BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

ERMANNA PIRAS

Stime di decadimento spaziali per alcune classi di continui

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **8-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2005), n.3-1, p. 613–616.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_3-1_613_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2005.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VIII-A, Dicembre 2005/1, 613-616

Stime di decadimento spaziali per alcune classi di continui

ERMANNA PIRAS

1. – Premessa.

In questa tesi studiamo stime di decadimento spaziali per l'energia per alcune classi di continui.

Tali stime sono molto importanti in quanto forniscono una descrizione qualitativa dell'andamento della soluzione di un determinato problema al contorno. In molti casi da tali stime si possono dedurre stime puntuali per la soluzione. Inoltre, sono anche utili nei teoremi di esistenza dal momento che forniscono informazioni sulla regolarità all'infinito della soluzione.

Possono essere presi in esame diversi tipi di funzionali energia: energia cinetica, energia di dissipazione, energia libera: la scelta è condizionata dal tipo di mezzo che si considera.

Si suppone che il continuo occupi una regione di R^3 del tipo

$$\Omega = \{\boldsymbol{x} \in R^3 : (x_1, x_2) \in \Sigma; x_3 \in (0, L)\} \tag{1}$$

oppure

$$\Omega = \{\boldsymbol{x} \in R^3 : (x_1, x_2) \in \Sigma; x_3 \in (0, +\infty)\} \tag{2}$$

dove $\Sigma \subset R^2$ con frontiera $\partial\Sigma$ sufficientemente regolare.

2. – Contenuti.

Il Primo capitolo tratta di dinamica dei solidi, mentre il secondo e il terzo di fluidodinamica. Il continuo occupa una regione dello spazio del tipo 1 o 2.

Nel capitolo 1 consideriamo un solido viscoelastico micropolare in condizioni dinamiche. Come è noto, i solidi viscoelastici micropolari sono materiali con memoria in cui sono presenti coppie di massa e di contatto. Questo implica che il tensore degli sforzi non sia simmetrico e diventa necessario introdurre due nuovi campi : il vettore di microrotazione e il in tensore degli sforzi di coppia [6]. Nel nostro studio facciamo uso di un'Energia Libera Massimale [2], [8], che ci permette di imporre restrizioni deboli sulle funzioni di rilassamento. In questo modo, otteniamo risultati migliori di quelli di [4]. Innanzitutto supponendo che il continuo occupi un dominio del tipo

$$\Omega = \{\boldsymbol{x} \in R^3 : (x_1, x_2) \in \Sigma(x_3), x_3 \geq 0\}$$

dove $\Sigma(x_3)$, per ogni $x_3 \geq 0$ è dominio non vuoto, limitato di R^2, tale che $\partial\Sigma(x_3)$ è sufficientemente regolare e che i dati al contorno siano non nulli solo sulla base $\Sigma(0)$, stimiamo tramite i dati, per ogni $t > 0$, l'energia della porzione di solido a distanza maggiore di z da $\Sigma(0)$ ($g_t(z)$) e la sua norma in $L^1(0,t)(G_t(z))$, ossia

$$g_t(z) = \int\limits_{z}^{+\infty} \int\limits_{\Sigma(x_3)} W(\boldsymbol{x}, t) d\Omega$$

$$G_T(z) = \int\limits_{0}^{t} g_\tau(z) d\tau$$

dove t è un arbitrario istante temporale.

Inoltre dimostriamo che, se esiste qualche $z_0 > 0$ tale che le storie passate si annullano su $\Sigma(z)$ con $z \geq z_0$, allora per ogni $t > 0$ fissato i punti (x_1, x_2, z) con $z - z_0 \geq Vt$ sono fermi, mentre per $z - z_0 \leq Vt$, $G_t(z)$ decade secondo il fattore $z - z_0$, e il fattore di decadimento è dato da $\left(1 - \dfrac{z - z_0}{Vt}\right)$. V è una costante positiva calcolabile che dipende dalle funzioni di rilassamento, la densità di massa e il tensore di microinerzia. Infine questi risultati sono stati estesi a domini più generali sotto l'ipotesi che i dati iniziali e al contorno abbiano supporto compatto nell'intervallo $[0, T]$.

Il metodo che usiamo è stato introdotto in [10] e successivamente sviluppato in [3] per l'elastodinamica, in [1] per la piezoelettricità e in [2] per la viscoelasticità non - polare.

I restanti capitoli trattano del problema dell'entry flow per i fluidi. Ciò richiama uno dei classici problemi della teoria laminare del flusso: lo sviluppo di profili di velocità nella regione interna di cilindri finiti o semi infiniti. Così, ad esempio, quando un fluido viscoso incomprimibile scorre in un tubo circolare, il profilo della velocità si evolve fino a trasformarsi, sufficientemente lontano dalla base, nel ben noto flusso parabolico di Hagen-Poiseuille.

