BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

RAFFAELLA SERVADEI

Metodi di Passo Montano e Linking per disequazioni variazionali semilineari ellittiche: risultati di esistenza, stabilità e molteplicità

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **8-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2005), n.3-1, p. 637–640.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_3-1_637_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2005.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VIII-A, Dicembre 2005/1, 637-640

Metodi di Passo Montano e Linking per disequazioni variazionali semilineari ellittiche: risultati di esistenza, stabilità e molteplicità

RAFFAELLA SERVADEI

Questa tesi riguarda lo studio di disequazioni variazionali semilineari ellittiche: vengono presentati dei risultati di esistenza (vedi [4] e [5]), stabilità (vedi [3]) e molteplicità (vedi [2]) di soluzioni ottenuti utilizzando metodi variazionali. In particolare si applicano metodi di Passo Montano e Linking a funzionali illimitati dall'alto e dal basso per i quali non esistono massimi e minimi locali non banali.

Precisamente si considera la seguente classe di disequazioni variazionali semilineari ellittiche

$$(\mathcal{P})\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \quad u \leq \psi \ \text{ in } \ \Omega \\ \langle Au, v-u\rangle - \lambda \int_\Omega u(x)(v-u)(x)dx \geq \int_\Omega p(x,u(x))(v-u)(x)dx \\ \forall\, v \in H_0^1(\Omega), \quad v \leq \psi \ \text{ in } \ \Omega, \end{cases}$$

dove Ω è un aperto limitato di $\mathcal{R}^N$, $N \geq 1$, con frontiera $\partial\Omega$ sufficientemente regolare, λ è un parametro reale, A è un operatore uniformemente ellittico, ψ è una funzione di $H^1(\Omega)$ tale che $\psi_{|\partial\Omega} \geq 0$ e la nonlinearità p verifica opportune condizioni di crescita superlineare e sottocritica a zero e a infinito (la funzione $p(x,\xi)$ si comporta come $\xi \mid \xi \mid^{s-1}$, con $s > 1$, se $N = 1, 2$ e $1 < s < 2^* - 1$, se $N \geq 3$, dove $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ è l'esponente critico).

1. – Esistenza.

Scopo di questa tesi è stato considerare un approccio completamente nuovo rispetto a quello utilizzato nei lavori già noti in letteratura per lo studio di disequazioni variazionali. I principali strumenti usati per trovare soluzioni non banali del problema $(\mathcal{P})$ sono il classico metodo di penalizzazione, introdotto da Bensoussan e Lions per studiare il caso lineare, e alcuni teoremi di minimax (precisamente il Teorema del Passo Montano, se $\lambda < \lambda_1$, e il Teorema del Linking, se $\lambda \geq \lambda_1$, dove λ_1 è il primo autovalore dell'operatore A con condizioni di Dirichlet omogenee).

Il metodo di penalizzazione consiste nel considerare una famiglia di equazioni penalizzate associate in modo standard al problema $(\mathcal{P})$ e nel trovare le soluzioni per tali equazioni. I problemi penalizzati che vengono considerati in questa tesi sono i seguenti:

$$(\mathcal{P}_\varepsilon)\begin{cases} u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \\ \langle Au_\varepsilon, v\rangle - \lambda \int\limits_\Omega u_\varepsilon(x)v(x)dx + \dfrac{1}{\varepsilon}\int\limits_\Omega (u_\varepsilon - \psi)^+(x)v(x)dx = \int\limits_\Omega p(x, u_\varepsilon(x))v(x)dx \\ \forall\, v \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

dove $\varepsilon > 0$ è il parametro di penalizzazione.

Si cercano soluzioni di tali equazioni mediante metodi variazionali. Per questo si introduce una famiglia di funzionali tali che i loro punti critici siano soluzioni delle equazioni penalizzate. In questa tesi per studiare tali punti critici si utilizzano teoremi classici di minimax che richiedono che il funzionale abbia una particolare struttura geometrica e verifichi una certa condizione di compattezza (in genere la condizione di Palais-Smale o sue generalizzazioni).

