Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Francescopaolo Montefalcone

Alcune osservazioni sulla geometria differenziale ed integrale dei gruppi di Carnot

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **8-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2005), n.3-1, p. 593–596.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_3-1_593_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2005.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VIII-A, Dicembre 2005/1, 593-596

Alcune osservazioni sulla geometria differenziale ed integrale dei gruppi di Carnot

FRANCESCOPAOLO MONTEFALCONE

Oggetto della presente tesi è lo studio di alcuni aspetti della Teoria Geometrica della Misura dei Gruppi di Carnot. Nella prima parte della tesi dimostriamo alcuni risultati di Geometria Integrale per Gruppi di Carnot, mentre nella seconda parte introduciamo, adattandoli a questo contesto, alcuni classici metodi di Geometria Differenziale finalizzati principalmente allo studio delle ipersuperfici regolari. Questa ricerca si inscrive nel più ampio progetto di estendere i metodi del Calcolo delle Variazioni a spazi metrici generali quali, ad esempio, le geometrie *sub-Riemanniane*.

Introduciamo ora le nozioni necessarie ad esporre alcuni dei risultati ottenuti. Un *gruppo di Carnot di passo k* $(\mathbb{G}, \bullet)$ è un gruppo di Lie (rispetto all'operazione $\bullet$) n-dimensionale, nilpotente e statificato la cui algebra di Lie $\mathfrak{g} \cong \mathbb{R}^n$ soddisfa

$$\mathfrak{g} = V_1 \oplus ... \oplus V_k, \quad [V_1, V_{i-1}] = V_i \quad (i = 2, ..., k), \ \ V_{k+1} = \{0\}.$$

Il sottofibrato V_1 del fibrato tangente $T\mathbb{G}$ è detto *orizzontale* e denotato con la lettera H. Posto $V := V_2 \oplus ... \oplus V_k$, diremo *verticale* il sottofibrato V di $T\mathbb{G}$. Assumeremo che $dimV_i = m_i$ $(i = 1, ..., k)$ e che H sia generato da una base di campi vettoriali invarianti a sinistra $\underline{X_H} := \{X_1, ..., X_{m_1}\}$. Questa può completarsi ad una base globale (frame) di sezioni invarianti a sinistra $\underline{X} := \{X_i : i = 1, ..., n\}$ che sia *adattata alla stratificazione*. Se $\{\mathrm{e}_i : i = 1, ..., n\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n \cong \mathfrak{g}$ adattata alla stratificazione, le sezioni X_i del frame $\underline{X}$ si ottengono mediante il differenziale della traslazione a sinistra L_p $(p \in \mathbb{G})$ di e_i, cioè $X_i(p) := L_{p_*}\mathrm{e}_i$ $(i = 1, ..., n)$. Le fibre orizzontali possono munirsi di una metrica $g_H = \langle \cdot, \cdot \rangle_H$ ed in tal caso $\mathbb{G}$ si dice avere una *struttura sub-Riemanniana*. Si può sempre scegliere una metrica Riemanniana g, invariante a sinistra, per cui il frame $\underline{X}$ sia *ortonormale* in ogni punto e tale che $g_{|H} = g_H$. *Ciò consente di inquadrare in un ambito Riemanniano lo studio di alcune questioni riguardanti i gruppi di Carnot.*

Il co-frame $\underline{\omega} := \{\omega_i : i = 1, ..., n\}$ invariante a sinistra e duale di $\underline{X}$ è determinato dalla condizione $\omega_i(X_j) = \delta_i^j$ $(i, j = 1, ..., n)$. Ricordiamo che le *costanti di struttura* di $\mathfrak{g}$ associate al frame $\underline{X}$ sono definite come $C_{ij}^k := \langle [X_i, X_j], X_k \rangle$ $(i, j, k = 1, ..., n)$. La forma volume Riemanniana di $\mathbb{G}$ è data da $\sigma^n := \bigwedge_{i=1}^n \omega_i$. Inoltre se $S \subset \mathbb{G}$ è un'ipersuperficie immersa e ν è la normale unitaria ad S, la misura Riemanniana $n-1$-dimensionale relativa ad S si definisce come $\sigma^{n-1} \llcorner S := (\nu \lrcorner \sigma^n)|_S$.

