Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Giovanni Pisante

Equazioni differenziali implicite: differenti metodi di approccio

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **8-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2005), n.3-1, p. 617–620.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_3-1_617_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2005.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VIII-A, Dicembre 2005/1, 617-620

Equazioni differenziali implicite: differenti metodi di approccio

GIOVANNI PISANTE

1. – Introduzione.

Negli ultimi anni l'analisi non lineare ha suscitato un interesse crescente nella comunità scientifica e le equazioni differenziali non lineari sono considerate uno dei più utili strumenti dell'analisi moderna. Oggetto di questa nota è lo studio di alcuni aspetti del problema di Dirichlet relativo ad una classe di tali equazioni, quelle espresse in forma implicita. Al fine di massimizzare la chiarezza espositiva e di evitare che troppi dettagli tecnici rendano complicata la comprensione delle idee e delle tecniche dimostrative, ci limiteremo ad analizzare il seguente problema modello, rimandando alla tesi per la discussione delle varie possibili generalizzazioni,

$$\begin{cases} F(D\boldsymbol{u}(x)) = 0 & \text{in } \ \Omega \subset \boldsymbol{R}^m \\ \boldsymbol{u}(x) = \varphi(x) & \text{su } \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Il problema (1) è stato studiato a lungo usando differenti tecniche, partendo dalla teoria delle equazioni di Hamilton-Jacobi (nel caso scalare i.e. se $m = 1$), fino ad arrivare ad utilizzare metodi basati sull'analisi convessa e l'analisi funzionale. In definitiva, trascurando alcuni metodi sviluppati ad hoc per risolvere esempi particolari, in letteratura troviamo tre metodi generali per stabilire l'esistenza di soluzioni di (1): il metodo delle categorie di Baire, quello dell'integrazione convessa di Gromov e quello delle soluzioni di viscosità. I primi due metodi sono sufficientemente flessibili da poter essere applicati al caso vettoriale ed i risultati che si possono ottenere con tali metodi sono essenzialmente gli stessi, entrambi ci permettono di stabilire delle condizioni sufficienti per l'esistenza di una soluzione del problema (1), senza fornire nessun'altra informazione su tale soluzione. Il terzo metodo, anche se sviluppato solo per le equazioni scalari, permette di stabilire, in molti casi, non solo l'esistenza di una soluzione, ma anche notevoli proprietà di quest'ultima, quali l'unicità, la massimalità e, sotto opportune ipotesi, una formula esplicita in funzione del dato al bordo.

Nel seguente paragrafo analizzeremo alcuni particolari del metodo delle categorie di Baire, mostrando come sfruttare lo stretto legame tra le equazioni implicite e le inclusioni differenziali e vedremo sotto quale tipo di condizioni è possibile risolvere (1). Il paragrafo 3. sarà invece dedicato alla discussione di alcune condizioni geometriche che garantiscono l'esistenza di una soluzione di viscosità di (1).

2. – Il metodo delle categorie di Baire e le inclusioni differenziali.

La prima applicazione del lemma di Baire alle equazioni differenziali si deve a Cellina, che nel 1981 dimostrò la densità dell'insieme delle soluzioni Lipschitz dell'equazione eikonale unidimensionale. L'idea venne poi sviluppata, estesa ed applicata in diversi contesti da vari autori (vedi [2] e la biografia contenuta). Lo scopo di questo paragrafo è di spiegare a grandi linee quali sono gli strumenti necessari alla dimostrazione dell'esistenza di soluzioni di (1).

Il primo passo consiste nell'osservare che le equazioni differenziali implicite sono strettamente legate alle inclusioni differenziali, ad esempio, il problema modello (1) può essere facilmente riformulato sotto forma di inclusione differenziale come

$$\begin{cases} D\boldsymbol{u}(x) \in E & \text{in } \Omega \\ \boldsymbol{u}(x) = \varphi(x) & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

dove con E si è indicato l'insieme degli zeri della funzione F. Supponiamo inoltre che E sia compatto e che $\varphi \in Aff_{piec}(\overline{\Omega};\boldsymbol{R}^m)$ (i.e. φ è affine a tratti).

