Francesco Calabrò

Analisi di alcuni fenomeni evolutivi nonlineari: esistenza delle soluzioni e risoluzione numerica

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **8-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2005), n.3-1, p. 469–472.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_3-1_469_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2005.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VIII-A, Dicembre 2005/1, 469-472

Analisi di alcuni fenomeni evolutivi nonlineari: esistenza delle soluzioni e risoluzione numerica

Francesco Calabrò

Oggetto della tesi sono le soluzioni di problemi evolutivi non lineari. Il motivo principale è lo studio di un problema in domini adiacenti accoppiato con condizioni di raccordo nonlineari sull'interfaccia. Tale modello trova applicazione in ambito biomedico. La tesi consiste in tre capitoli preceduti da una introduzione che chiarisce i modelli a cui si possono applicare gli studi fatti e seguiti da una sezione in cui riportiamo le simulazioni effettuate ed i relativi codici utilizzati.

Nel primo capitolo consideriamo problemi parabolici con nonlinearità al bordo e semilineari:

$$\begin{cases} \Delta u(t,x) + \boldsymbol{b}(x,t)\cdot\nabla u(t,x) - \partial_t u(t,x) = f(t,x,u(t,x)) & \textit{in } \Omega\ \forall\, t>0 \\ \partial_n u(t,x) = g(t,x,u(t,x)) & \textit{su } \Gamma\ \forall\, t>0 \\ \partial_n u(t,x) = 0 & \textit{su } \partial\Omega\setminus\Gamma\ \forall\, t>0 \\ u(0,x) = u_{1,0} & \textit{su } \Omega_1 \end{cases}$$

In tesi introduciamo, per questi problemi, i risultati noti per l'esitenza di soluzioni in senso forte. In particolare ci concentriamo sulle tecniche che, facendo uso del teorema del massimo e del lemma di Hopf, garantiscono l'applicabilità del teorema di punto fisso di Schauder. Quello che si può notare è che il problema può condurre ad esplosione in tempo finito (blow up). Notiamo che sia l'analisi del comportamento delle soluzioni che l'approssimazione numerica di tali problemi è attualmente oggetto di ricerca, si vedano, ad esempio, le referenze [1, 2]. Per questo è dedicato, nella tesi, ampio spazio ad una rivisitazione della letteratura su questo argomento.

Nel secondo capitolo ci concentriamo all'analisi di problemi alle derivate parziali di tipo parabolico in due domini adiacenti, che indicheremo con Ω^1 e Ω^2, con condizioni di raccordo nonlineari su $\Gamma \equiv \partial\Omega^1 \cap \Omega^2$, l'interfaccia che separa i due insiemi:

$$\begin{array}{ll} \partial_t u_1(t,x) = L_1 u_1(t,x) & \textit{in } \Omega_1\ \forall\, t>0 \\ B_1 u_1(t,x) = g_1(u_1(t,x),u_2(t,x)) & \textit{su } \Gamma\ \forall\, t>0 \\ B_1 u_1(t,x) = 0 & \textit{su } \partial\Omega_1\setminus\Gamma\ \forall\, t>0 \\ u(0,x) = u_{1,0} & \textit{su } \Omega_1 \end{array} \tag{1}$$

$$\begin{array}{ll} \partial_t u_2(t,x) = L_2 u_2(t,x) & \textit{in } \Omega_2\ \forall\, t>0 \\ B_2 u_2(t,x) = g_2(u_1(t,x),u_2(t,x)) & \textit{su } \Gamma\ \forall\, t>0 \\ B_2 u_2(t,x) = 0 & \textit{su } \partial\Omega_2\setminus\Gamma\ \forall\, t>0 \\ u_2(0,x) = u_{2,0} & \textit{su } \Omega_2 \end{array} \tag{2}$$

Un'altra classe di equazioni con nonlinearità di tipo sorgente è studiata nell'ultimo capitolo della tesi. Si tratta di problemi integrali nonlineari legati a problemi parabolici monodimensianali con condizioni di flusso nonlineari o con sorgenti puntuali nonlineari. In particolare, si considerano le proprietà, rispetto al blow up, della soluzione di equazioni del tipo:

$$u(t) = \int_{t_0}^{t} k(t-s)r(s)g(u(s)+h(s))\,ds$$

Questa analisi è ispirata e motivata dalle considerazioni fatte in [1].

In questo riassunto prenderemo in considerazione, per motivi di brevità, solo risultati che riguardano il problema accoppiato (1)-(2). Vedremo nei § 1-2 il modello da cui deriva questa formulazione e una parte dell'analisi condotta per studiare le soluzioni di questo problema.

