Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Maria Chiara Brambilla

Semplicità di fibrati vettoriali su P^n e fibrati eccezionali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **8-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2005), n.3-1, p. 465–468.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_3-1_465_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2005.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VIII-A, Dicembre 2005/1, 465-468

Semplicità di fibrati vettoriali su $\boldsymbol{P}^n$ e fibrati eccezionali

Maria Chiara Brambilla

In Geometria Algebrica, nell'ambito dello studio di fibrati vettoriali su spazi proiettivi complessi, un problema importante è la ricerca di criteri di semplicità e di stabilità. Uno dei risultati principali di questa tesi è un criterio di semplicità valido per alcuni fibrati che ammettono una determinata risoluzione. Ricordiamo che un fibrato si dice semplice se i suoi unici endomorfismi sono i multipli dell'identità.

1. – Fibrati di Steiner.

I fibrati di Steiner su uno spazio proiettivo complesso $\boldsymbol{P}^n = \boldsymbol{P}(V)$ sono stati definiti da Dolgachev e Kapranov come quei fibrati F che ammettono una risoluzione lineare della forma

$$0 \to \boldsymbol{C}^s \otimes \mathcal{O}(-1) \to \boldsymbol{C}^t \otimes \mathcal{O} \to F \to 0. \tag{1}$$

Un fibrato di Steiner F ha rango $t - s \geq n$. Quando vale l'uguaglianza, ogni fibrato di Steiner è stabile ([1]) e quindi, in particolare, semplice. Un primo esempio in tal caso è il fibrato tangente. In questa tesi ci siamo occupati di fibrati di Steiner con rango maggiore di n su $\boldsymbol{P}^n$, per $n \geq 2$.

Innanzitutto notiamo che F è il conucleo di un morfismo di fasci

$$m : \boldsymbol{C}^s \otimes \mathcal{O}(-1) \to \boldsymbol{C}^t \otimes \mathcal{O}.$$

che può essere rappresentato da una matrice $(s \times t)$, i cui elementi sono forme lineari in $N = n + 1 = \dim V$ variabili, o, equivalentemente, da una matrice tridimensionale di dimensioni $(s \times t \times N)$. Diciamo che F è *generico* se la corrispondente matrice M è generica nello spazio

$$H := \mathrm{Hom}(\boldsymbol{C}^s \otimes \mathcal{O}(-1), \boldsymbol{C}^t \otimes \mathcal{O}) \cong \boldsymbol{C}^{s\vee} \otimes \boldsymbol{C}^t \otimes V.$$

Il nostro primo risultato caratterizza la semplicità di un fibrato di Steiner generico.

Teorema 1. – *Sia F un fibrato di Steiner generico su $\boldsymbol{P}(V)$ e $\dim V = N \geq 3$. Allora*

$$F \text{ è semplice} \quad \Leftrightarrow \quad \chi(\mathrm{End}\, F) \leq 1.$$

L'ipotesi di genericità è essenziale, perché se $\mathrm{rk} F > n$ è sempre possibile costruire fibrati di Steiner decomponibili e quindi non semplici. È facile verificare che se E è semplice, allora $\chi(\operatorname{End} E) \leq 1$ e tale implicazione è vera per ogni fibrato su $\boldsymbol{P}^2$. Al contrario, l'implicazione opposta è falsa in generale: ad esempio il generico fibrato G su $\boldsymbol{P}^2$ con risoluzione

$$0 \to \mathcal{O}(-2) \oplus \mathcal{O}(-1)^4 \to \mathcal{O}^{16} \to G \to 0$$

soddisfa la condizione $\chi(\operatorname{End} G) = -3$, ma non è semplice, perché $\mathrm{h}^0(\operatorname{End} G) = 5$.

Se la risoluzione di F è di tipo (1), possiamo facilmente calcolare che $\chi(\operatorname{End} F) = s^2 + t^2 - Nst$ e la condizione $\chi(\operatorname{End} F) \leq 1$ si divide, quindi, in due casi:

(i) $\chi(\operatorname{End} F) = s^2 + t^2 - Nst = 1$, oppure

(ii) $\chi(\operatorname{End} F) \leq 0$, ovvero $t \leq \frac{N+\sqrt{N^2-4}}{2} s$.