Il secondo passo consiste nel definire uno spazio metrico completo $\overline{V} \subset \varphi + W_0^{1,\infty}(\Omega;\boldsymbol{R}^m)$ e una famiglia numerabile di suoi sottoinsiemi V_k aperti e densi in $\overline{V}$ in modo tale che l'intersezione $\bigcap\limits_{k\in\boldsymbol{N}} V_k$ sia contenuta nell'insieme delle soluzioni del problema (2). Il problema dell'esistenza di tali spazi viene ricondotto alla ricerca di un insieme $K \subset \boldsymbol{R}^{m\times n}$ tale che, definiti $\overline{V}$ come la chiusura in $L^\infty(\Omega;\boldsymbol{R}^m)$ di

$$V = \left\{u \in Aff_{piec}\left(\overline{\Omega};\boldsymbol{R}^m\right) : u = \varphi \text{ su } \partial\Omega \text{ e } Du(x) \in E \cup K\right\}$$

e

$$V^k = \operatorname{int}\left\{u \in \overline{V} : \int\limits_{\Omega} \operatorname{dist}(Du(x);E)dx \leq \frac{1}{k}\right\},$$

si abbia $\overline{V}$ non vuoto e V^k denso nello spazio metrico completo $\overline{V}$ dotato della distanza L^∞.

Sotto tali ipotesi, se φ verifica la condizione di compatibilità $D\varphi(x) \in E \cup K$ per q.o. x in Ω, si ha, per il teorema delle categorie di Baire, che

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} V^k \subset \left\{u \in \overline{V} : \operatorname{dist}(Du(x),E) = 0, \text{ q.o. in } \Omega\right\} \subset \overline{V}$$

è denso, e quindi non vuoto, in $\overline{V}$. L'esistenza di soluzioni $W^{1,\infty}(\Omega)$ per (2) segue quindi dalla compattezza di E.

Affinchè tale procedura sia applicabile, bisogna trovare delle condizioni sull'insieme K che assicurino le proprietà richieste per $\overline{V}$ e V_k. Nel caso scalare la condizione ottimale risulta essere $K = \operatorname{int}(\operatorname{co}E)$ (l'interno dell'inviluppo convesso dell'insieme E), mentre nel caso di inclusioni vettoriali non si conosce una caratterizzazione altrettanto elegante e semplice per K. Considerando che nell'ambito di problemi variazionali vettoriali la nozione di convessità, che risulta essere ottimale nel caso scalare, viene sostituita da quella di quasiconvessità, ci si aspetta di poter descrivere K in termini dell'inviluppo quasiconvesso di E. Purtroppo a causa della difficoltà nella comprensione della condizione di quasiconvessità, sussistono ancora molti dubbi su quale possa essere una definizione coerente per tale inviluppo. Di conseguenza è stata introdotta la cosiddetta *proprietà di rilassamento*. In parole povere, K gode della proprietà di rilassamento rispetto ad E ($K \overset{R}{\sim} E$), se ogni funzione affine con gradiente in K può essere approssimata, senza modificare il valore al bordo, in $W^{1,\infty}(\Omega) - debole*$ con funzioni affini a tratti con gradiente q.o. in $E \cup K$ e arbitrariamente vicino ad E in norma L^1 per ogni aperto limitato $\Omega \in \mathcal{R}^n$. Vale la pena ricordare che int(co$E$) $\overset{R}{\sim} E$. Inoltre, se $K \overset{R}{\sim} E$ allora $K \subset \overline{\mathrm{Qco(E)}}$ ([1]).

In conclusione un esempio di teorema di esistenza a cui si può giungere utilizzando questo metodo è

TEOREMA 1. – *Sia $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n$ un aperto limitato, siano E compatto e K limitato sottoinsiemi di $\boldsymbol{R}^{m\times n}$ tali che $K \overset{R}{\sim} E$. Se $\varphi \in Aff_{piec}(\overline{\Omega}; \boldsymbol{R}^m)$ verifica la condizione di compatibilità $D\varphi(x) \in E \cup K$ per q.o. x in Ω, allora esiste un insieme denso di soluzioni di* (2).

In letteratura l'applicazione del metodo delle categorie di Baire per la risoluzione di problemi differenziali del tipo (1) richiedeva l'ipotesi di quasiconvessità della funzione F, in quanto una diversa definizione degli insiemi V_k costringeva ad utilizzare argomenti di semicontinuità inferiore di funzionali integrali involventi la F per dimostrarne la densità (vedi [2]). In questo contesto, la quasiconvessità della F non gioca un ruolo fondamentale in quanto, utilizzando piuttosto proprietà fini di continuità dell'operatore gradiente, si richiede come unica ipotesi che l'insieme E degli zeri di F sia compatto.

3. – Soluzioni di viscosità e geometrie compatibili.

