Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Fabrizio Cuccu

Proprietà qualitative delle soluzioni di alcuni problemi di ottimizzazione

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **8-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2005), n.3-1, p. 505–508.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_3-1_505_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2005.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VIII-A, Dicembre 2005/1, 505-508

Proprietà qualitative delle soluzioni di alcuni problemi di ottimizzazione

FABRIZIO CUCCU

1. – Introduzione.

Questa tesi raccoglie alcuni risultati relativi all'ottimizzazione di funzionali definiti su un classe di sottoinsiemi di R^n.

Più precisamente sia Ω un insieme aperto limitato con bordo regolare. Allora per ogni sottoinsieme misurabile E di Ω sia χ_E la relativa funzione caratteristica e denotiamo con u_E la soluzione debole del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = \chi_E & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\,\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

In altri termini u_E sarà l'unica funzione dello spazio di Sobolev $H_0^1(\Omega)$ caratterizzata dalla proprietà

$$\int_\Omega \nabla u_E \cdot \nabla \phi\, dx = \int_\Omega \chi_E\, \phi\, dx$$

per ogni funzione $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Facendo uso della notazione precedente introduciamo il funzionale

$$I[E] = \int_\Omega |\nabla u_E|^2\, dx.$$

Sia $|E|$ la misura di E. Fissato $0 < a < |\Omega|$ si studia il massimo di I nell'insieme:

$$\{E \subset \Omega : |E| = a\}.$$

Chiameremo, *dominio ottimale*, e lo denoteremo con D ogni soluzione del precedente problema. Mediante i metodi diretti del calcolo delle variazioni si prova l'esistenza di domini ottimali D. Incidentalmente osserviamo che in generale l'unicità non vale.

Mediante un argomento di approssimazione e sotto opportune ipotesi si trova un risultato di regolarità: il bordo ∂D è una ipersuperfice analitica.

Una parte rilevante della tesi è dedicata al problema della conservazione o meno di proprietà di simmetria. Più precisamente ci si chiede quali simmetrie di Ω (se esistono) si trasmettono ai domini ottimali. Vengono illustrati esempi in cui la simmetria è conservata ed esempi in cui ciò non accade (*rottura della simmetria*).

Se Ω è un insieme convesso si deducono ulteriori informazioni sulla natura dei domini ottimali.

La seconda parte della tesi è relativa all' ottimizzazione di altri due funzionali che, in un certo senso, generalizzano I. Il primo funzionale ha come argomento una coppia di insiemi misurabili mentre il secondo è legato ad un equazione non lineare.

Risultati analoghi si trovano nel lavoro di S. Chanillo et al. [1] relativamente alla minimizzazione del primo autovalore del problema

$$\begin{cases} -\Delta u + a\chi_E u &= \lambda u \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{su } \partial\Omega \end{cases},$$

al variare di $E \subset \Omega$ con $a > 0$ e misura di E fissata.

2. – Risultati principali e metodi.

Osserviamo che se u_E è soluzione del problema (1) allora $u_E \in W^{2,2}_{loc}(\Omega) \cap C^{\gamma}(\bar{\Omega}) \cap C^{1,\sigma}(\Omega)$ per un opportuno $\gamma > 0$ e ogni $\sigma \in (0,1)$. Inoltre l'equazione (1) è verificata q.o. in Ω. Diremo che due insiemi misurabili E e F sono uguali a meno di un insieme di misura nulla se la misura della loro differenza simmetrica è uguale a zero. Evidentemente se $E = F$ a meno di un insieme di misura nulla $I[E] = I[F]$. Mediante il Teorema di compattezza di Rellich-Kondrachov e il «bathtub principle»([3] Lieb e Loss) si prova l'esistenza di domini ottimali. Si dimostra il seguente risultato.

TEOREMA 1. – *Se D è un dominio ottimale allora esiste un numero reale $t > 0$ tale che*

$$D = \{x \in \Omega : u_D(x) > t\}$$

a meno di un insieme di misura nulla, e

$$\partial D = \{x \in \Omega : u_D(x) = t\}.$$

In particolare segue che i domini ottimali sono essenzialmente insiemi aperti. Facendo uso di un risultato di Talenti [4] si può stimare inferiormente e superiormente il parametro t in funzione di $|\Omega|$, di a e della misura della più grande bolla contenuta in Ω. Mediante tali stime e un argomento di perturbazione del problema di Saint Venant si prova il seguente teorema di regolarità.

TEOREMA 2. – *Fissato Ω esiste un $\varepsilon > 0$ tale che se $|\Omega| - |D| < \varepsilon$ allora ∂D è una ipersuperficie analitica.*

In generale le simmetrie di Ω non si trasmettono ai domini ottimali. I seguenti risultati riguardano la simmetria radiale e la simmetria rispetto ad una retta di R^2.

