Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Alberto Lovison

Funzioni generatrici a finiti parametri in teoria dei campi

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **8-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2005), n.3-1, p. 569–572.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_3-1_569_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2005.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VIII-A, Dicembre 2005/1, 569-572

Funzioni generatrici a finiti parametri in teoria dei campi

ALBERTO LOVISON

1. – Introduzione.

Questa tesi di dottorato in Fisica Matematica si sviluppa su tre problemi, su piani concettuali in prima istanza apparentemente diversi, disgiunti. Il principio comune a questi problemi è la nozione di *funzione generatrice*, cruciale in molti aspetti della geometria e della topologia simplettica. Tale tesi è il risultato di collaborazioni, a varie riprese, in contesti culturali diversi, con Franco Cardin, Todor Gramchev e Mario Putti.

2. – Integrali oscillanti in spazi di Gevrey.

Nella prima parte, si prende in considerazione una classe di integrali oscillanti dipendenti da un parametro grande k,

$$I(k) := \int a(x) e^{ik\phi(x)} dx.$$

Questi integrali si incontrano, tipicamente, come modello di soluzione asintotica per problemi di ottica ondulatoria e di meccanica quantistica, laddove il parametro grande rappresenta il reciproco della lunghezza d'onda oppure il reciproco della costante di Planck. Inoltre, la funzione ϕ, detta *fase*, è caso particolare di funzione generatrice di sottovarietà lagrangiane, tipiche dell'ottica e più in generale della geometria simplettica.

Abbiamo indagato il decadimento di tali integrali in assenza di punti critici della funzione fase ϕ, calando tale indagine nell'ambito degli spazi di Gevrey (cfr. [4]). Tali spazi sono uno strumento largamente impiegato, tra l'altro, in analisi microlocale e in meccanica celeste, in particolare nei lavori di Todor Gramchev (cfr. [2]).

Le stime classiche della rappresentazione iterata n-esima $I_n(k)$, ottenibili anche negli spazi C^∞, sono di tipo polinomiale, i.e., $|I_n(k)| \leq C_n k^{-n}$. Mediante Stirling e un procedimento analogo alle stime di Nekhoroshev negli sviluppi asintotici, abbiamo ottenuto una stima di decadimento esponenziale,

$$I(k) := \int a(x) e^{ik\phi(x)} dx = A\sqrt{k} e^{-\sigma k^{\frac{1}{s}}} \left[1 + O\left(\frac{1}{k}\right) \right], \qquad \text{per } k \to +\infty$$

nel caso in cui a e ϕ siano entrambe funzioni di Gevrey di classe s. Abbiamo così esteso un risultato di Todor Gramchev, cfr. [2], precedentemente ottenuto nel caso di funzioni fase analitiche.

Successivamente, includendo nell'indagine dei punti critici di tipo Morse, cioè non degeneri, e applicando il metodo della fase stazionaria, abbiamo trovato degli sviluppi asintotici e stimato la loro classe di Gevrey.

$$a \in G^s, \phi \text{ Morse}, \qquad \Longrightarrow \qquad I(k) \in G^{2s-1}$$

Se l'ampiezza è di classe Gevrey s, lo sviluppo asintotico dell'integrale $I(k)$ è una serie di Gevrey di classe $2s-1$, i.e., quando $s > 1$, osserviamo una *perdita di regolarità*. Abbiamo anche osservato che tale risultato è *sharp*, non è migliorabile.

3. – Riduzioni a finiti parametri in teoria dei campi.

Nella seconda parte, abbiamo preso in considerazione un classico problema non lineare di tipo Dirichlet,

$$-\Delta u = F(u), \text{ in } \Omega \qquad u = 0 \text{ su } \partial\Omega,$$

e la formulazione variazionale equivalente,

$$dJ(u) = 0, \qquad u \in H_0^1(\Omega).$$

Le questioni legate all'esistenza e alla molteplicità delle soluzioni per problemi di questo tipo sono studiate estensivamente mediante classiche tecniche topologiche, come la teoria del grado di Leray-Schauder o teoremi di inversione locale di mappe, oppure, quando è possibile, per mezzo di più raffinate tecniche variazionali, come la teoria di Morse oppure Lusternik-Schnirelmann in spazi infinito dimensionali.

In particolare, nelle vicinanze dei punti di biforcazione, si possono applicare delle tecniche di riduzione locale come quella di Lyapunov-Schmidt, permettendo una analisi molto fine della molteplicità delle soluzioni.