Nel capitolo secondo trattiamo un fluido non-newtoniano, ossia un fluido di Bingham, il cui modello può ragionevolmente descrivere il comportamento reologico di alcuni oli o sedimenti che sono utilizzati nei processi di estrazione del petrolio [9]. Tali materiali sono caratterizzati da uno sforzo limite al di sotto del quale non avviene alcuna deformazione. In altre parole esiste una soglia al di sopra della quale il mezzo di Bingham inizia a fluire come un fluido non-Newtoniano [5]. Ecco perché un materiale di Bingham è di solito chiamato «fluido di Bingham», anche se non è propriamente un fluido. In pratica, si possono osservare zone rigide all'interno del continuo dove la norma della parte deviatorica del tensore degli sforzi è minore o uguale al valore $\sqrt{2}g$: quando g

cresce, tali zone rigide diventano più grandi fino a bloccare completamente il flusso. Noi consideriamo il classico problema dell'entry flow per un fluido di Bingham, in condizioni stazionarie, occupante un cilindro finito o semi -infinito di sezione arbitraria.

Il problema che trattiamo è nuovo per i fluidi di Bingham. Esso tratta dell'«end effect», considerando il confronto tra due moti: il moto base di Hagen-Poiseuille e un altro moto avente lo stesso flusso. Il tipo di decadimento che troviamo è basato su una condizione di piccolezza sul numero di Reynold's R tramite condizioni sul numero di Bingham B, il gradiente di pressione del moto di Poiseuille e le proprietà geometriche della sezione del cilindro. Infine, per rendere la stima più significativa, forniamo una stima superiore tramite i dati del problema per l'energia totale del fluido, nel caso di un cilindro semi-infinito.

Nel capitolo 3 consideriamo un fluido micropolare. Questo modello è alquanto utile in matematica applicata: fluidi biologici, sospensioni polimeriche, cristalli liquidi con molecole rigide, fluidi fangosi sono solo alcuni esempi di continui che possono essere rappresentati tramite il modello matematico dei fluidi micropolari.

Fisicamente questi fluidi schematizzano dei continui che consistono di molecole rigide orientate a caso, sospese in un mezzo viscoso, aventi un moto intrinseco di rotazione, descritto dal vettore di microrotazione e dal tensore di microinerzia. Tali materiali sono soggetti a coppie di massa e di contatto cosicché il tensore degli sforzi non è simmetrico e un nuovo tensore degli sforzi deve essere introdotto: il tensore degli sforzi di coppia [7]. In questo capitolo consideriamo un fluido micropolare in condizioni stazionarie occupante un cilindro di sezione arbitraria e lunghezza semi-infinita. Come nel capitolo 2, trattiamo il problema dell'«end effect», considerando il confronto tra due moti: il moto base di Poiseuille e un altro moto con lo stesso flusso. Questo problema è nuovo in letteratura.

Infine forniamo una stima tramite i dati del problema per l'energia totale.

BIBLIOGRAFIA

[1] BORRELLI A., PATRIA M. C., *Spatial energy estimates in dynamical problems for a semi-infinite piezoelectric beam*, IMA J. Appl. Math., **64** (2000), 73-93.

[2] CHIRITA S., CIARLETTA M., FABRIZIO M., *Saint Venant's Principle in Linear Viscoelasticity*, Int. J. Engng Sci., **35** (1997), 1221-1236.

[3] CHIRITA S., QUINTANILLA R., *On Saint Venant's Principle in Linear Elastodynamics*, J. Elast., **42** (1996), 201-215.

[4] DE CICCO S., NAPPA L., *On Saint Venant principle for Micropolar Viscoelastic bodies*, Int. J. Engng Sci., **37** (1999), 883-893.

[5] DUVAUT G., LIONS J. L., *Les inéqualions en mécanique et en physique, Dunod, Paris* (1972).

[6] ERINGEN A. C., *Linear theory of Micropolar Viscoelasticity*, Int. J. Engng. Sci., **5** (1967), 191-204

[7] ERINGEN A. C., *Theory of Micropolar fluids*, J. of Math. Mech., **16** (1966), 1-18.

[8] FABRIZIO M., GIORGI C., MORRO A., *Internal dissipation, Relaxation property and Free Energy in materials with fading memory,* J. of Elasticity **40** (1995), 107-122.
[9] FASANO A. Editor, *Complex flow in industrial processes, Birkhäuser* (2000).
[10] FLAVIN J. N., KNOPS R. J., PAYNE L. E., *Energy bounds in dynamical problems for a semi-infinite elastic beam*, Elasticity: Math Methods and Applications, Eds. G. Eason e R. W. Hogden, Ellis Horwood, Cichester (1990), 101-111.

Via Castello d'amore 2/c, 31100 Treviso
e-mail: piras@dm.unife.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Ferrara) - Ciclo XVI
Direttore di Ricerca: Prof. Borrelli Alessandra, Università di Ferrara