Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Irene Crimaldi

Convergenza di speranze condizionali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **8-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2005), n.3-1, p. 497–500.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_3-1_497_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2005.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VIII-A, Dicembre 2005/1, 497-500

Convergenza di speranze condizionali

Irene Crimaldi

La tesi si occupa di convergenza di speranze condizionali in diversi contesti e in forme diverse. Il contesto nel quale ci si pone nel Capitolo 1 è quello legato alla convergenza stabile di variabili aleatorie. Questa convergenza, introdotta da A. Rényi nel lontano 1963, è stata studiata a fondo da numerosi autori, tra i quali D.J. Aldous e G.K. Eagleson (1978), P.D. Fegin (1985), P. Hall e C.C. Heyde (1980), J. Jacod e J. Memin (1981), G. Letta (1998). Si tratta di un concetto intermedio tra la convergenza in legge e la convergenza in probabilità.

Definizione 1. – *Su uno spazio probabilizzato* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *sia data una famiglia* $(X_t)_{t\in T}$ *di variabili aleatorie, a valori in uno spazio polacco* E *(munito della propria tribù boreliana), la quale abbia come insieme degli indici un insieme ordinato filtrante* T. *Sia inoltre* $\mathcal{H}$ *una sottotribù di* $\mathcal{A}$. *Si dice che la famiglia* $(X_t)_{t\in T}$ *converge* $\mathcal{H}$*-stabilmente se, comunque si fissi un evento non trascurabile* H *in* $\mathcal{H}$, *la famiglia di leggi* $\big(X_t(P_H)\big)_{t\in T}$ *converge debolmente verso una legge limite (dipendente, in generale, da* H*).*

Nello studio della convergenza stabile, non è chiaro, a prima vista, né quale sia il buon oggetto da assumere come «oggetto limite» né quale sia il modo migliore per ricondurre la convergenza stabile a una convergenza di speranze condizionali. In realtà, il buon oggetto limite è un *nucleo*, ossia una famiglia $N = \big(N(\omega,\,\cdot)\big)_{\omega\in\Omega}$ di leggi su E, tale che, per ogni funzione f boreliana e limitata su E, la trasformata di f mediante N, ossia la funzione Nf definita su Ω dalla relazione

$$Nf(\omega) = \int N(\omega,\,\mathrm{d}x) f(x),$$

sia misurabile su $(\Omega, \mathcal{A})$. Se poi si conviene di dire che il nucleo N è *misurabile* rispetto a una certa sottotribù di $\mathcal{A}$ quando tale sia ogni funzione della forma Nf, con f boreliana e limitata su E, si può enunciare la proposizione seguente.

Proposizione 1. – *Nelle ipotesi della Definizione* 1, *affinché la famiglia* $(X_t)_{t\in T}$ *converga* $\mathcal{H}$*-stabilmente, occorre e basta che esista un nucleo* N, *misurabile rispetto al completamento della tribù* $\mathcal{H}$ *in* $\mathcal{A}$, *tale che, per ogni funzione* f *in* $\mathcal{C}_b(E)$, *le speranze condizionali* $Pf(X_t) \mid \mathcal{H}]$ *convergano verso* Nf *secondo la topologia debole* $\sigma(L^1, L^\infty)$.

Prendendo le mosse da questa nota caratterizzazione, nel Capitolo 1 s'introduce dapprima un'ovvia estensione della convergenza stabile.

DEFINIZIONE 2. – *Si modifichino le ipotesi della Definizione 1, supponendo assegnata, anziché una singola sottotribù $\mathcal{H}$ di $\mathcal{A}$, una base di condizionamento, ossia una famiglia $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_t)_{t\in T}$ di sottotribù di $\mathcal{A}$ avente T come insieme degli indici. Si dice allora che la famiglia $(X_t)_{t\in T}$ converge $\mathcal{G}$-stabilmente verso un nucleo N se, per ogni funzione f in $\mathcal{C}_b(E)$, le speranze condizionali $P[f(X_t)\,|\,\mathcal{G}_t]$ convergono verso Nf secondo la topologia debole $\sigma(L^1, L^\infty)$.*

Di questa forma di convergenza stabile si studia poi il seguente rafforzamento.

DEFINIZIONE 3. – *Nelle ipotesi della definizione precedente, si dice che la famiglia $(X_t)_{t\in T}$ converge $\mathcal{G}$-stabilmente in senso forte verso il nucleo N se, per ogni funzione f in $\mathcal{C}_b(E)$, le speranze condizionali $Pf(X_t)\,|\,\mathcal{G}_t]$ convergono verso Nf in media.*

Data la base di condizionamento $\mathcal{G}$, un nucleo N si dice *$\mathcal{G}$-regolare* se ogni variabile aleatoria della forma Nf, con f in $\mathcal{C}_b(E)$, è limite in media delle speranze condizionali $PNf\,|\,\mathcal{G}_t]$. Usando questo linguaggio, si dimostra il teorema seguente.

