Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Marco G. Ghimenti

Geodetiche su varietà coniche

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **8-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2005), n.3-1, p. 545–548.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_3-1_545_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2005.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VIII-A, Dicembre 2005/1, 545-548

Geodetiche su varietà coniche

Marco G. Ghimenti

In questa tesi abbiamo studiato il problema dell'esistenza, del numero e delle proprietà qualitative delle geodetiche su un particolare tipo di varietà non regolari che abbiamo chiamato *varietà coniche*. Lo studio di queste varietà è nato dall'analisi di alcuni problemi classici, come quello della brachistocrona in presenza di un potenziale non limitato e lo studio delle geodetiche sul cono. Inoltre questo tipo di varietà ha molti legami con altre varietà non lisce presenti in letteratura, come *orbifolds* e *cone manifolds*. Abbiamo dunque introdotto le varietà coniche come segue.

Definizione 1. – *Si dice che M è una varietà conica se è una sottovarietà C^0 n-dimensionale di $\boldsymbol{R}^m$, ovunque liscia, eccetto che in per un insieme finito di punti V. Un punto di V si chiama vertice di M.*

In geometria Riemanniana ci sono due maniere di introdurre le geodetiche:

Locale (Problema di Cauchy): Dato un punto $p \in M$, e un vettore $v \in T_pM$, cerchiamo una curva $\gamma : I \to M$ t.c.

$$\begin{cases} D_s\gamma' = 0; \\ \gamma(0) = p; \\ \gamma'(0) = v. \end{cases} \tag{1}$$

Globale (Problema di Bolza): Dati due punti $p, q \in M$, cerchiamo una curva

$$\gamma \in \Omega := \{\gamma \in H^1([0,1], M) \ : \ \gamma(0) = p, \ \gamma(1) = q\}$$

che sia un punto critico per il funzionale dell'energia E definito da

$$\begin{aligned} &E : \Omega \to \boldsymbol{R} \\ &E(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(s)|^2 ds. \end{aligned} \tag{2}$$

Questi due approcci sono equivalenti. In particolare per una curva $\gamma : [0,1] \to M$ che risolve (1) esiste un $\varepsilon > 0$ t.c. $\gamma|_{[0,\varepsilon]}$ minimizza l'energia fra le curve in H^1 che hanno gli stessi estremi (si dice che le geodetiche sono localmente minimi dell'energia).

La ricerca di geodetiche per mezzo del funzionale dell'energia spesso fa uso dei cosiddetti *metodi topologici*, quali le teorie di Lusternik-Schnirelmann e di Morse. Queste teorie permettono di collegare l'esistenza di punti critici di una certa funzione f con la topologia dei suoi sottolivelli $f^c := \{x : f(x) \leq c\}$, al variare di $c \in \boldsymbol{R}$ Strumento cardine di queste teorie è il lemma di deformazione che riportiamo di seguito.

LEMMA 1. [LEMMA DI DEFORMAZIONE]. – *Sia M una varietà C^2, $f \in C^2(M, \boldsymbol{R})$. Siano $a, b \in \boldsymbol{R}$ t.c.* $\inf\{\|\nabla f(x)\|,\ x \in f_a^b\} > 0$, *dove* $f_a^b = \{x : a \leq f(x) \leq b\}$. *Allora f^a è un retratto di deformazione forte di f^b.*

Gli elementi fondamentali per applicare un lemma di deformazione come quello appena enunciato per la ricerca di punti critici sono: 0la regolarità della funzione f e della varietà M, e una certa condizione di compattezza per i sottolivelli.

Se consideriamo il problema delle geodetiche nel nostro caso, non possiamo applicare le tecniche appena enunciate, a causa della mancanza di regolarità. Abbiamo quindi cercato di dare una definizione appropriata di geodetica, compatibile con quelle già presenti in letteratura, e che permettesse di riadattare le tecniche topologiche al nostra quadro. Ci siamo accorti che la definizione di geodetica più appropriata era la seguente:

DEFINIZIONE 2. – *Data M varietà conica, con insieme dei vertici V, e dati $p, q \in M$, si dice che una curva $\gamma \in \Omega$ è una geodetica (generalizzata) se*

- *l'insieme $T_\gamma := \{s \in (0,1) : \gamma(s) \in V\}$ è chiuso e non ha parte interna;*
- $D_s\gamma' = 0\ \forall s \in [0,1] \setminus T$;
- $|\gamma'|^2$ *è costante come funzione in L^1.*

Se M è una varietà liscia, la Definizione 2 si riduce a quella usuale. Ci sono però comportamenti patologici; per esempio, nelle varietà coniche, può succedere che una geodetica non sia localmente un minimo dell'energia: basta pensare ad un cono e prendere la geodetica spezzata che passa per il vertice.

La nostra definizione permette di dimostrare il seguente lemma di deformazione.

DEFINIZIONE 3. – *Dati $p, q \in M$, M varietà conica poniamo*

$$\Omega^b := \{\gamma \in \Omega \ : \ E(\gamma) \leq b\};$$

$$\Omega_a^b := \{\gamma \in \Omega \ : \ a \leq E(\gamma) \leq b\}.$$

TEOREMA 1. [Lemma di Deformazione] – *Sia M una varietà conica, $p, q \in M$. Supponiamo che esista un $c \in \boldsymbol{R}$ t.c. Ω^c contenga solo un numero finito di geodetiche. Allora, se ci sono $a, b \in \boldsymbol{R}$, $a < b < c$, t.c. l'intervallo $[a, b]$ contenga solo valori regolari di E, si ha che Ω^a è un retratto di deformazione di Ω^b.*

La dimostrazione di questo teorema è basata sulle teorie di *weak slope* introdotte da Degiovanni e Marzocchi. La presenza di un numero finito di geodetiche in Ω^c assicura la compattezza necessaria a provare i risultati desiderati.