Come abbiamo già osservato l'approccio astratto finora descritto non fornisce alcuna informazione sulla soluzione a parte l'esistenza, inoltre, come si evince dal Teorema 1 l'insieme delle soluzioni potrebbe essere sufficientemente grande da contenere infinite soluzioni, per cui sorge il problema di selezionarne una che sia in qualche senso privilegiata rispetto alle altre. Se ci restringiamo al caso di problemi scalari, un possibile criterio di selezione potrebbe essere quello di cercare, tra le soluzioni di (1) ottenute con il metodo delle categorie, quella che sia soluzione di viscosità (qualora tale soluzione esista).

Purtroppo tale selezione risulta essere non sempre appropriata, come mostrato in [1], dove gli autori confrontano sotto opportune ipotesi i due metodi (quello delle categorie di Baire e quello di viscosità). L'approccio via viscosità risulta infatti essere troppo restrittivo e non sempre applicabile come criterio di selezione, tuttavia gli strumenti utilizzati in [1] risultano essere utili per ottenere risultati interessanti sull'esistenza di soluzioni di viscosità del problema (1), indipendentemente dall'applicabilità di altri metodi astratti.

In particolare si possono dedurre condizioni di compatibilità sul dominio Ω, sul dato al bordo φ e su F sufficienti e, in alcuni casi, necessarie per l'esistenza di soluzioni di viscosità.

([1]) Con l'espressione $\overline{\mathrm{Qco(E)}}$ si indica la chiusura dell'inviluppo quasiconvesso di E, che risulta, al contrario dell'inviluppo stesso, essere ben definita.

Per avere un'idea del tipo di risultati ottenuti consideriamo il problema (1) restringendoci al caso in cui $\varphi = 0$, Ω è un aperto convesso di $\boldsymbol{R}^n$ e $F(0) \leq 0$. In tali ipotesi (2), una condizione necessaria e sufficiente affinchè il metodo di viscosità possa essere utilizzato come criterio di selezione è

- (G1) $\forall\, y \in \partial\Omega$ dove le normale interna a $\partial\Omega$, $\upsilon(y)$, è ben definita, esiste un unico $\lambda(y) > 0$ tale che

$$\lambda(y)\upsilon(y) \in E;$$

in altre parole, la normale interna alla frontiera di Ω nei punti in cui è ben definita deve puntare sempre in una direzione contenuta nell'insieme degli zeri dell'hamiltoniana F (vedi [1]).

Tale risultato mostra che l'esistenza di soluzioni di viscosità di (1) dipende fortemente da relazioni geometriche tra il dominio Ω ed il dato al bordo φ. Investigando tali relazioni la condizione (G1) può essere generalizzata per ottenere condizioni sufficienti (ed in alcuni casi necessarie) per l'esistenza di soluzioni di viscosità nel caso in cui il domini Ω sia non convesso o indebolendo le condizioni di regolarità sul dato al bordo.

Un idea di come viene generalizzata la condizione (G1) si può avere osservando ancora una volta il caso in cui il dato al bordo è nullo ma il dominio Ω non è convesso. In tal caso, la condizione (G1) viene sostituita da

- (G2) $\forall\, y \in \partial\Omega$ dove $N_\Omega(y) \neq \emptyset$, $\forall \upsilon \in N_\Omega(y)$ esiste un unico $\lambda_\upsilon > 0$ tale che

$$\lambda_\upsilon\, \upsilon \in E$$

dove con $N_\Omega(y)$ si denota il cono normale interno a $\partial\Omega$ nel punto y;

in altre parole per ogni punto della frontiere di Ω tutte le direzioni contenute nel cono normale interno devono appartenere all'insieme delle direzioni contenute nell'insieme degli zeri dell'Hamiltoniana F.

Infine vale la pena osservare che la dimostrazione dell'esistenza della soluzione è costruttiva e ciò permette di fornirne una formula esplicita per la soluzione.

BIBLIOGRAFIA

[1] CARDALIAGUET P., DACOROGNA B., GANGBO W. and GEORGY N., *Geometric restrictions for the existence of viscosity solutions*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, **16(2)**, 1999.

[2] DACOROGNA BERNARD and MARCELLINI PAOLO, *Implicit partial differential equations*, volume 37 of *Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1999.

Dipartimento di Matematica «R. Caccioppoli», Università«Federico II» di Napoli
e-mail: pisante@unina.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Napoli) - Ciclo XV
Direttore di ricerca: Prof. Angelo Alvino, Università «Federico II» di Napoli

(2) Più alcune ipotesi tecniche su F.