Nel primo caso si ottiene un'iperbole i cui punti interi sono tutti della forma $(s, t) = (a_{k-1}, a_k)$, dove

$$a_k = \frac{\left(\dfrac{N+\sqrt{N^2-4}}{2}\right)^k - \left(\dfrac{N-\sqrt{N^2-4}}{2}\right)^k}{\sqrt{N^2-4}}.$$

Si osservi che nel caso $N = 3$, la successione $\{a_k\}$ è costituita dalla parte dispari della ben nota successione di Fibonacci. Per $N > 3$, chiamiamo i numeri della successione $\{a_k\}$ *numeri di Fibonacci generalizzati* e possiamo verificare che essi soddisfano una relazione ricorsiva. Denotando con E_k i fibrati su $\boldsymbol{P}(V)$ con risoluzione

$$0 \to \mathcal{O}(-1)^{a_{k-1}} \to \mathcal{O}^{a_k} \to E_k \to 0,$$

sappiamo dimostrare che essi non sono solo semplici, ma anche eccezionali.

I fibrati eccezionali su $\boldsymbol{P}^2$ sono stati introdotti da Drézet e Le Potier in [2] come una classe di fibrati senza deformazione, emersi come casi particolari nello studio della stabilità di fibrati su $\boldsymbol{P}^2$. In seguito la scuola di Rudakov (si veda per esempio [5]) ha generalizzato la definizione di fibrati eccezionali, sviluppando una presentazione assiomatica degli oggetti eccezionali (teoria delle eliche). Secondo la definizione di Gorodentsev e Rudakov ([4]), un fibrato E su $\boldsymbol{P}^n$ è *eccezionale* se $\mathrm{h}^0(\operatorname{End} E) = 1$ e $\mathrm{h}^i(\operatorname{End} E) = 0$, per ogni $i > 0$.

Nel caso $\chi(\operatorname{End} F) \leq 0$, per dimostrare la semplicità del generico fibrato di Steiner consideriamo l'azione naturale del gruppo $\mathrm{GL}(I) \times \mathrm{GL}(W)$ sullo spazio vettoriale $H = I^\vee \otimes W \otimes V$. Il problema si riduce quindi a dimostrare che lo stabilizzatore della matrice generica in H ha dimensione uno. Nella tesi risolviamo questo problema studiando nei dettagli l'azione. Sottolineiamo che la dimostrazione del Teorema 1 è indipendente da [2].

Un secondo risultato riguarda i fibrati di Steiner non semplici. In generale, non è detto che un fibrato non semplice sia anche decomponibile, ma in questo caso possiamo provare che ogni generico fibrato di Steiner non semplice si scompone come somma di fibrati di Steiner eccezionali. Più precisamente vale il seguente teorema:

TEOREMA 2. – *Se $t > \frac{N+\sqrt{N^2-4}}{2}s$, un generico fibrato di Steiner con risoluzione*

$$0 \to \mathcal{O}(-1)^s \longrightarrow \mathcal{O}^t \longrightarrow F \to 0,$$

è isomorfo al fibrato $E_k^n \oplus E_{k+1}^m$, dove E_k, E_{k+1} sono i fibrati di Steiner eccezionali precedentemente introdotti e n, m sono opportuni numeri naturali.

È interessante riformulare questo risultato nel contesto delle matrici. Infatti se $t > \frac{N+\sqrt{N^2-4}}{2}s$, una generica matrice $(s \times t \times N)$-dimensionale $M \in \boldsymbol{C}^s \otimes \boldsymbol{C}^t \otimes \boldsymbol{C}^N$ è equivalente, a meno dell'azione di $\mathrm{GL}(s) \times \mathrm{GL}(t)$, a una matrice canonica a blocchi le cui dimensioni sono opportuni multipli di numeri di Fibonacci generalizzati. Si osservi che l'azione di $\mathrm{GL}(s) \times \mathrm{GL}(t)$ su H equivale all'eliminazione di Gauss.

Nella tesi si presenta anche una generalizzazione dei teoremi 1 e 2 al caso di fibrati F su $\boldsymbol{P}^{N-1}$ con risoluzione

$$0 \to \mathcal{O}(-k)^s \xrightarrow{M} \mathcal{O}^t \longrightarrow F \to 0,$$

per $1 \leq k \leq n$. In questo caso i termini della matrice M sono polinomi omogenei di grado k in N variabili.

Ci sono numerosi risultati di Drézet e Le Potier sulla stabilità di fibrati su $\boldsymbol{P}^2$. In particolare, in [2], essi hanno trovato un importante criterio per la stabilità di un generico fibrato di cui si conoscano il rango e le classi di Chern. Questo criterio, però, è molto difficile da applicare. D'altra parte, da un altro risultato di Drézet ([3]), sappiamo che su $\boldsymbol{P}^2$ la stabilità di un generico fibrato è equivalente alla sua semplicità. Di conseguenza il nostro Teorema 1 fornisce il seguente criterio, facilmente applicabile, per la stabilità di un generico fibrato di Steiner su $\boldsymbol{P}^2$.

