Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Giuseppina Di Blasio

Equazioni ellittiche e simmetrizzazione rispetto alla misura di Gauss

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **8-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2005), n.3-1, p. 521–523.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_3-1_521_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2005.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VIII-A, Dicembre 2005/1, 521-523

Equazioni ellittiche e simmetrizzazione rispetto alla misura di Gauss

GIUSEPPINA DI BLASIO

In questa tesi si studiano questioni inerenti a proprietà qualitative, stime ottimali e regolarità di soluzioni di equazioni ellittiche di tipo degenere con una degenerazione di tipo «gaussiano», cioè tali che se l'operatore ha la seguente struttura

$$Lu = -(a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + b_i(x)\varphi(x)u_{x_i} + c(x)u(x), \tag{1}$$

la matrice dei coefficienti soddisfa la condizione

$$a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \varphi(x)|\xi|^2, \tag{2}$$

dove $\varphi(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right)$ è la densità della misura di Gauss $\gamma_n(dx) = \varphi(x)dx$. Si considera una classe di problemi del tipo

$$\begin{cases} Lu = \varphi(x)g(x) - (f_i\varphi)_{x_i} & \text{in } \Omega \\ u = 0 \quad \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

dove Ω è un aperto di $\mathbb{R}^n$, non necessariamente limitato e si confronta il problema (3) con un problema opportunamente «simmetrizzato». Per poter collocare il discorso in un contesto più generale osserviamo innanzitutto che l'operatore (1) è legato all'equazione dell'oscillatore armonico della meccanica quantistica.

Al fine di chiarire meglio la problematica cui siamo interessati poniamo $b_i = c = f_i = 0 \;\; i = 1, ...n$ nel problema (3). Si vuole massimizzare la norma di u nello spazio di Sobolev con peso $H_0^1(\varphi, \Omega)$, al variare di:

(a) Ω tra i sottoinsiemi aperti di $\mathbb{R}^n$ con fissata misura di Gauss,

(b) g in un insieme di funzioni che hanno insiemi di livello con fissata misura di Gauss e tale da garantire l'esistenza della soluzione del problema (3),

(c) i coefficienti a_{ij} in modo da soddisfare la condizione (2).

Si osservi che se Ω è limitato l'operatore del problema (3) è uniformemente ellittico. È noto che nel caso di operatori uniformemente ellittici la simmetrizzazione di Schwarz permette di confrontare la soluzione di un problema ellittico con quella di un problema dello stesso tipo che è definito in una sfera avente la stessa misura del dominio di partenza ed i cui dati sono a simmetria sferica.

Questo tipo di risultato, ottenuto inizialmente da Talenti in [4] per un'equazione lineare uniformemente ellittica, è stato esteso ad equazioni più generali considerando termini di ordine inferiore, indebolendo le ipotesi di ellitticità e considerando equazioni di tipo non lineare.

Nel nostro caso Ω può non essere limitato e l'ipotesi di ellitticità (2) è data in termini della funzione $\varphi(x)$. Per questo motivo si cercano soluzioni deboli nello spazio di Sobolev con peso $H_0^1(\varphi, \Omega)$ e si utilizza la nozione di riordinamento di una funzione rispetto alla misura di Gauss.

DEFINIZIONE 1. – *Se Ω è un aperto di $\mathbb{R}^n$ ed u una funzione misurabile in Ω, si definisce la funzione di distribuzione di u*

$$\mu_u(t) = \gamma_n\{|u| > t\}, \text{ per } t > 0,$$

il riordinamento decrescente di u rispetto alla misura di Gauss

$$u^*(s) = \inf\{t \geq 0 : \mu_u(t) \leq s\}, \text{ per } 0 < s \leq 1,$$

ed il riordinamento di u rispetto alla misura di Gauss la funzione $u^\star : \Omega^\star \to [0, +\infty[$, definita da

$$u^\star(x) = u^*(\Phi(x_1)),$$

dove $\Omega^\star = \{x = (x_1, x_2, ...x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 > \lambda\}$ è il semispazio avente la stessa misura di Gauss di Ω e $\Phi(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$.