1. – Il modello fisico.

L'interesse per questo tipo di problemi nasce, come detto, da una applicazione in ambito biomedico. In particolare, si vuole simulare il processo di scambio di sostanze disciolte nel sangue con la parete vascolare. Il modello matematico introdotto per studiare tale applicazione consiste in un sistema di equazioni come quelli visti in (1)-(2) con gli operatori interni di diffusione-trasporto e di bordo di tipo Robin:

$$L_i(w) = \Delta w + \boldsymbol{b}_i \cdot \nabla w \qquad B_i(w) = \partial_{n_i} w - \boldsymbol{b}_i \cdot w$$

Le funzione $u_i, i = 1,2$ rappresentano le concentrazioni di una specie chimica, rispettivamente, nella parete vascolare e nell'interno del condotto vascolare, quelli che abbiamo chiamato Ω_1 e Ω_2. L'interfaccia Γ rappresenta la membrana che separa i due insiemi. I campi $\boldsymbol{b}_i$ sono le soluzioni del problema fluidodinamico nei due domini, supposti noti e non influenzati dalle concentrazioni. I vettori n_i sono le normali esterne ai domini Ω_i, supposti sufficientemente regolari. La prima richiesta che abbiamo imposto è che il sistema sia chiuso, e che valgano, quindi, le seguenti ipotesi:

$$\begin{array}{ll} g_1(u_1,u_2) = -g_2(u_1,u_2)\, su\ \Gamma & \boldsymbol{b}_i \cdot n_i = 0\, su\ \partial\Omega_i \setminus \Gamma \\ \boldsymbol{b}_1 \cdot n_1 = -\boldsymbol{b}_2 \cdot n_2\, su\ \Gamma & \nabla \cdot \boldsymbol{b}_i = 0\ in\ \Omega_i \end{array} \tag{3}$$

La membrana è supposta selettiva semipermeabile, secondo il modello di Kedem-Katchalsky introdotto e discusso, ad esempio, in [3] . Questo modello prevede che la derivata normale della concentrazione attravesto la membrana sia bilanciata dalla somma di quattro elementi, vediamoli:

$$g \equiv \underbrace{\boldsymbol{b}_i \cdot u_i}_{\text{(i)}} + \underbrace{k_1(u_1-u_2)}_{\text{(ii)}} + \underbrace{k_2\frac{(u_1-u_2)}{\log u_1/u_2}}_{\text{(iii)}} + \underbrace{k_3\frac{(u_1-u_2)^2}{\log u_1/u_2}}_{\text{(iv)}}$$

(i) Effetto di trasporto dovuto al campo di velocità.
(ii) Effetto di diffusione dovuto al salto di concentrazioni.
(iii) Effetto di trasporto dovuto al salto di concentrazioni misurato rispetto alla media logaritmica.
(iv) Effetto di trasporto dovuto ai fenomeni di osmosi.

Le costanti k_i che intervengono rappresentano le caratteristiche fisiche e biologiche della membrana. Matematicamente questo problema si configura come sistema di equazioni alle derivate parziali lineari ma con condizioni di flusso di tipo Neumann nonlineari accoppiate.

2. – Alcuni risultati.

A partire da [4], dove il modello considerato prevedeva lo scambio regolato da una funzione lineare, abbiamo studiato il problema esposto nel paragrafo § 1. Parte dei risultati sono contenuti in [5]. Citiamo in questo riassunto un teorema di esitenza locale per il problema fisico nel teorema 2, una condizione per l'esistenza globale in tempo per il problema generale nel teorema 2, una consizione sufficiente per la convergenza di un metodo numerico nel caso di g lipschitziana nel teorema 3.

Parte Analisi.

TEOREMA 1. – *Siano L_i con $i = 1, 2$, $g(u_1, u_2)$ e $u_{i,0}$ compatibili tra di loro e tali da soddisfare le ipotesi formulate nel* § 1. *Siano, inoltre, i domini Ω_i opportunamente regolari. Allora, detto $Z(\Omega, T) = \{v \in C^0(\bar{\Omega} \times [0, T]) | v(t, \cdot) \in C^2(\Omega), v(\cdot, x) \in C^1(]0, T[)\}$, il problema ammette almeno una soluzione forte, nel senso che esiste un tempo $T > 0$ ed una coppia di funzioni $[u_1, u_2] \in Z(\Omega_1, T) \times Z(\Omega_2, T)$ che risolvono il problema $\forall t < T$.*

Nel caso più generale o quando sia richiesta esistenza globale, vale quanto enunciato nel prossimo teorema.