Se $\mathring{H} := H \setminus \{0_H\}$, dove 0_H è la sezione nulla di H, $\mathit{U\!H}$ denoterà il quoziente di $\mathring{H}$ mediante dilatazioni positive. $\mathit{U\!H}$ è detto *sottofibrato orizzontale unitario* di $\mathbb{G}$. La sua fibra generica si identifica con la sfera unitaria $\mathbb{S}^{m_1-1}(\subset \mathbb{R}^{m_1})$ munita dell'usuale misura sferica $\sigma_s^{m_1-1}$. In seguito, se $\pi_W : W \to \mathbb{G}$ è un sottofibrato vettoriale di $T\mathbb{G}$ ed $A \subset \mathbb{G}$, denoteremo con WA la restrizione di W ad A.

La distanza di *Carnot-Carathéodory* d_H relativa a g_H rende $\mathbb{G}$ uno spazio metrico completo in cui ogni coppia di punti si connette con (almeno una) d_H-geodetica.

Ogni gruppo di Carnot è munito di un gruppo ad un parametro di automorfismi $\delta_t : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ $(t > 0)$ che lo rendono un *gruppo omogeneo*. La *dimensione omogenea* di $\mathbb{G}$ è l'intero $Q := \sum_{i=1}^{k} i\, m_i$, coincidente con la *dimensione di Hausdorff* di $(\mathbb{G}, d_H)$ come spazio metrico. Con $\mathcal{H}_c^m$ si indicherà la misura di Hausdorff m-dimensionale relativa a d_H, mentre con $\mathcal{H}_e^m$ quella m-dimensionale Euclidea.

1. – Geometria Integrale nei gruppi di Carnot.

Tutti i risultati di questa sezione possono trovarsi in [2].

DEFINIZIONE 1. – *Se $\Omega \subseteq \mathbb{G}$ è aperto e $f \in L^1(\Omega)$, f ha H-***variazione limitata** *in Ω se $|\nabla^H f|(\Omega) := \sup \left\{ \int_\Omega f\, div_H Y\, \sigma^n : Y \in \boldsymbol{C}_0^1(\Omega, H),\ |Y|_H \leq 1 \right\}$ è finito in Ω. $HBV(\Omega)$ denoterà lo spazio vettoriale delle funzioni di H-variazione limitata in Ω. Dal Teorema di Riesz segue che $|\nabla^H f|$ è una misura di Radon in Ω e che esiste una sezione orizzontale $|\nabla^H f|$-misurabile ν_f tale che $|\nu_f| = 1$ per $|\nabla^H f|$-q.o. $x \in \Omega$ e che $\int_\Omega f\, div_H Y\, \sigma^n = \int_\Omega \langle Y, \nu_f \rangle_H\, d\,|\nabla^H f|$ per ogni $Y \in \boldsymbol{C}_0^1(\Omega, H)$. Un insieme misurabile $E \subset \mathbb{G}$ ha H-perimetro localmente finito in Ω se $\chi_E \in HBV_{loc}(\Omega)$. L'$H$-***perimetro** *di E in Ω è la misura di Radon $|\partial E|_H(\Omega) := |\nabla^H \chi_E|(\Omega)$. Chiamiamo H-***normale generalizzata interna lungo** *∂E la $\mathbb{R}^{m_1}$-misura di Radon $\nu_E := -\nu_{\chi_E}$* (cfr. [1, 2]).

TEOREMA 1. – *Sia S un'ipersuperficie H-regolare nel senso di* [1] *e assumiamo che $S = \partial E$, dove E ha localmente H-perimetro finito e frontiera $\boldsymbol{C}_H^1$. Sia $X \in UH$ una sezione trasversale ad S e sia γ_q^X la curva integrale (detta X-linea) di X di punto iniziale $q \in S$. Assumiamo che $\gamma_q^X(\mathbb{R}) \cap S = q$ per ogni $q \in S$. Infine, sia $\mathcal{D} \subset \mathbb{G}$ un insieme misurabile che sia raggiungibile mediante X-linee che intercettano S. Allora, $\mathcal{D}_q := \gamma_q^X(\mathbb{R}) \cap \mathcal{D}$ è $\mathcal{H}_c^1$-misurabile per $|\partial E|_H$-q.o. $q \in S$. La mappa $S \ni q \longmapsto \mathcal{H}_c^1(\mathcal{D}_q)$ è $|\partial E|_H$-misurabile su S e, se $pr_S^X : \mathbb{G} \to S$ è la proiezione su S lungo γ_q^X, si ha*

$$\mathcal{H}_c^Q(\mathcal{D}) = \int_{pr_S^X(\mathcal{D})} \mathcal{H}_c^1(\mathcal{D}_q)\, |\langle X, \nu_E \rangle_{H_q}|\, d\,|\partial E|_H(q).$$

