BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

ELENA CHIERICI

Il cono delle curve delle varietà di Fano

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 8-A—La Matematica nella Società e nella Cultura (2005), n.3-1, p. 485–488.

Unione Matematica Italiana

http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_3-1_485_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Il cono delle curve delle varietà di Fano

ELENA CHIERICI

1. – Introduzione.

Il più importante passo avanti degli ultimi decenni nella classificazione birazionale delle varietà algebriche è senza dubbio il cosiddetto Programma dei Modelli Minimali, formulato da Mori, Kawamata, Kollár, Miyaoka, Reid e altri a partire dall'inizio degli anni '80. Già nell'affrontare la classificazione delle superfici algebriche era apparso chiaro che alcune trasformazioni birazionali potevano essere utilizzate per individuare un «modello» all'interno di ogni classe di equivalenza birazionale, le cosiddette superfici minimali; analogamente, l'idea di Mori fu quella di individuare oggetti particolarmente semplici all'interno di ogni classe birazionale, e di dedurre le principali proprietà di una varietà algebrica a partire dallo studio di un suo modello e dei morfismi che lo legano alla varietà di partenza.

La proprietà che caratterizza i cosiddetti modelli minimali è la numerica effettività del loro fibrato anticanonico: se per ogni curva C su X si ha che $-K_X \cdot C \geq 0$ allora X è detta minimale, altrimenti è definito su X un morfismo suriettivo a fibre connesse (o contrazione) che contrae alcune delle curve la cui intersezione col fibrato anticanonico è negativa; lo studio di questi morfismi è intimamente legato allo studio delle curve che essi contraggono.

Una rappresentazione efficace delle curve contenute in una varietà algebrica X si ottiene considerando, all'interno dello spazio vettoriale reale $N_1(X)$ generato dalle classi di equivalenza numerica degli 1-cicli su X (la cui dimensione ρ_X è finita ed è detta numero di Picard), il cono convesso $NE(X)$ generato dalle classi delle curve effettive irriducibili. La teoria di Mori fornisce una descrizione della parte di $NE(X)$ che giace nel semispazio in cui K_X è negativo: il teorema del Cono afferma che in questa regione il cono delle curve è localmente poliedrale, mentre il teorema di Contrazione afferma che a ogni faccia estrema di questo sottocono è univocamente associata una contrazione che contrae tutte e sole le curve le cui classi sono contenute nella faccia considerata.

In particolare, questi risultati descrivono completamente il cono $NE(X)$ e le contrazioni definite su X per le varietà con fibrato anticanonico ampio, le cosiddette varietà di Fano.

A una varietà di Fano liscia X si possono associare i seguenti invarianti:

- l'indice r_X , definito come il massimo intero positivo m per cui $-K_X = mH$ per qualche fibrato lineare ampio H su X ;

- lo pseudoindice

$$i_X = \min\{m \in \mathbb{N} \mid -K_X \cdot C = m \text{ per qualche curva razionale } C \subset X\}.$$

È noto che $0 < r_X \leq \dim X + 1$, e la classificazione delle varietà di Fano per cui $r_X \geq \dim X$ è stata ottenuta da Kobayashi e Ochiai; le varietà di indice $\dim X - 1$, dette varietà di del Pezzo, e di indice $\dim X - 2$, dette varietà di Mukai, sono state classificate grazie al cosiddetto metodo di Apollonio, che consiste nello studiare sezioni iperpiane successive della varietà di partenza fino a ricondursi a superfici e varietà, 3-dimensionali la cui classificazione è nota.

Purtroppo tale metodo non può essere applicato alle varietà di indice $\dim X - 3$, in quanto la classificazione delle varietà di Fano di dimensione 4 è ancora da completare; in ogni caso, un primo passo nello studio di tali varietà è rappresentato dallo studio del loro cono delle curve, più precisamente della sua dimensione e del numero e tipo di raggi che lo generano.

2. – Congettura generalizzata di Mukai.

Una limitazione sulla dimensione di $NE(X)$ fu congetturata da Mukai nel 1988:

CONGETTURA A. *Se X è una varietà di Fano di dimensione n , allora*

$$\rho_X(r_X - 1) \leq n.$$

Dal momento che $r_X \leq i_X$, la congettura A può essere generalizzata come segue:

CONGETTURA B. *Se X è una varietà di Fano di dimensione n , allora*

$$\rho_X(i_X - 1) \leq n,$$

e vale l'uguaglianza se e solo se $X \simeq (P^{i_X-1})^{\rho_X}$.

Un noto risultato dovuto a Mori afferma che $i_X \leq n + 1$; nel 1990 Wiśniewski ha dimostrato che se $i_X > \frac{n+2}{2}$ allora $\rho_X = 1$, e nello stesso articolo ha implicitamente osservato che la formulazione della Congettura B è più naturale. Nel 2002 Bonavero, Casagrande, Debarre and Druel hanno formulato esplicitamente la Congettura B e l'hanno dimostrata nei seguenti casi:

- X ha dimensione 4,
- X è una varietà torica con pseudoindice $i_X \geq \frac{n+3}{3}$,
- X è una varietà torica di dimensione ≤ 7 ,
- X è una varietà di Fano omogenea.