TEOREMA 3. – *Sia* $\Omega_a \subset R^2$ *la corona circolare* $\{x \in R^2 : a < |x| < a+1\}$ *con* $a > 0$. *Se* $a > (e^{1/4} - 1)^{-1}$ *allora i domini ottimali relativi a* Ω_a *di misura* $\alpha = \pi/4$ *non sono radialmente simmetrici.*

TEOREMA 4. – *Per ogni* $h > 0$ *sia* $\Omega_h = B_1 \cup (-2,2) \times (-h,h) \cup B_2 \subset R^2$ *con* $B_1 = B((-2,0),1)$ *e* $B_2 = B((2,0),1)$. *Assumiamo* $\alpha < \pi\sqrt{e}/2$. *Allora esiste* $h_\alpha > 0$ *tale che se* $h < h_\alpha$ *e se* $D \subset \Omega_h$ *è un dominio ottimale di misura* α *allora* D *è interamente contenuto in* B_1 *oppure in* B_2.

Ricordiamo che un insieme $E \subset R^n$ si dice *simmetrico secondo Steiner* rispetto ad un iperpiano T se per ogni $x \in E$ l'intero segmento di R^n che congiunge x al suo simmetrico (rispetto a T) è contenuto in E.

Contrariamente ai casi precedenti la simmetria di Steiner viene preservata.

TEOREMA 5. – *Sia* Ω *simmetrico secondo Steiner rispetto all'iperpiano* $T_1 = \{x \in R^n : x_1 = 0\}$ *dove* x_1 *è la prima coordinata di* x. *Se* D *è un dominio ottimale allora:*

- *la funzione* u_D *è simmetrica rispetto all'iperpiano* T_1,
- $\dfrac{\partial u_D}{\partial x_1}(x) < 0$ *per ogni* $x \in \Omega$ *con* $x_1 > 0$,
- D *è simmetrico secondo Steiner rispetto a* T_1.

Come corollario si ricava che se Ω è una bolla allora l'unica configurazione ottimale con misura α è la bolla concentrica con Ω di misura α.

Nel caso in cui Ω è convesso è possibile, sotto opportune ipotesi, ottenere ulteriori informazioni su i domini ottimali.

TEOREMA 6. – *Sia* Ω *convesso. Assumiamo che esista una bolla* $B \subset \Omega$ *con* $\alpha < |B|$. *Se* D *è un dominio ottimale allora*

- D *contiene una bolla di raggio* $\left(\dfrac{\alpha\, l(|B|,\alpha)}{|\Omega| - \alpha}\right)^{\frac{1}{2}}$,
- *la distanza tra* D *e* $\partial\Omega$ *e maggiore o uguale di* $\dfrac{l(|B|,\alpha)}{\sqrt{2\,m(\alpha)}}$,

dove le funzioni $l(a,b), m(a)$ *sono positive e si possono esprimere esplicitamente in termini di funzioni elementari.*

Nel secondo capitolo della tesi vengono studiati altri due problemi di ottimizzazione. Consideriamo il primo. Siano E, F sottoinsiemi misurabili di Ω di misura rispettivamente α e β con $0 < \alpha \le \beta < |\Omega|$. Denotiamo con u_E e u_F le soluzioni deboli dei problemi

$$\begin{cases} -\Delta u_E = \chi_E & \text{in } \Omega \\ u_E = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\Delta u_F = \chi_F & \text{in } \Omega \\ u_F = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Definiamo il funzionale J come:

$$J : \{(E,F) : E,F \subset \Omega, |E| = a, |F| = \beta\} \longrightarrow R$$

$$(E,F) \longmapsto J[E,F] = \int_F u_E \, dx = \int_E u_F \, dx.$$

Chiamiamo *coppie ottimali* le coppie (D,G) che massimizzano il funzionale J.

In maniera analoga al caso precedente si prova un teorema di esistenza di coppie ottimali. Tuttavia, in questo caso otteniamo anche una condizione necessaria affinchè una coppia sia ottimale:

TEOREMA 7. – *Se (D,G) con $|D| \leq |G|$ è una coppia ottimale allora $D \subset G$ ed esistono due numeri reali positivi t and s tali che*

$$G = \{u_D > t\}$$

and

$$D = \{u_G > s\}$$

a meno di insiemi di misura nulla. Inoltre $u_D(x) \leq u_G(x)$ in Ω e $t \leq s$.

Analogamente al caso del funzionale I si provano risultati legati alla conservazione e alla rottura della simmetria.

BIBLIOGRAFIA

[1] CHANILLO S., GRIESER D., IMAI M., KURATA K. e OHNISHI I., *Symmetry breaking and other phenomena in the optimization of eigenvalues for composite membranes*, Contemporary Math., **268** (1999), 61-82.

[2] CUCCU F., JHA K. e PORRU G., *Geometric properties of solutions to maximization problems*, EJDE, **71** (2003), 1-8.

[3] LIEB E., LOSS M., *Analysis*, Amer. Math. Soc., (1997).

[4] TALENTI G., *Elliptic equations and rearrangements*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, **3** (1976), 697-718.

Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Cagliari
e-mail: fcuccu@unica.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Cagliari) - Ciclo XVI
Direttore di ricerca: Prof. Giovanni Porru, Università di Cagliari