Si dimostrano inoltre alcune utili conseguenze. Viene data una caratterizzazione delle funzioni *HBV* in termini di restrizioni a fibrazioni 1-dimensionale con X-linee. Diamo poi una caratterizzazione *Integral-Geometrica* della misura H-perimetro, ossia

$$|\partial \mathcal{D}|_H(\Omega) = \frac{1}{2\kappa_{m_1-1}} \int_{UH_{p_0}} \sigma_s^{m_1-1}(X) \int_{pr^X_{\mathcal{I}_{p_0}(X)}(\mathcal{D}\cap\Omega)} var_X^1[\chi_{\mathcal{D}_q^X}](\Omega_q^X)\, \sigma^{n-1}(q),$$

dove $var_X^1[\chi_{\mathcal{D}_q^X}](\Omega_q^X)$ è l'usuale variazione 1-dimensionale su ${\gamma_q^X}^{-1}(\Omega_q^X) (\subset \mathbb{R})$ di $\chi_{\mathcal{D}_q^X} \circ \gamma_q^X$. Qui, $\mathcal{I}_{p_0}(X)$ denota l'iperpiano verticale per $p_0 \in \mathbb{G}$ e g-ortogonale ad $X \in UH$, mentre κ_{m_1-1} denota la misura $m_1 - 1$-dimensionale della palla di $\mathbb{R}^{m_1-1}$. (Notare che: $|\partial \mathcal{I}_{p_0}(X)|_H(\Omega) = \sigma^{n-1}(\mathcal{I}_{p_0}(X) \cap \Omega) = \mathcal{H}_e^{n-1}(\mathcal{I}_{p_0}(X) \cap \Omega)$.) Tale formula consente di ottenere, dopo un'opportuna formulazione geometrica della nozione di

H-convessità, la generalizzazione di un classico teorema di Cauchy. Infatti, vale

$$|\partial\mathcal{D}|_{H}(\mathbb{G}) = \frac{1}{\kappa_{m_1-1}} \int_{U\!H_{p_0}} \sigma^{n-1}(pr^{X}_{\mathcal{I}_{p_0}(X)}(\mathcal{D}))\,\sigma_s^{m_1-1}(X)$$

per ogni H-convesso $\mathcal{D} \subset \mathbb{G}$. Si è poi generalizzata una ben nota formula di Santalò. Più precisamente, se $\mathcal{D} \subset \mathbb{G}$ è un dominio C^{∞}-regolare e $f \in L^1(U\!H\mathcal{D})$, si ha

$$\int_{U\!H\mathcal{D}} f(q;Y)\,d\mu(q;Y) = \int_{U\!H^{+}\partial\mathcal{D}} \int_0^{\ell_p(X)} f(\gamma_p^X(t);X)\,\langle X, \nu_{\mathcal{D}}\rangle_{H_p}\,dt\,d\sigma(p;X),$$

ove $d\mu := \sigma^n \otimes \sigma_s^{m_1-1}$ e $d\sigma := |\partial\mathcal{D}|_H \otimes \sigma_s^{m_1-1}$. $U\!H^{+}\partial\mathcal{D}$ indica l'insieme delle direzioni orizzontali entranti in $\mathcal{D}$ e $\ell_p(X) := \sup\{s \in \mathbb{R}_+ : \gamma_p^X(t) \in \mathcal{D},\ \forall\, t \in (0,s)\}$. Come corollario di questa formula si sono dimostrate alcune stime dal basso per il primo autovalore positivo λ_1 del problema agli autovalori di Dirichlet per il Laplaciano sub-ellittico Δ_H.

2. – Geometria Differenziale delle Ipersuperfici H-regolari.

