Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Annunziata Loiudice

Problemi non lineari critici per alcune classi di operatori subellittici

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **8-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2005), n.3-1, p. 565–568.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_3-1_565_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2005.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VIII-A, Dicembre 2005/1, 565-568

Problemi non lineari critici per alcune classi di operatori subellittici

ANNUNZIATA LOIUDICE

1. – Introduzione.

Oggetto di questa tesi è lo studio di alcuni problemi non lineari legati a fenomeni di esponente critico per alcune classi di operatori subellittici.

In questo speciale contesto, sono stati affrontati i due seguenti temi, sinora ampiamente studiati in ambito ellittico:

1. *la presenza di eventuali termini di resto nelle disuguaglianze di immersione di tipo-Sobolev relative ad embedding non compatti* (si veda [1]);
2. *il fenomeno delle cosiddette «dimensioni critiche» nei problemi semilineari a crescita critica* (si veda [2], [3]).

Nel contesto ellittico, un'attenta analisi delle problematiche sopra richiamate ha portato alla formulazione di due principi unificanti (si veda [3]), che interpretano i fenomeni di cui sopra alla luce della proprietà di sommabilità della soluzione fondamentale dell'operatore coinvolto. I due principi sono i seguenti:

PRINCIPIO 1. – *La disuguaglianza di Sobolev con costante ottimale può essere migliorata su aperti limitati aggiungendo ogni norma che sia localmente finita per la soluzione fondamentale dell'operatore associato.*

PRINCIPIO 2. – *Un operatore ellittico L si comporta «criticamente» in dimensione N se e solo se L ha almeno una funzione di Green $G(x_0, x)$ nello spazio $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$.*

La nostra ricerca si innesta in questo quadro di risultati. Il nostro obiettivo è stato quello di indagare la validità dei principi sopra enunciati in un contesto completamente differente, non ellittico bensì *subellittico*.

La principale classe di operatori da noi esaminata è costituita dai cosiddetti *Sublaplaciani* su gruppi di Lie stratificati, o *Gruppi di Carnot*.
Si tratta di un'ampia classe di operatori differenziali del secondo ordine, invarianti rispetto alle traslazioni a sinistra su particolari gruppi di Lie non abeliani e omogenei di grado due rispetto alle dilatazioni naturali sul tali gruppi. Esempio ben noto in letteratura è il *Laplaciano di Kohn* sul Gruppo di Heisenberg.

Lo studio dei sublaplaciani e delle equazioni alle derivate parziali subellittiche ad essi associate ha ricevuto grande impulso nell'ultimo decennio e riveste, oggi, un ruolo fondamentale in svariati campi della geometria e dell'analisi.

Particolare rilievo ha assunto in questo contesto lo studio di equazioni semilineari a crescita critica, grazie al contributo decisivo di autori quali Lanconelli, Garofalo, Citti, Uguzzoni. Tali problemi traggono origine dalla formulazione del problema di Yamabe sulle varietà CR.

In questa tesi, le problematiche sopra citate si affrontano, oltre che per i sublaplaciani, per un'altra classe di operatori subellittici, introdotta da Franchi e Lanconelli nel 1983, il cui esempio modello è costituito dall'operatore $\mathcal{L} = \Delta_x + |x|^{2a}\Delta_y$, con $a > 0$, definito su $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^m_x \times \mathbb{R}^n_y$.

Questi operatori, noti anche come operatori di tipo-Grushin, sono omogenei di grado due rispetto ad una famiglia di dilatazioni anisotrope su $\mathbb{R}^N$, ma a differenza dei sublaplaciani non risultano invarianti rispetto ad alcuna traslazione di gruppo e non sono in generale di tipo Hörmander. Nonostante ciò, le «buone» proprietà della metrica di Carnot-Carathéodory ad essi associata ci consentono anche in questo caso un'analisi soddisfacente delle problematiche in esame.

2. – Notazioni e definizioni.

In questa sezione introduciamo la definizione di Gruppo di Carnot più diffusa in contesto analitico e da noi adottata nella tesi, assieme ad alcune notazioni. Sia $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \circ)$ un gruppo omogeneo, ovvero un gruppo di Lie dotato di una famiglia di dilatazioni $\{\delta_\lambda\}_{\lambda>0}$ (che risultino essere anche automorfismi di gruppo), del seguente tipo: $\delta_\lambda(x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(r)}) = (\lambda\, x^{(1)}, \lambda^2\, x^{(2)}, \cdots, \lambda^r\, x^{(r)})$, dove $x^{(i)} \in \mathbb{R}^{N_i}$ per $i = 1, \ldots, r$ e $N_1 + N_2 + \ldots + N_r = N$.

