Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Veronica Piccialli

Metodi per la soluzione di problemi di ottimizzazione a variabili miste

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **8-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2005), n.3-1, p. 605–608.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_3-1_605_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2005.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VIII-A, Dicembre 2005/1, 605-608

Metodi per la soluzione di problemi di ottimizzazione a variabili miste

VERONICA PICCIALLI

Molti problemi del mondo reale possono essere formulati come problemi di ottimizzazione con variabili sia intere che continue. In particolare, l'argomento di questa tesi è la soluzione di una classe di problemi a variabili miste. Tale classe è molto difficile da risolvere, ma molto importante e presenta le seguenti caratteristiche:

(i) alcune variabili discrete del problema sono categoriche. Per variabili categoriche si intende variabili che assumono valori appartenenti ad una lista non ordinata. Alcuni esempi sono variabili rappresentanti un colore, un materiale o una forma. Queste variabili sono in genere rappresentate come numeri discreti, ma questa rappresentazione è priva di significato. Di conseguenza queste variabili non possono assumere valori intermedi, in quanto in corrispondenza di questi valori la funzione obiettivo e/o i vincoli del problema possono non essere definiti. Questo aspetto implica che durante il processo di soluzione queste variabili sono vincolate ad assumere sempre valori ammissibili e quindi non si possono utilizzare procedure standard di rilassamento;

(ii) il numero di variabili ed il numero di vincoli non sono fissati, ma sono essi stessi parte delle variabili del problema. In particolare, queste grandezze sono rappresentate tramite un vettore di variabili intere, chiamate variabili dimensionali. Il valore di queste variabili determina il numero delle altre variabili, il numero di vincoli e la struttura dell'intero problema. Anche in questo caso, durante il processo di soluzione il vincolo di interezza per queste variabili non può essere rilassato;

(iii) la funzione obiettivo e i vincoli non soddisfano nessuna ipotesi di convessità e questo complica il processo di minimizzazione. In partiolare ciò implica anche che il problema continuo ottenuto fissando le variabili discrete può essere difficile da risolvere, rendendo complessa l'individuazione di limitazioni inferiori sul valore dell'ottimo.

Più formalmente, il vettore delle variabili di decisione della classe di problemi considerata è così costituito:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

dove $z \in \mathcal{Z}^{n_z}$ è il vettore di variabili dimensionali, $y \in \mathcal{Z}^{n_y(z)}$ è il vettore di variabili discrete (categoriche comprese), e $x \in \Re^{n_x(z)}$ è il vettore delle variabili continue.

La classe di problemi che consideriamo ha la seguente formulazione matematica:

$$\begin{aligned} \min\ & f(x, y, z) \\ & z \in \mathcal{F}_z \\ & y \in \mathcal{F}_y(z) \\ & x \in \mathcal{F}_x(y, z) \end{aligned} \tag{1}$$

dove $\mathcal{F}_z \subseteq \mathcal{Z}^{n_z}$, $\mathcal{F}_y(z) \subseteq \mathcal{Z}^{n_y(z)}$, $\mathcal{F}_x(y, z) \subseteq \Re^{n_x(z)}$ e $f(\cdot, z) : \Re^{n_x(z)} \times \mathcal{Z}^{n_y(z)} \to \Re$.

Notiamo che le variabili dimensionali determinano sia il numero delle altre variabili che la struttura dell'insieme ammissibile delle variabili discrete y, mentre l'insieme ammissibile delle variabili continue dipende sia dalle variabili dimensionali z che dalle variabili discrete y.

I metodi standard di soluzione per problemi a variabili miste non possono essere utilizzati per risolvere in maniera efficiente il Problema (1), che presenta le caratteristiche (i)-(iii). Per questo motivo lo studio di nuovi metodi di soluzione per questa classe di problemi è di grande interesse.

Il primo passo è stato quello di ridefinire alcuni concetti base come quello di minimo locale (concetto mutuato da [2]) e quello di punto stazionario in modo tale da poter condurre un'analisi teorica appropriata.

Recentemente è stato proposto un primo schema di algoritmo per una sottoclasse del problema (1), per cui si dimostra sotto opportune ipotesi la convergenza a punti stazionari ([2], [1]). L'idea alla base di questo schema algoritmico è quella di alternare una ricerca locale rispetto alle variabili continue e una ricerca locale rispetto alle variabili intere. In particolare, il metodo descritto in [2] considera il caso particolare in cui l'insieme ammissibile delle variabili continue è costituito da vincoli di box ed utilizza una ricerca locale continua basata sul metodo pattern search introdotto in [5]. Questo approccio viene poi esteso in [1] al caso di funzioni non smooth e insiemi ammissibili più generali con risultati di convergenza più deboli.