DEFINIZIONE 2. – *Sia ∇ l'unica connessione di* **Levi-Civita invariante a sinistra** *su $\mathbb{G}$ relativa alla metrica g. Se $X, Y \in C^{\infty}(\mathbb{G}, H)$, poniamo $\nabla^H_X Y := proj_H(\nabla_X Y)$, mentre se $X, Y \in C^{\infty}(\mathbb{G}, V)$ poniamo $\nabla^V_X Y := proj_V(\nabla_X Y)$. ∇^H e ∇^V sono dette* **connessioni parziali**. *∇^H è detta connessione* **orizzontale**, *mentre ∇^V è detta* **verticale**. *Come nel caso Riemanniano, sono immediate le definizioni di gradiente orizzontale e di divergenza orizzontale (rispettivamente verticale).*

Molte questioni della geometria sub-Riemanniana dei gruppi di Carnot si possono convenientemente formulare in termini della connessione orizzontale ∇^H. Come esempio, a partire dalle equazioni di struttura di ∇ si possono dedurre, mediante proiezione su H, le equazioni di struttura di ∇^H (risp. ∇^V).

DEFINIZIONE 3. – *Un'ipersuperficie immersa C^{∞}-regolare $S \subset \mathbb{G}$ è detta* **H-regolare** (1) *o* **non-caratteristica** *se H è ovunque trasversa ad S. L'***insieme caratteristico** *di S, se non è vuoto, è definito come $C_S := \{p \in S : dim\,H_p = dim(H_p \cap T_pS)\}$. Sia ν_H la* **normale orizzontale unitaria** *ad S definita come $\nu_H := \frac{proj_H \nu}{|proj_H \nu|_H}$. La definizione ha senso nel complemento di C_S. Se $p \in S \setminus C_S$, si ha $H_p = (\nu_H)_p \oplus HT_pS$ dove $HT_pS := (\nu_H)_p^{\perp} \cap H_p$. HT_pS è detto* **spazio tangente orizzontale** *in p ad S. Definiamo quindi, nel modo ovvio, i fibrati vettoriali associati $HTS(\subset TS)$ e $\nu_H S$. ∇^H induce su S una connessione parziale $\nabla^{HTS}(:= i_S{}^{*}\nabla^H)$ relativa ad HTS. Indichiamo con div_{HTS} l'operatore di divergenza associato. Su ogni ipersuperficie H-regolare S, la misura H-perimetro è data dall'integrazione di una $n-1$-forma σ_H, detta* **forma H-perimetro**, *definita come $\sigma_H \llcorner S := (\nu_H \lrcorner\, \sigma^n)|_S$.*

D'ora in poi sia $\mathbb{G}$ di passo 2. Se $U \subset \mathbb{G}$ è aperto, poniamo $\mathcal{U} := U \cap S$. Useremo poi la seguente convenzione: $I, J, \ldots = 1, \ldots, n$; $i, j, \ldots = 1, \ldots, m_1$; $\alpha, \beta, \ldots = m_1 + 1, \ldots, n$.

(1) In [1] si definisce H-regolare ogni ipersupersuperficie che sia localmente il luogo degli zeri di una funzione C^1_H (funz. C^1 risp. alle derivazioni in H). Questa nozione differisce da quella di [1] in quanto S è qui supposta C^{∞}-regolare, nel senso usuale.

Si dice *frame adattato ad S in U* ogni frame ortonormale $\underline{\tau} := (\tau_1, ..., \tau_n)$ in U tale che: $(i)\, \tau_1|_{\mathcal{U}} := \nu_H$; $(ii)\, HT_p\mathcal{U} = \mathrm{span}\{(\tau_2)_p, ..., (\tau_{m_1})_p\}$ $(p \in \mathcal{U})$; $(iii)\, \tau_a := X_a$. La $I\!I^a$ *forma fondamentale sub-Riemanniana* di S è la mappa $''s''_H : HTS \times HTS \to \nu_H S$ data da $''s''_H(X, Y) := \langle \nabla^H_X Y, \nu_H \rangle_H\, \nu_H$ $(X,\, Y \in HTS)$. Sia $H \in \nu_H S$ la *curvatura media orizzontale di* S, cioè la traccia di $''s''_H$. Si ha che $H = -\sum_{j=2}^{m_1} \langle \nabla^H_{\tau_j} \nu_H, \tau_j \rangle_H \nu_H$. Poniamo $Ric_H(X) := \sum_{i=2}^{m_1} \langle R(\tau_i, X)\, \tau_i, \nu_H \rangle_H\, \nu_H$ $(X \in \nu_H S)$, dove R è il tensore di curvatura Riemanniana. Denotiamo con C^a gli operatori lineari associati alle matrici delle costanti strutturali $[C^a_{ik}]_{\{i,k=1,...,m_1\}}$.