Tutte questi aspetti sono trattati ad esempio in diversi lavori di A. Ambrosetti (cfr. [3]).

3.1 – *Riduzione finita esatta.*

La principale novità introdotta in questa tesi è l'applicazione al principio variazionale di un metodo (cfr. [1]) di riduzione finita esatta di tipo Lyapunov-Schmidt globale, grazie al quale si ottiene un principio variazionale equivalente definito in un opportuno $\mathbb{R}^m$:

$$dJ(u) = 0, \qquad u \in H_0^1(\Omega). \qquad \Leftrightarrow \qquad dW(\mu) = 0, \qquad \mu \in \mathbb{R}^m,$$

e indagare sui problemi di esistenza, biforcazione, costruibilità numerica delle soluzioni, a partire da questa funzione generatrice a finiti parametri.

Tale riduzione finita esatta fu introdotta da Amann, Conley e Zehnder e successivamente impiegata da Claude Viterbo in varie applicazioni (cfr. [5]).

3.2 – *Funzionali quadratici all'infinito.*

Abbiamo dimostrato che, sotto opportune ipotesi, tale riduzione finita esatta conduce a un funzionale $W(\mu)$ in $\mathbb{R}^m$, *funzione generatrice* anch'esso, che risulta essere *debolmente quadratico all'infinito*, i.e., $W(\mu)$ differisce finitamente in norma C^1 da un polinomio quadratico non degenere:

$$|W(\mu) - \langle Q\mu, \mu\rangle|_{C^1} \leq C.$$

Le funzioni generatrici quadratiche all'infinito furono introdotte da Chaperon, Sikorav e Viterbo, e risultarono essere molto utili per trattare questioni di esistenza di orbite periodiche in meccanica hamiltoniana e in topologia simplettica. Il lavoro contenuto in questa tesi sembra essere una delle prime applicazioni di queste funzioni alle equazioni alle derivate parziali.

Funzioni come queste sono di tipo Palais-Smale, pertanto i punti critici sono confinati in regioni compatte. Inoltre, misurando la complessità topologica degli insiemi di sotto-livello di tale funzione con la coomologia relativa, siamo in grado di individuare, mediante Lusternik-Schnirelmann, soluzioni (punti critici) di tipo min-max. Abbiamo in tal modo rivisitato alcuni risultati classici di esistenza, ottenuti ad esempio mediante Leray-Schauder, in un contesto completamente finito-dimensionale.

4. – **Applicazioni numeriche.**

Nell'ultima parte della tesi abbiamo applicato la tecnica di riduzione finita esatta all'approssimazione numerica delle soluzioni. Abbiamo in primo luogo verificato che la traduzione agli elementi finiti della tecnica di riduzione risultasse consistente. In secondo luogo abbiamo verificato su di un problema campione la buona efficienza dell'algoritmo ottenuto, nonché la completezza nel rilevare le soluzioni previste analiticamente.

In un ambiente genuinamente finito dimensionale come quello degli elementi finiti, sembrerebbe a prima vista superfluo introdurre una riduzione a finiti parametri. Ciononostante, se nella teoria delle equazioni alle derivate parziali si riesce a ridurre il problema dall'infinito al finito, applicando la riduzione nell'ambiente discretizzato siamo riusciti a riscrivere un problema di dimensione 640 come problema di due sole variabili.

BIBLIOGRAFIA

[1] FRANCO CARDIN, *Global finite generating functions for field theory*, Banach Center Publ., **59** (2003), 133-142.
[2] TODOR GRAMCHEV, *The stationary phase method in Gevrey classes and Fourier Integral Operators on Ultradistributions*, Partial Differential Equations, Banach Cent. Publ., **19** (1987), 101-112.
[3] ANTONIO AMBROSETTI, *Critical points and nonlinear variational problems*, Mém. Soc. Math. France (N.S.) **49** (1992).
[4] LUIGI RODINO, *Linear Partial Differential Equations in Gevrey Spaces*, World Scientific (1984).
[5] CLAUDE VITERBO, *Recent progress in periodic orbits of autonomous Hamiltonian systems and applications to symplectic geometry*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **121** (1990), 227-250.

Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata, Università di Padova
e-mail: lovison@math.unipd.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Padova) - Ciclo XVI
Direttore di ricerca: Prof. Franco Cardin, Università di Padova