del grafo di Reeb.

Per la definizione e la costruzione automatica del modello concettuale, è stato sviluppato un nuovo metodo per analizzare e caratterizzare una triangolazione rispetto al comportamento di una funzione reale e almeno continua definita sul modello

stesso. La soluzione proposta è in grado di analizzare anche situazioni degeneri quali, ad esempio, punti critici non isolati. Per ottenere questo risultato la superficie viene caratterizzata attraverso l'analisi del comportamento delle curve di livello della funzione, individuando aree critiche anziché punti critici [1, 2]. In analogia al comportamento del grafo di Reeb per superfici lisce, la rappresentazione ottenuta è chiamata *Extended Reeb Graph*, (*ERG*) poichè l'evoluzione delle curve di livello viene codificata in un grafo. Inoltre, gli elementi di tale grafo possono essere definiti come le classi di equivalenza di uno spazio quoziente della superficie rispetto a una funzione a valori reali definita sulla stessa. Più in dettaglio, si consideri una funzione reale $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ definita sulla superficie S e, supposto che l'intervallo $[f_{min}, f_{max}]$ sia il dominio di f , si denoti $I = \{(f_i, f_{i+1}), i = 0, \dots, np\} \cup \{f_{min} = f_0, f_1, \dots, f_{np}, f_{max} = f_{np+1}\}$ la partizione di tale dominio indotta da np curve di livello. Con tale notazione, si definisce *Extended Reeb Graph* della superficie S rispetto alla funzione f lo spazio quoziente indotto dalla definizione 1:

DEFINIZIONE 1. – *Due punti $P, Q \in S$ sono Reeb-equivalenti in senso esteso se verificano le seguenti condizioni:*

- 1) $f(P)$ e $f(Q)$ appartengono allo stesso elemento $t \in I$;
- 2) P e Q appartengono alla stessa componente connessa di $f^{-1}(f(t))$, $t \in I$.

L'ERG fornisce una rappresentazione della forma ad alto livello di astrazione adatta a raffigurare e manipolare superfici continue, lineari a tratti. Le proprietà delle regioni indotte sul modello geometrico da tale caratterizzazione e dal grafo indotto sono state ampiamente analizzate e descritte nella tesi. La capacità descrittiva del grafo (*ERG*) è stata inoltre aumentata tramite l'introduzione nel grafo, accanto alle informazioni topologiche in esso contenute, anche di informazioni sulla geometria del modello. L'informazione topologica e morfologica dedotta dal grafo (*ERG*) con le caratteristiche della forma, fornendo una valutazione della dimensione dei dettagli eventualmente trascurati. In particolare è stata definita una distanza tra 2 grafi basata sul concetto di massimo sottografo comune, in grado di codificare le differenze sia tra la topologia che tra gli attributi dei grafi. Tale distanza è valida in un contesto più generale di quello dei grafi di Reeb. In particolare, si è dimostrato che la misura 2 è una pseudo-metrica e sono state proposte delle condizioni sufficienti a garantire che la distanza sia effettivamente una metrica.

DEFINIZIONE 2. – *Sia D_{Gset} un insieme di grafi con attributi.*

- *Si definisce a il valore $a = \max(\max_{G_i \in D_{Gset}}(\max_{e \in G_i}(\mu_E(e))), 1)$ dove $\mu_E(e)$ rappresenta il valore dell'attributo dell'arco e . a rappresenta un fattore di normalizzazione sugli attributi geometrici di D_{Gset} .*

- *Siano $\psi_i : G_i \rightarrow S_M, i = 1, 2$ gli isomorfismi tra i sottografi comuni di G_1 e G_2 appartenenti a D_{Gset} . La funzione distanza $d : D_{Gset} \times D_{Gset} \rightarrow [0, 1]$ è definita come*

segue:

$$d(G_1, G_2) = 1 - \frac{\sum_{e \in S_M} \left(1 - \frac{|\mu_E(\psi_1^{-1}(e)) - \mu_E(\psi_2^{-1}(e))|}{a} \right)}{\max(|G_1|, |G_2|)}$$

dove S_M rappresenta il massimo sottografo comune.

Infine, il metodo di codifica proposto è stato applicato con successo in diversi contesti applicativi, quali l'analisi e la semplificazione di superfici di terreni, la sintesi e la scomposizione di forme, la ricostruzione e il riconoscimento di modelli e il recupero di elementi da un database [1, 2, 3].

BIBLIOGRAFIA

- [1] ATTENE M., BIASOTTI S. e SPAGNUOLO M., *Shape understanding by contour driven retiling*, The Visual Computer, **19(2-3)** (2003), 127-138.
- [2] BIASOTTI S., FALCIDIENO B. e SPAGNUOLO M., *Surface Shape Understanding based on Extended Reeb Graphs*, In S. Rana, editor, *Topological Data Structures for Surfaces: An Introduction for Geographical Information Science* (2004), 87-103.
- [3] BIASOTTI S., MARINI S., MORTARA M., PATANÉ G., SPAGNUOLO M. e FALCIDIENO B., *3D shape matching through topological structures*, Lecture Notes in Computer Science, **2886** (2003), 194-203.
- [4] FALCIDIENO B. e SPAGNUOLO M., *A shape abstraction paradigm for modeling geometry and semantics*, F.-E. Wolter and N. M. Patrikalakis, editors, *Proceedings of the Conference on Computer Graphics International 1998 (CGI-98)* (1998), 646-657.
- [5] MILNOR J., *Morse Theory* (1963).
- [6] REEB G., *Sur les points singuliers d'une forme de Pfaff complètement intégrable ou d'une fonction numérique*, Comptes Rendu de l'Academie des Sciences, **222**, 1946, 847-849.

Istituto di Matematica Applicata e Tecnologie Informatiche, Sez. di Genova

Consiglio Nazionale delle Ricerche

e-mail: silvia.biasotti@ge.imati.cnr.it

Dottorato in Matematica e Applicazioni (sede amministrativa: Università di Genova) - Ciclo XVI

Direttori di ricerca: Bianca Falcidieno e Michela Spagnuolo