Se $\mathcal{U} \subset S$ è compatto, assumiamo che $\partial\mathcal{U}$ sia una $\boldsymbol{C}^\infty$-varietà Riemanniana, $n-2$-dimensionale con normale unitaria uscente η. Allora, per ogni $X \in \boldsymbol{C}^\infty(S, HTS)$ vale la seguente formula di *integrazione per parti "orizzontale"*:

$$\int_{\mathcal{U}} div_{HTS} X\ \sigma_H + \int_{\mathcal{U}} \Big\langle \sum_{a=m_1+1,...,n} \nu_a\, C^a \nu_H, X \Big\rangle_H \sigma^{n-1} = \int_{\partial\mathcal{U}} \langle X, \eta \rangle\, |proj_H \nu|_H\, \sigma^{n-2}.$$

Ovviamente, da questa si possono dedurre formule di tipo Green. Otteniamo poi la formula per la *variazione prima* della forma H-perimetro σ_H in $\mathcal{U}$ secondo un arbitrario "vettore variazione" $W \in \mathfrak{X}(U)$. Più precisamente, si ha

$$I_{\mathcal{U}}(\sigma_H) = -\int_{\mathcal{U}} \langle H, \nu_H \rangle_H\, \langle proj_H W, \nu_H \rangle_H\, \sigma_H - \int_{\mathcal{U}} \langle H, \nu_H \rangle_H\, \langle proj_V W, proj_V \nu \rangle\, \sigma^{n-1}$$
$$+ \int_{\partial\mathcal{U}} \langle W, \eta \rangle\, |proj_H \nu|_H\, \sigma^{n-2},$$

dove σ^{n-2} è l'usuale misura Riemanniana su $\partial\mathcal{U}$. Infine, si sono provate le formule per la *variazione seconda* della forma H-perimetro. In particolare, la variazione seconda di σ_H nell'interno di $\mathcal{U}$, lungo la direzione dell'H-normale ν_H, è data da

$$I\!I^{int}_{\mathcal{U}}(\sigma_H) = \int_{\mathcal{U}} \Big\{ -\partial_{\nu_H} \langle W, \nu_H \rangle\, \langle H, W \rangle_H + \langle H, W \rangle_H^2 - \langle Ric_H W, W \rangle +$$
$$+ |W|_H{}^2 \sum_{h \neq j = 2,...,m_1} \sum_{L \neq 1, j} \Big[\langle \nabla_{\tau_h} \tau_j, \nu_H \rangle [\langle \nabla_{\tau_j} \tau_h, \nu_H \rangle - \langle \nabla_{\tau_j} \tau_h, \tau_j \rangle] + \langle \nabla_{\nu_H} \tau_L, \tau_j \rangle \langle \nabla_{\tau_j} \tau_L, \nu_H \rangle \Big] \Big\}\, \sigma_H,$$

dove si è assunto che $W(p) \in (\nu_H)_p\, \mathcal{U}$ $(p \in \mathcal{U})$, e che $\mathrm{spt} W \cap \mathcal{U} \Subset \mathcal{U}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] Franchi B., Serapioni R. - Serra Cassano F., *Regular hypersurfaces, intrinsic perimeter and implicit function theorem in Carnot groups*, Comm. Anal. Geom., **11** (2003), 909-944.

[2] Montefalcone F., *Some relations among volume, intrinsic perimeter and one-dimensional restrictions of BV functions in Carnot groups*, Ann. Sc. Norm. Sup. Cl. Sci. (in corso di stampa).

Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Bologna
e-mail: montefal@dm.unibo.it
Dottorato di Ricerca in Matematica (sede amministrativa: Bologna) - Ciclo XVI
Direttore di ricerca: Prof. Bruno Franchi, Università degli Studi di Bologna