Inoltre nel 2004 Casagrande ha dimostrato che la congettura è vera per tutte le varietà di Fano toriche.

Lo studio delle curve razionali sulle varietà di Fano ci ha consentito di estendere questi risultati e di dimostrare i seguenti teoremi:

TEOREMA 1. – *Sia X una varietà di Fano di dimensione n e pseudoindice $i_X \geq \frac{n+3}{3}$, se X ammette una famiglia di curve razionali che sia covering e non spezzante allora la congettura B è vera per X .*

TEOREMA 2. – *Tutte le varietà di Fano di dimensione 5 soddisfano la congettura B .*

La dimostrazione di questi risultati si basa largamente sulla teoria di Mori: da essa sappiamo infatti che per ogni punto di una varietà di Fano passa una curva razionale di grado anticanonico $\leq n + 1$; inoltre tali curve possono essere parametrizzate da opportuni sottoschemi della varietà di Chow associata a X , detti famiglie, che possono essere utilizzati per definire una relazione di equivalenza sui punti di X .

Nel caso in cui le famiglie siano proprie si può definire una fibrazione su X la cui fibra generica è una classe di equivalenza; una proprietà interessante di questa mappa è che ogni curva contenuta nella fibra generica è numericamente equivalente a una combinazione lineare delle classi delle componenti irriducibili delle curve parametrizzate dalle famiglie rispetto a cui è definita l'equivalenza. In generale è possibile scegliere alcune famiglie in modo che la fibrazione associata sia costante (nel qual caso si dice che X è razionalmente connessa rispetto alle famiglie considerate); dunque un modo per dare una limitazione sul numero di Picard di X è trovare il minimo numero di famiglie che rendono X razionalmente connessa e stimare il numero di componenti numericamente indipendenti delle curve che esse parametrizzano.

3. – Il cono delle curve.

Nella seconda parte della tesi abbiamo intrapreso lo studio del numero dei raggi che generano il cono $NE(X)$ e del tipo di contrazione estrema ad essi associata nel caso di varietà di dimensione ≥ 5 e pseudoindice $i_X = n - 3$, ottenendo i seguenti risultati:

TEOREMA 3. – *Sia X una varietà di Fano di dimensione $n \geq 5$, pseudoindice $i_X = n - 3$ e numero di Picard $\rho_X \geq 2$. Allora $NE(X)$ è generato da ρ_X raggi. Più precisamente, abbiamo la seguente lista di possibili configurazioni, dove F indica una contrazione fibrata, D_i una contrazione divisoriale il cui luogo eccezionale è contratto a una sottovarietà i -dimensionale e S una contrazione piccola. Inoltre, tutti i casi sono effettivi.*

$\dim X$	ρ_X	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
5	2	F	F			
		F	D_0			
		F	D_1			
		F	D_2			
		F	S			
	(*)	D_2	D_2			
	(*)	D_2	S			
	3	F	F	F		
		F	F	S		
		F	F	D_1		
		F	F	D_2		
		F	D_2	D_2		
	4	F	F	F	F	
		F	F	F	D_2	
	5	F	F	F	F	F
6	2	F	F			
		F	D_1			
		F	D_2			
		F	S			
	3	F	F	F		
7	2	F	F			
		F	D_2			
8	2	F	F			

Dei casi contrassegnati con (*) abbiamo inoltre fornito la classificazione:

TEOREMA 4. – *Sia X una varietà di Fano di dimensione 5 e pseudoindice $i_X = 2$ che non ammette nessuna famiglia di curve razionali che sia contemporaneamente covering, quasi-non spezzante e localmente non spezzante; allora $\rho_X = 2$, e X è lo scoppimento di P^5 lungo una quadrica liscia due-dimensionale, o lungo uno scroll cubico $\subset P^4$, o lungo una superficie di Veronese.*

BIBLIOGRAFIA

- [1] ANDREATTA M., CHIERICI E. e OCCHETTA G., *Generalized Mukai conjecture for special Fano varieties*, *Cent. Eur. J. Math.*, **2(2)** (2004), 272-293.
- [2] BONAVERO L., CASAGRANDE C., DEBARRE O. e DRUEL S., *Sur une conjecture de Mukai*, *Comment. Math. Helv.*, **78(3)** (2003), 601-626.
- [3] CHIERICI E. e OCCHETTA G., *The cone of curves of Fano varieties of coindex four*, Preprint AG/0401429, January 2004.

via Simone d'Orsenigo 18 - 20135 Milano
e-mail: e.chierici@email.it

Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Trento) - Ciclo: XVI
Direttori di ricerca: Prof. Marco Andreatta, dott. Gianluca Occhetta, Università di Trento