TEOREMA 1. – *Sia $\mathcal{K}$ una classe determinante per la convergenza debole delle leggi su E. Allora le condizioni che seguono sono equivalenti:*

(a) *$(X_t)_{t\in T}$ converge $\mathcal{G}$-stabilmente in senso forte verso N.*

(b) *$(X_t)_{t\in T}$ converge $\mathcal{G}$-stabilmente verso N e, per ogni elemento f di $\mathcal{K}$, si ha $\int P[f(X_t)\,|\,\mathcal{G}_t]^2\,\mathrm{d}P \to \int (Nf)^2\,\mathrm{d}P$.*

(c) *Per ogni elemento f di $\mathcal{K}$, si ha $P[f(X_t)\,|\,\mathcal{G}_t] \xrightarrow{L^1} Nf$.*

(d) *Il nucleo N è $\mathcal{G}$-regolare e inoltre, per ogni elemento f di $\mathcal{K}$ e ogni famiglia $(H_t)_{t\in T}$ di eventi, con $H_t \in \mathcal{G}_t$ per ogni t e $\inf_t P(H_t) > 0$, si ha*

$$\int [\,f(X_t) - Nf\,]\,\mathrm{d}P_{H_t} \to 0.$$

Questa ed altre caratterizzazioni studiate nel Capitolo 1 sono impiegate, nei tre capitoli successivi, per ottenere risultati di convergenza stabile in senso forte, che migliorano precedenti risultati di convergenza stabile in senso ordinario. Precisamente, il Capitolo 2 contiene risultati di convergenza per famiglie triangolari di variabili aleatorie simmetriche (senza alcuna ipotesi d'integrabilità), nei quali l'ipotesi abituale di indipendenza su ciascuna riga è sostituita da quella (più debole) di simmetria congiunta. Essi assorbono i risultati ottenuti in [6]. Il Capitolo 3 contiene nuovi risultati di convergenza stabile per famiglie triangolari di vettori aleatori verso un nucleo gaussiano, che estendono analoghi risultati di G. Letta e L. Pratelli (1996, Rend. Acc. XL). Il Capitolo 4 contiene un teorema di convergenza per martingale vettoriali con tempi continui, che estende risultati di C.C. Heyde (1997) e di U. Küchler e M. Srensen (1999), relativi alla teoria della verosimiglianza per processi stocastici. Ulteriori sviluppi di alcuni dei risultati dei primi quattro capitoli hanno dato luogo agli articoli [1] e [4].

Nel Capitolo 5 si studia il caso particolare in cui la base di condizionamento sia costituita da una successione crescente o decrescente di tribù. In questo ambito si rafforzano i vecchi risultati di convergenza di speranze condizionali dovuti a D. Landers e L. Rogge (1972, Manuscripta Math.) e se ne migliorano le dimostrazioni riconducendole alla semplice diseguaglianza seguente:

$$\int |PX \mid \mathcal{F}] - QX \mid \mathcal{F}]| \mathrm{d}(P+Q) \leq 4\,\|P-Q\|.$$

In questa diseguaglianza, X è una variabile aleatoria a valori in $[-1,1]$, mentre P, Q sono due misure di probabilità, di cui $|P-Q|$ denota la «distanza in variazione totale».

Un caso più interessante (per le possibili applicazioni alla teoria del filtraggio) è quello studiato nel Capitolo 6. Qui si considerano due variabili aleatorie X, Y su uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, a valori in due spazi misurabili $(E, \mathcal{E})$, $(F, \mathcal{F})$. Inoltre, per ogni intero n, si considerano due variabili aleatorie X_n, Y_n su uno spazio probabilizzato $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, P_n)$, a valori negli stessi spazi misurabili $(E, \mathcal{E})$, $(F, \mathcal{F})$. In un tal quadro, si dimostra il teorema seguente.

TEOREMA 2. – *Si supponga che, per ogni elemento A di $\mathcal{E}$, si abbia*

$$\sup_{B \in \mathcal{F}} |P_n\{X_n \in A,\ Y_n \in B\} - P\{X \in A,\ Y \in B\}| \to 0.$$

Allora, per ogni funzione f misurabile e limitata su $(E, \mathcal{E})$, la legge, secondo P_n, di $P_n[f(X_n) \mid Y_n]$ converge debolmente verso la legge, secondo P, di $P[f(X) \mid Y]$. Se si suppone per giunta che gli spazi $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, P_n)$ coincidano tutti con $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, che $(F, \mathcal{F})$ sia uno spazio metrizzabile di tipo numerabile munito della sua tribù boreliana e che si abbia $Y_n \xrightarrow{P} Y$, allora, per ogni funzione f misurabile e limitata su $(E, \mathcal{E})$, si ha $P[f(X_n) \mid Y_n] \xrightarrow{P} P[f(X) \mid Y]$.