TEOREMA 2. – *Siano i campi $\boldsymbol{b}_i$ e le funzioni g_i e $u_{0,i}$ dei problemi* (1)-(2) *tali da soddisfare le ipotesi* (3) *e, inoltre, si abbia che:*

$$\exists\, m_i \geq 0 \ t.c.\ m_i < \min u_{0,i} \ ; \ g(m_1, \cdot) \geq 0\,, -g(\cdot, m_2) \geq 0$$
$$\exists\, M_i \ t.c.\ \max u_{0,i} < M_i \ ; \ g(M_1, \cdot) \leq 0\,, -g(\cdot, M_2) \leq 0$$

Allora si ha che esiste una soluzione $[u_1, u_2] \in Z(\Omega_1, \infty) \times Z(\Omega_2, \infty)$ che risolve il problema $\forall t$.

La dimostrazione del precedente teorema risiede in una applicazione del teorema di punto fisso di Schauder a partire da una stima a priori della soluzione garantita dalle ipotesi formulate.

Parte Numerica.

Nel prossimo teorema vedremo una condizione per la convergenza di un metodo iterativo da noi utilizzato per le simulazioni numeriche.

Consideriamo $\tau_n > 0$ $n = 0, \dots N$ tali che $\sum \tau_n = T$. Chiamiamo $t^0 = 0$, $t^{n+1} = t^n + \tau_n$ e cerchiamo una approssimazione per i valori di $u(t^n, x)$ che indicheremo con U^n.

Introduciamo l'errore di disaccoppiamento:

$$e_i^{n,p} = U_i^n - u_i^{n,p} \ , \tag{4}$$

dove le $u_i^{n,p}$ sono soluzioni dei seguenti problemi lineari disaccoppiati:

$$\begin{cases} \Delta u_1^{n,p} - b_1 \nabla u_1^{n,p} - a_0 u_1^{n,p} = \sum_{k=1}^{k^*} a_k u_1^{n-k} & in\ \Omega^1 \\ \partial_{n_1} u_1^{n,p} = g(u_1^{n,p-1}, u_2^{n,p-1}) + \beta^n u_1^{n,p} & su\ \Gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta u_2^{n,p} - b_2 \nabla u_2^{n,p} - a_0 u_2^{n,p} = \sum_{k=1}^{k^*} a_k u_2^{n-k} & in\ \Omega^2 \\ \partial_{n_2} u_2^{n,p} = 0 & su\ \partial\Omega^2 \setminus \Gamma \\ \partial_{n_2} u_2^{n,p} = -(g(u_1^{n,p-1}, u_2^{n,p-1}) + \beta^n u_1^{n,p}) & su\ \Gamma \end{cases}$$

Per l'errore (4), allora, vale il seguente teorema:

TEOREMA 3. – *Sia g lipschitziana. Allora esiste una scelta di a_0 per cui*

$$e_i^{n,p} \to_{p\to\infty} 0 \quad o(1)\ \forall n$$

La stima dei parametri per la convergenza del metodo dipende dalla costante di Lipschitz della funzione g e dalle costanti del teorema di traccia.

BIBLIOGRAFIA

[1] BANDLE C. e BRUNNER H., *Blowup in diffusion equations: a survey*, J. Comput. Appl. Math., **97** (1998), 3-22.

[2] GALAKTIONOV V.A. e VÀZQUEZ J.L., *The problem of blow-up in nonlinear parabolic equations*, Discrete Contin. Dyn. Syst., 8 (2002), 399-433.

[3] FRIEDMAN MORTON H., *Principles and models of biological transport*, Springer-Verlag (1986).

[4] QUARTERONI A., VENEZIANI A. e ZUNINO P., *Mathematical and numerical modeling of solute dynamics in blood flow and arterial walls*, SIAM J. Numer. Anal., **39**, (2002), 1488-1511.

[5] CALABRÒ F. e ZUNINO P., *Analysis of parabolic problems on partitioned domains with nonlinear conditions at the interface. Applcations to mass transfer through semi-permeable membranes*, Epfl, Preprint 12.2004. Submitted (2004).

Dipartimento di Matematica e Applicazioni «R. Caccioppoli»
e-mail: calabro@unina.it
Dottorato in Scienze Computazionali e Informatiche (sede amministrativa: Università di Napoli «Federico II») - Ciclo XVII