In [1] si dimostra il seguente risultato di confronto puntuale

$$u^\star(x) \leq w(x) \text{ per q.o. } x \in \Omega^\star, \tag{4}$$

dove $u^\star(x)$ è il riordinamento rispetto alla misura di Gauss della soluzione $u(x)$ del probelma (3) e $w(x)$ è la soluzione del seguente problema «simmetrizzato»

$$\begin{cases} -\left(w_{x_i}\varphi(x)\right)_{x_j} = g^\star(x)\varphi(x) & \text{in } \Omega^\star \\ \\ w(x) = 0 & \text{su } \partial\Omega^\star \end{cases} \tag{5}$$

dove $g^\star(x)$ è il riordinamento rispetto alla misura di Gauss della funzione $g(x)$. Dalla (4) è possibile dedurre che il massimo della norma di u in $H_0^1(\varphi, \Omega)$ si ottiene quando Ω è un semispazio, $a_{ij} = \varphi(x)\delta_{ij}$ ed il dato g dipende da una sola variabile.

Nella prima parte della tesi sono stati ottenuti risultati di confronto per il problema (3) con termini di ordine inferiore (cf. [3]). In tal caso si confronta il problema iniziale con un problema opportunamente «simmetrizzato» che in qualche modo tenga conto di tutti i termini presenti nell'equazione. Se si trascura l'influenza del termine di ordine zero, allora denotando ancora con w la soluzione del problema «simmetrizzato», si dimostra che vale un confronto puntuale del tipo (4). Se invece si tiene conto dell'influenza di questo termine non vale in generale un confronto di tipo puntuale, ma si dimostra un confronto tra «concentrazioni», ovvero un risultato del tipo

$$\int_0^s u^*(r)dr \leq \int_0^s w^*(r)dr.$$

Questo tipo di confronto permette ancora di stimare le norme e più in generale implica

$$\int_{\Omega} F(u) \leq \int_{\Omega^\star} F(w)$$

per ogni funzione F convessa tale che $F \geq 0$ e $F(0) = 0$.

Per quanto riguarda il termine di tipo distribuzione, si dimostra un risultato di confronto con un problema il cui dato è una funzione «costruita sugli insiemi di livello di u». Tale funzione non è il riordinamento di f, ma in qualche senso è «quasi» un suo riordinamento. Difatti si dimostra che tale funzione è il limite debole di una successione di funzioni aventi lo stesso riordinamento di f.

La dimostrazione dei risultati esposti si basa sulle proprietà dei riordinamenti di funzioni rispetto alla misura di Gauss e sulla disuguaglianza isoperimetrica rispetto alla misura di Gauss. Quest'ultima stabilisce che, tra tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ con fissata misura di Gauss, i semispazi minimizzano il perimetro (cf. [2]).

La seconda parte della tesi è dedicata allo studio della regolarità di soluzioni del problema (3). Ricordiamo che nel caso di problemi uniformemente ellittici, utilizzando le proprietà dei riordinamenti di funzioni, è possibile generalizzare i risultati ottenuti da Stampacchia facendo variare, ad esempio, i dati in spazi di Lorentz. Tali risultati evidenziano come la regolarità della soluzione varia in «maniera naturale», così come il teorema di immersione di Sobolev suggerisce.

Nello stesso ordine di idee, nella tesi si dimostra che la sommabilità delle soluzioni del problema (3), varia cos ì come le disuguaglianze tipo Sobolev logaritmiche suggeriscono. Infatti utilizzando i risultati di confronto ottenuti nella prima parte della tesi, si studia come varia la sommabilità della soluzione u al variare della sommabilità dei dati f e g negli spazi di Lorentz-Zygmund con peso $L^{p,q}(\log L)^{a}(\varphi, \Omega)$. Inoltre si ottengono condizioni ottimali per l'esistenza.

BIBLIOGRAFIA

[1] BETTA M.F., BROCK F., MERCALDO A. e Posteraro M.R., *A comparison related to Gauss measure*, C. R. Acad. Sci. Paris Serie I, **334** (2002), 451-456.

[2] BORELL C., *The Brunn-Minkowski inequality in Gauss space*, Invent. Math., **30** (1975), 207-216.

[3] DI BLASIO G., *Linear elliptic equations and Gauss measure*, J. Inequal. Pure Appl. Math., **4** (2003), no. 5, Article 106, 11 pp. (eletronic).

[4] TALENTI G., *Elliptic Equations and Rearrangements*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., **3** (1976), 697-718.

Dipartimento di Matematica e Applicazioni «R. Caccioppoli»,
Università degli studi di Napoli «Federico II»
e-mail: giuseppina.diblasio@dma.unina.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Napoli) - Ciclo XV
Direttore di ricerca: Prof. Maria Rosaria Posteraro, Università di Napoli