Il numero naturale $Q = \sum_{j=1}^{r} j\, N_j$, naturalmente associato alle dilatazioni $\{\delta_\lambda\}_{\lambda>0}$, è detta *dimensione omogenea* del gruppo $\mathbb{G}$.

Assumiamo ora che l'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ dei campi vettoriali invarianti a sinistra su $\mathbb{G}$ ammetta una stratificazione, i.e. $\mathfrak{g} = \bigoplus_{j=1}^{r} V_j$, ove $\dim V_j = N_j$, $[V_1, V_j] = V_{j+1}$ per $1 \leq j < r$, $[V_1, V_r] = \{0\}$. Sotto queste ipotesi, definiamo $\mathbb{G}$ un *gruppo di Carnot*. Se $\{X_1, \ldots, X_{N_1}\}$ è una base di V_1, l'operatore differenziale del secondo ordine $\Delta_{\mathbb{G}} = \sum_{i=1}^{N_1} X_i^2$ è detto un *sublaplaciano* su $\mathbb{R}^N$. Denoteremo con $\nabla_{\mathbb{G}} = (X_1, \ldots, X_{N_1})$ il relativo *gradiente subellittico*.

Il più semplice esempio di gruppo di Carnot è $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, +)$. In questo caso il Laplaciano classico Δ è un sublaplaciano su $\mathbb{G}$ e risulta $Q = N$.

Il più semplice esempio non abeliano è il gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^n = (\mathbb{R}^{2n+1}, \circ)$ con la legge di composizione $\xi \circ \xi' = \big(z + z',\, t + t' + 2(\langle x', y\rangle - \langle x, y'\rangle)\big)$, ove si è denotato con $\xi = (z, t) = (x, y, t)$ il generico punto di $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Poiché i campi $X_1, \ldots, X_{N_1}$ generano tutta l'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ mediante l'operazione di bracket, l'operatore $\Delta_{\mathbb{G}}$ risulta ipoelliptico, grazie al famoso teorema di ipoellitticità di Hörmander.

Un ruolo fondamentale nell'analisi funzionale sui gruppi di Carnot è assunto dalla validità di una disuguaglianza di Sobolev per il gradiente intrinseco, dimostrata da

Folland nel 1975:

$$\|\nabla_{\mathbb{G}} f\|_2^2 \geq C\|f\|_{2^*}^2, \quad \forall f \in S_0^1(\mathbb{G})$$

ove $2^* = \frac{2Q}{Q-2}$ è l'esponente critico in questo contesto e $S_0^1(\mathbb{G})$ denota il completamento di $C_0^\infty \mathbb{G})$ rispetto alla norma $\|\nabla_{\mathbb{G}} f\|_2$.

3. – Risultati principali.

Il risultato principale da noi ottenuto in quanto a generalità è la dimostrazione di alcune disuguaglianze di Sobolev con termini di resto su aperti limitati per Sublaplaciani su Gruppi di Carnot mediante l'approccio introdotto in ambito euclideo da Brezis e Lieb [1]. Si prova il seguente:

TEOREMA 1. – *Sia $\Omega \subset \mathbb{G}$ un aperto limitato. Allora esistono costanti $C = C(\Omega) > 0$ e $D = D(\Omega) > 0$ t.c.*

$$\|\nabla_{\mathbb{G}} f\|_2^2 \geq S\|f\|_{2^*}^2 + C(\Omega)\|f\|^2_{\frac{Q}{Q-2},w} \quad \forall f \in S_0^1(\Omega)$$

$$\|\nabla_{\mathbb{G}} f\|_2^2 \geq S\|f\|_{2^*}^2 + D(\Omega)\|\nabla_{\mathbb{G}} f\|^2_{\frac{Q}{Q-1},w} \quad \forall f \in S_0^1(\Omega)$$

dove $2^* = \frac{2Q}{Q-2}$, con Q dimensione omogenea di $\mathbb{G}$, S è la miglior costante per l'embedding di Folland-Stein in Ω e $\|\cdot\|_{p,w}$ denota la norma L^p debole.

La dimostrazione euclidea si può imitare, tranne che per l'uso della tecnica di riarrangiamento, che non è applicabile al nostro contesto. Ne consegue che nel nostro caso le costanti $C(\Omega)$ e $D(\Omega)$ non risultano dipendere solo dalla misura di Ω, ma anche dalla sua «capacità subellittica».

Nel caso particolare del Gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^n$, la conoscenza esplicita dei minimizzanti di Sobolev, determinati da Jerison e Lee in un importante lavoro del 1988, consente di approfondire la nostra analisi. In particolare, dimostriamo che la disuguaglianza di Sobolev per il gradiente di Heisenberg può essere migliorata non solo su aperti limitati, ma sull'intero spazio, in termini della «distanza» dall'insieme dei minimizzanti.