In questa tesi, traendo ispirazione dall'approccio proposto in [2], viene proposto uno schema algoritmico molto generale per la soluzione dell'intera classe di problemi descritta dalla (1). Questo schema algoritmico tratta esplicitamente le variabili dimensionali e non fa nessuna ipotesi sulla struttura degli insiemi ammissibili. Viene dimostrata la convergenza globale dello schema algoritmico generale ad un punto stazionario senza specificare esattamente la procedura di ricerca locale utilizzata, ma solo le proprietà minime che essa deve soddisfare.

Partendo da questo schema, si possono derivare nuovi algoritmi per la soluzione di specifiche istanze del problema (1) che sfruttino la struttura specifica dell'istanza stessa utilizzando la ricerca locale più adatta alle caratteristiche del problema considerato. Come esempi, in questa tesi sono stati sviluppati tre diversi algoritmi:

– due metodi che utilizzano le derivate prime per la soluzione di problemi (1) nel caso particolare

$$\begin{aligned} \min f(x, y, z) & \\ z \in \mathcal{F}_z & \\ y \in \mathcal{F}_y(z) & \\ x \in \Re^{n_x(z)} & \end{aligned} \tag{2}$$

dove il numero di variabili continue $n_x(z)$ è molto grande e $\mathcal{F}_x = \Re^n$. In questo caso, per valori fissati delle variabili discrete si ottiene un problema di ottimizzazione non vincolato a grandi dimensioni. Traendo ispirazione dai metodi utilizzati in letteratura per questo tipo di problemi, il primo algoritmo proposto utilizza al suo interno una ricerca locale che fa uso di una ricerca di linea di tipo Armijo lungo una direzione «gradient related»([3]), mentre il secondo utilizza una ricerca locale derivata da un approccio di tipo gradiente coniugato non lineare ([4]). Per entrambi gli algoritmi è dimostrato che le ricerche locali scelte soddisfano le proprietà necessarie a garantire la convergenza dell'intero algoritmo ad un punto stazionario del problema (2).

– un metodo che non fa uso di derivate per la soluzione di problemi (1) nel caso in cui l'insieme ammissibile delle variabili continue è costituito da vincoli lineari

$$\begin{aligned} \min f(x, y, z) & \\ z \in \mathcal{F}_z & \\ y \in \mathcal{F}_y(z) & \\ A(y, z)z \leq b(y, z) & \end{aligned} \tag{3}$$

con $A(y, z) \in \Re^{m(y,z) \times n_x(z)}$ and $b(y, z) \in \Re^{m(y,z)}$. Si assume inoltre che non si abbia a disposizione un'espressione analitica della funzione obiettivo o quanto meno non sia possibile calcolarne la derivata. In questo caso la ricerca locale è basata su una ricerca di linea che non fa uso di derivate per problemi continui con vincoli lineari ([6]).

Nella tesi viene inoltre considerato un particolare problema reale, riguardante la progettazione ottima di un apparato per la risonanza magnetica che abbia un'elevata uniformità del campo magnetico, pur avendo piccole dimensioni. Questo problema può essere formulato come un problema (3) in cui le variabili continue presentano vincoli lineari e la funzione obiettivo è il frutto di una simulazione dell'andamento del campo magnetico. Non si hanno quindi a disposizione le derivate.

Su questo problema è stato applicato l'algoritmo proposto che non fa uso di derivate con risultati che dimostrano l'efficacia dell'approccio.

BIBLIOGRAFIA

[1] ABRAMSON M. A., *Pattern Search Algorithms for Mixed Variable General Constrained Optimization Problems*, PhD Thesis, Department of Computational and Applied Mathematics, Rice University (August, 2002).

[2] Audet C. e Dennis J. E., *Pattern Search Algorithms for Mixed Variable Programming*, SIAM Journal on Optimization, **11** (2001), 573-594; L. Grippo and S. Lucidi.
[3] Bertsekas D. P., *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods*, Academic Press, New York (1982).
[4] Grippo L. e Lucidi S., *A globally convergent version of the Polak-Ribière conjugate gradient method*, Mathematical Programming, **78** (1997), 375-391.
[5] Lewis R. M. e Torczon V., *Pattern search methods for linearly constrained minimization*, SIAM Journal on Optimization, **10** (2000), 917-941.
[6] Lucidi S., Sciandrone M. e Tseng P., *Objective-derivative-free methods for constrained optimization*, Mathematical Programming, **92(1)** (2002), 37-59.

Dipartimento di Informatica e Sistemistica «Antonio Ruberti»,
Università degli Studi di Roma «La Sapienza»
e-mail: piccialli@dis.uniroma1.it
Dottorato in Ricerca Operativa (sede amministrativa: Dipartimento di Statistica, Probabilità e Statistiche Applicate, Università degli Studi di Roma «La Sapienza») - Ciclo XVI
Direttore di Ricerca: prof. Stefano Lucidi,
Università degli Studi di Roma «La Sapienza»