Questo lemma lega la Definizione 2, che è locale, alla topologia dello spazio dei cammini. In particolare possiamo trovare il seguente risultato, tipico della teoria di Lusternik-Schnirelmann.

TEOREMA 2. – *Sia M varietà conica, $p, q \in M$. Allora ci sono almeno* $\operatorname{cat} \Omega$ *geodetiche generalizzate che congiungono p a q.*

Non è sempre facile calcolare la categoria di Ω per una varietà conica; nel nostro lavoro comunque abbiamo fornito qualche criterio per questo calcolo.

Nella seconda parte del lavoro, abbiamo associato ad ogni geodetica γ un indice $i(\gamma)$ analogo all'indice di Morse per le geodetiche lisce. Tramite questo indice abbiamo generalizzato le relazioni di Morse che valgono nel caso regolare.

Dal momento che il funzionale E non è differenziabile, la definizione usuale dell'indice non è applicabile: abbiamo allora associato ad ogni geodetica il seguente polinomio formale nella variabile λ.

DEFINIZIONE 4. – *Sia c un valore critico isolato di E. Sia γ una geodetica isolata di energia c. Allora*

$$i(\gamma) = \mathcal{P}_\lambda(\Omega^c, \Omega^c \setminus \gamma), \tag{3}$$

dove $\mathcal{P}_\lambda$ è il polinomio di Poincaré nella variabile λ, definito come segue.

DEFINIZIONE 5. – *Sia H^* la coomologia di Alexander-Spanier a coefficienti reali. Data una coppia di spazi topologici (X, A), $A \subset X$, il polinomio di Poincaré è la serie formale nella variabile λ (con la convenzione che $\lambda^\infty = 0$):*

$$\mathcal{P}_\lambda(X, A) = \sum_{q=0}^{\infty} \dim H^q(X, A)\lambda^q. \tag{4}$$

Si definisce inoltre per convenzione $\mathcal{P}_\lambda(X) = \mathcal{P}_\lambda(X, \emptyset)$

Possiamo allora, grazie al lemma di deformazione, provare il seguente teorema:

TEOREMA 3 [RELAZIONI DI MORSE]. – *Sia M una varietà conica. Siano $p, q \in M$ tali che E ammetta solo un numero finito di punti in Ω^c, per ogni c.*

Detto Z l'insieme delle geodetiche, se a, b sono valori regolari dell'energia, si ha

$$\sum_{\gamma \in \Omega_a^b \cap Z} i(\gamma) = \mathcal{P}_\lambda(\Omega^a, \Omega^b) + (1 + \lambda)\mathcal{Q}_\lambda; \tag{5}$$

$$\sum_{\gamma \in Z} i(\gamma) = \mathcal{P}_\lambda(\Omega) + (1 + \lambda)\mathcal{Q}_\lambda, \tag{6}$$

dove $\mathcal{Q}_\lambda$ è una serie formale nella variabile λ a coefficienti interi non negativi.

Questo teorema permette stime molto precise sul numero di geodetiche; inoltre tramite l'indice possiamo ottenere delle informazioni qualitative su tali geodetiche. In particolare, se in una varietà liscia, per una geodetica generica, $i(\gamma)$ è un monomio, questo non è vero per una geodetica su una varietà conica, nemmeno genericamente. Abbiamo allora introdotto la molteplicità di una geodetica tramite la seguente definizione.

DEFINIZIONE 6. – *Sia γ geodetica. La sua molteplicità è data da* $\mathrm{mult}(\gamma) = i(\gamma)|_{\lambda=1}$.

Abbiamo poi studiato le proprietà qualitative di geodetiche di molteplicità alta, o molteplicità 0.

Alla fine di questo lavoro abbiamo presentato un'applicazione di queste teorie ad un problema di brachistocrone in presenza di un potenziale generico, che è stato il problema di partenza di questo studio. In particolare abbiamo provato

1. la presenza di un numero infinito di brachistocrone sulla sfera in presenza di un potenziale $U(x)$ definito su S^n, ovunque liscio tranne che per un numero finito di punti v_i t.c. $U(x) \to -\infty$ per $x \to v_i$.
2. L'esistenza di brachistocrone in $\boldsymbol{R}^n$ in presenza di un potenziale $U(x)$ limitato superiormente tale che

$$U(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

La tesi contiene anche un confronto tra le geodetiche che si trovano su queste varietà e quelle che si trovano in altri contesti non regolari, già studiate in letteratura

BIBLIOGRAFIA

[1] BENCI, *A new approach to the Morse-Conley theory and some applications*, Annali di Matematica Pura ed Applicata (IV) **158** (1991), 231-305.

[2] CORVELLEC J.N., DEGIOVANNI M. e MARZOCCHI M., *Deformation proprieties for continuous functionals and critical point theory*, Topological Methods in Nonlinear Analysis, **1** (1993), 151-171.

[3] PALAIS R., *Morse theory on Hilbert manifolds*, Topology, **2** (1963), 299-340.

[4] PALAIS R., *Lusternik-Schnirelman theory on Banach manifolds*, Topology, **5** (1966), 115-132.

[5] GHIMENTI M., *Geodesics in conical manifold*, Topological Methods in Nonlinear Analysis (to appear).

Dipartimento di Matematica Applicata, Università di Pisa
e-mail: ghimenti@mail.dm.unipi.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Pisa) - Ciclo XVI
Direttore di ricerca: Prof. Vieri Benci