Questo nostro risultato, oggetto del lavoro [5], estende al gruppo di Heisenberg un risultato ottenuto in ambito euclideo da Bianchi ed Egnell nel 1991.

Il teorema è il seguente:

TEOREMA 2. – *Esiste una costante positiva a, dipendente solo dalla dimensione omogenea Q, tale che*

$$\|\nabla_{\mathbb{H}^n} f\|_2^2 - S\|f\|_{2^*}^2 \geq a\, d(f, \mathrm{M})^2, \quad \forall f \in S_0^1(\mathbb{H}^n)$$

ove M *denota l'insieme degli estremali della disuguaglianza di Folland-Stein su $\mathbb{H}^n$ e*

$$d(f, \mathrm{M}) = \inf_{u \in \mathrm{M}} \|\nabla_{\mathbb{H}^n}(f - u)\|_2 = \inf_{c,\lambda,\eta} \|\nabla_{\mathbb{H}^n}(f - c\, U_{\lambda,\eta})\|_2$$

ove $c \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\eta \in \mathbb{H}^n$, $U_{\lambda,\eta}(\xi) = \lambda^{(Q-2)/2} U(\delta_\lambda(\eta^{-1} \circ \xi))$ e $U(\xi) = U(z,t) = k_0\big((1 + \|z\|^2)^2 + t^2\big)^{-(Q-2)/4}$.

Nella tesi si sono poi affrontate problematiche analoghe per gli operatori di tipo-Grushin. Per questi operatori si è innanzitutto ricavata una disuguaglianza di Sobolev globale, come conseguenza dei teoremi di embedding per campi non regolari dimostrati da Franchi e Lanconelli nel 1984, facendo uso di teoremi di immersione per *spazi di Sobolev anisotropi*.

Si è, poi, studiata l'esistenza e le proprietà di integrabilità delle funzioni di Green per tali operatori, usando il metodo delle cosiddette *funzioni di Green approssimate*, introdotto in contesto euclideo da Grüter e Widman nel 1982.
Le stime L^p deboli uniformi rispetto al polo ottenute per le funzioni di Green di $\mathcal{L}$ consentono anche in questo caso di dimostrare disuguaglianze di Sobolev con termini di resto mediante l'approccio di Brezis e Lieb.

I principali risultati sinora commentati sono raccolti nel lavoro [5]. Per quanto riguarda il tema delle dimensioni critiche, esso viene studiato in questa tesi per gli operatori $\Delta_{\mathbb{H}^n}$ e $\Delta_x + \|x\|^2 \Delta_y$. Si riportano, innanzitutto, i risultati noti nel caso del Laplaciano di Kohn, dovuti a Citti, attestanti l'assenza di dimensioni critiche per questo operatore.

Si formula, poi, il problema semilineare critico «alla Brezis-Nirenberg» per l'operatore $\Delta_x + x^2 \Delta_y$ su aperti limitati intersecanti l'insieme di degenerazione dell'operatore, ovvero l'insieme $\{x = 0\}$, e si presentano alcuni risultati di esistenza di soluzioni non banali. Inoltre, un argomento alla Pohozaev su aperti limitati e stellati in un opportuno senso ci consente di rivelare la «criticità» della dimensione omogenea $Q = 3$.

I risultati ottenuti nella tesi si rivelano in perfetto accordo con i principi formulati in ambito ellittico ed evidenziano anche in questo contesto il ruolo chiave assunto dalla soluzione fondamentale nei problemi caratterizzati da mancanza di compattezza.

BIBLIOGRAFIA

[1] BREZIS H. e LIEB E., *Sobolev inequalities with remainder terms*, J. Funct. Anal., **62** (1985), 73-86.

[2] BREZIS H. e NIRENBERG L., *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical exponents*, Comm. Pure Appl. Math., **36** (1983), 437-477.

[3] JANNELLI E., *The role played by space dimension in elliptic critical problems*, J. Diff. Eq., **156** (1999), 407-426.

[4] LANCONELLI E. e UGUZZONI F., *Non-existence results for semilinear Kohn-Laplace equations in unbounded domains*, Comm. Part. Diff. Eq., **25** (2000), 1703-1739.

[5] LOIUDICE A., *Sobolev inequalities with remainder terms for Sublaplacians and other subelliptic operators*, NoDEA (in corso di stampa).

[6] LOIUDICE A., *Improved Sobolev inequalities on the Heisenberg group*, Nonlinear Analysis TMA (in corso di stampa).

Dipartimento di Matematica, Università di Bologna
e-mail: loiudice@dm.unibo.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Bari) - Ciclo XV
Direttore di ricerca: Prof. Enrico Jannelli, Università di Bari