Nelle ipotesi del teorema precedente, si considera anche il caso in cui gli spazi $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, P_n)$ coincidano tutti con $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ e sussistano inoltre le relazioni funzionali $Y = h(X)$, $Y_n = h_n(X_n)$ (con h, h_n applicazioni misurabili di $(E, \mathcal{E})$ in $(F, \mathcal{F})$). In questo caso, supponendo che $(E, \mathcal{E})$ sia uno spazio metrizzabile di tipo numerabile munito della sua tribù boreliana e che si abbia $X_n \xrightarrow{P} X$, si dimostra che vale ancora, per ogni funzione f misurabile e limitata su $(E, \mathcal{E})$, la relazione $P[f(X_n) \mid Y_n] \xrightarrow{P} P[f(X) \mid Y]$. Si esibisce quindi un certo numero di controesempi, i quali mostrano l'essenzialità di certe ipotesi. I risultati dei capitoli 5 e 6 hanno dato origine all'articolo [2].

Nel Capitolo 7 si trasforma il quadro «astratto» del Capitolo 6 in un quadro «topologico» supponendo che ciascuno dei due spazi E, F sia uno spazio polacco (munito della propria tribù boreliana). Si suppongono inoltre assegnate delle misure di probabilità ausiliarie Q, Q_n, con $P \ll Q$, $P_n \ll Q_n$, e si considerano le relative densità: $Z = \mathrm{d}P/\mathrm{d}Q$, $Z_n = \mathrm{d}P_n/\mathrm{d}Q_n$. In questo nuovo quadro, si dimostra il teorema seguente, che estende un risultato di E.M. Goggin (1994, Ann. Prob.), semplificandone la dimostrazione.

TEOREMA 3. – *Si supponga che Z sia misurabile rispetto alla tribù $\sigma(X,Y)$, che la legge congiunta di (X_n, Y_n, Z_n) secondo Q_n converga debolmente verso la legge congiunta di (X, Y, Z) secondo Q e che, per ogni funzione f in $\mathcal{C}_b(E)$, la legge di $Q_n[f(X_n) \,|\, Y_n]$ secondo Q_n converga debolmente verso la legge di $Q[f(X) \,|\, Y]$ secondo Q. Allora, per ogni funzione g in $\mathcal{C}_b(E \times F)$, la legge di $P_n g(X_n, Y_n) \,|\, Y_n]$ secondo P_n converge debolmente verso la legge di $Pg(X,Y) \,|\, Y]$ secondo P.*

La tecnica di dimostrazione consiste nel ricondursi, impiegando il teorema di Skorohod, al caso in cui gli spazi $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, Q_n)$ coincidano tutti con lo spazio $(\Omega, \mathcal{A}, Q)$ e, su questo spazio, la successione (X_n, Y_n, Z_n) converga quasi certamente verso (X, Y, Z). I risultati del Capitolo 7 hanno dato origine all'articolo [3].

Infine, nel Capitolo 8 si studia il comportamento delle speranze condizionali nel teorema di rappresentazione di Skorohod. Più precisamente, per un'assegnata successione (μ_n) di leggi su uno spazio polacco E, la quale converga debolmente verso una legge μ, ci si pone il problema di costruire, sull'intervallo $[0,1]$ munito della ripartizione uniforme P, una successione (X_n) di variabili aleatorie a valori in E, aventi come leggi rispettive le assegnate μ_n, la quale converga quasi certamente verso una variabile aleatoria X e sia tale che, per ogni variabile aleatoria reale Z integrabile su $[0,1]$, si abbia $PZ \,|\, X_n] \xrightarrow{P} PZ \,|\, X]$. Si prova che il problema ha soluzione in ipotesi più deboli di quelle che figurano in un articolo di O. Arcudi (1998, Stat. Prob. Lett.). La tecnica impiegata consiste nel ridursi al caso in cui E coincida con $\boldsymbol{R}$, dimostrando preliminarmente che, nel caso generale, è possibile trovare un insieme boreliano di E che porti tutte le leggi assegnate e che sia omeomorfo a un insieme boreliano di $\boldsymbol{R}$. I risultati di quest'ultimo capitolo hanno dato luogo all'articolo [5].

BIBLIOGRAFIA

[1] CRIMALDI I., LETTA G. e PRATELLI L., *A strong form of stable convergence*, preprint.

[2] CRIMALDI I. e PRATELLI L., *Two Inequalities for Conditional Expectations and Convergence Results for Filters*, in corso di pubblicazione su Stat. Prob. Letters.

[3] CRIMALDI I. e PRATELLI L., *Convergence Results for Conditional Expectations*, in corso di pubblicazione su Bernoulli.

[4] CRIMALDI I. e PRATELLI L., *Convergence Results for Multivariate Martingales*, Stochastic Processes Appl., **115/4** (2005), 571-577.

[5] CRIMALDI I., *On the Behavior of the Conditional Expectations in Skorohod Representation Theorem*, Stat. Prob. Letters, **67** (2004), 141-148.

[6] CRIMALDI I., *Convergence Results for a Normalized Triangular Array of Symmetric Random Variables*, Expo. Math., **20(4)** (2002), 375-384.

Dipartimento di Matematica, Università di Bologna
e-mail: crimaldi@dm.unibo.it
Perfezionamento in Matematica, Indirizzo Scienze Finanziarie, Scuola Normale Superiore, Pisa
Direttori di ricerca: Prof. Giorgio Letta, Dipartimento di Matematica, Università di Pisa,
Prof. Luca Pratelli, Accademia Navale di Livorno