COROLLARIO 1. – *Sia E un generico fibrato di Steiner su $\boldsymbol{P}^2$. Allora E è stabile se e solo se $\chi(\mathrm{End}\,E) \leq 1$.*

Come abbiamo già sottolineato è facile dimostrare che la condizione $\chi(\mathrm{End}\,E) \leq 1$ è necessaria per la stabilità. D'altra parte non sappiamo dedurre direttamente dal criterio di Drézet e Le Potier [2] il fatto che sia anche condizione sufficiente.

2. – Fibrati con altre risoluzioni.

La prima generalizzazione interessante dei fibrati di Steiner è la famiglia di fibrati con risoluzione

$$0 \to \mathcal{O}(-2) \oplus \mathcal{O}(-1)^s \to \mathcal{O}^t \to F \to 0. \tag{2}$$

Abbiamo affrontato lo studio di tale famiglia solo nel caso di $\boldsymbol{P}^2$, usando fortemente il criterio di Drézet-Le Potier.

La prima differenza rispetto al caso dei fibrati di Steiner è che non possiamo separare con una retta i fibrati semplici da quelli non semplici, pur trascurando i fibrati eccezionali. Siamo riusciti, tuttavia, a trovare una condizione numerica necessaria e sufficiente per la semplicità del generico fibrato (e quindi per la sua stabilità) esprimibile graficamente attraverso una poligonale, nel piano di coordinate s, t, che separa la regione dei fibrati semplici da quella dei non semplici. Per brevità non riportiamo qui i dettagli di tale risultato.

Sottolineiamo, però, che alcuni vertici della poligonale rappresentano i fibrati eccezionali della forma (\refquasi), per i quali abbiamo ottenuto la seguente classificazione:

TEOREMA 3. – *Sia E un fibrato $\boldsymbol{P}^2$ con risoluzione* (2)*. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(1) *E è eccezionale,*
(2) $\chi(\operatorname{End} E) = 1$,
(3) $(s, t) = (3r_k a_{k-2}, 3r_k a_{k-1})$, *dove* $r_k = a_k - a_{k-1}$.

Il caso generale

$$0 \to \mathcal{O}(-2)^q \oplus \mathcal{O}(-1)^s \to \mathcal{O}^t \to F \to 0,$$

con $q \in \boldsymbol{N}$, sembra molto difficile da trattare. Innanzitutto per alcuni q (come $q = 2$) non esistono fibrati eccezionali. Inoltre se $q > 1$, la condizione $\chi(\operatorname{End} F) = 1$ non implica l'eccezionalità di F. Per esempio nel caso del fibrato G con risoluzione

$$0 \to \mathcal{O}(-3)^3 \oplus \mathcal{O}(-2)^{24} \to \mathcal{O}(-1)^{80} \to G \to 0$$

si ha $\chi(\operatorname{End} G) = 1$, ma G non è eccezionale. Questo suggerisce che i due casi studiati in dettaglio nella tesi, ovvero $q = 0$ (fibrati di Steiner) e $q = 1$, siano molto particolari. Ciò è confermato anche dalla costruzione induttiva dei fibrati eccezionali su $\boldsymbol{P}^2$ e delle corrispondenti risoluzioni.

BIBLIOGRAFIA

[1] VINCENZO ANCONA e GIORGIO OTTAVIANI, *Stability of special instanton bundles on $\boldsymbol{P}^{2n+1}$*, Trans. Amer. Math. Soc., **341**, 1994, 677-693.

[2] JEAN-MARC DRÉZET e JOSEPH LE POTIER, *Fibrés stables et fibrés exceptionnels sur $\boldsymbol{P}^2$*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **18** (1985), 193-243.

[3] JEAN-MARC DRÉZET, *Variétés de modules alternatives*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **49** (1999), 57-139.

[4] ALEXEI L. GORODENTSEV e ALEXEI N. RUDAKOV, *Exceptional vector bundles on projective spaces*, Duke Math. J., **54** (1987), 115-130.

[5] ALEXEI N. RUDAKOV, *Helices and vector bundles*, London Mathematical Society Lecture Note Series, **148**, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

Dipartimento di Matematica «U. Dini», Università di Firenze
e-mail: brambilla@math.unifi.it

Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Firenze) - Ciclo XVI
Direttore di ricerca: Prof. Giorgio Ottaviani, Università di Firenze.