Precisamente per ottenere soluzioni u_ε non banali del problema $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ si studiano i punti critici del funzionale $I_\varepsilon : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathcal{R}$ definito in questo modo

$$I_\varepsilon(v) = \frac{1}{2}\langle Av, v\rangle - \frac{\lambda}{2}\int\limits_\Omega v^2(x)dx + \frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_\Omega \Big((v-\psi)^+\Big)^2(x)dx - \int\limits_\Omega P(x, v(x)),$$

dove

$$P(x,\xi) = \int\limits_0^\xi p(x,t)dt, \quad \text{q.o. } x \in \Omega,\ \forall\, \xi \in \mathcal{R}.$$

Infine, una stima dall'alto, indipendente da ε, per i valori critici $I_\varepsilon(u_\varepsilon)$ e la limitatezza della famiglia $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ in H_0^1 permettono di dedurre che, a meno di sottosuccessioni, la famiglia $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ converge fortemente in H_0^1, per ε che tende a zero, a una soluzione u del problema $(\mathcal{P})$. Utilizzando una stima dal basso, indipendente da ε, sui valori critici $I_\varepsilon(u_\varepsilon)$ (tale stima è conseguenza dei teoremi di minimax) si prova che u non è identicamente nulla. Inoltre, nel caso in cui $\lambda \leq \lambda_1$ la soluzione u è non negativa.

I risultati di esistenza di soluzioni per il problema $(\mathcal{P})$ presentati in questa tesi sono apparsi in [1] e in [4] nel caso del Laplaciano $-\Delta$: è facile verificare che le conclusioni di tali lavori valgono per un qualunque operatore uniformemente ellittico. Inoltre, in questa tesi viene migliorato il teorema di esistenza ottenuto in [4], infatti in tale lavoro si richiede che l'ostacolo ψ sia sottosoluzione di un opportuno problema di Dirichlet, mentre nella tesi tale condizione viene rimossa.

Viene conseguito anche un risultato di esistenza di soluzioni non banali per una disequazione variazionale semilineare ellittica con nonlinearità di segno variabile: tale risultato è apparso in [5]. In particolare si considerano nonlinearità del tipo $p(x)f(u)$, dove p è una funzione di segno variabile e f verifica condizioni di crescita superlineare e sottocritica a zero e a infinito, quindi si studia il seguente problema

$$
(\mathcal{P}_{cs}) \begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \quad u \leq \psi \ \text{ in } \ \Omega \\ \langle Au, v-u \rangle - \lambda \int\limits_{\Omega} u(x)(v-u)(x)dx \geq \int\limits_{\Omega} p(x)f(u(x))(v-u)(x)dx \\ \forall\, v \in H_0^1(\Omega), \quad v \leq \psi \ \text{ in } \ \Omega. \end{cases}
$$

L'esistenza di soluzioni per la disequazione variazionale $(\mathcal{P}_{cs})$ si dimostra usando il metodo di penalizzazione illustrato in precedenza e teoremi classici di minimax. Rispetto al problema $(\mathcal{P})$, le tecniche usate per studiare il problema $(\mathcal{P}_{cs})$ sono più delicate e richiedono alcune ipotesi di regolarità su p e f e una opportuna condizione di quasi omogeneità che lega f, il suo potenziale e la parte negativa di p.

2. – Stabilità.

Un altro problema studiato in questa tesi riguarda la stabilità delle soluzioni della seguente famiglia di disequazioni variazionali

$$
(\mathcal{P}_n) \begin{cases} u_n \in H_0^1(\Omega), \quad u_n \leq \psi_n \ \text{ in } \ \Omega \\ \langle A_n u_n, v-u_n - \lambda \int\limits_{\Omega} u_n(x)(v-u_n)(x)dx \geq \int\limits_{\Omega} p_n(x, u_n(x))(v-u_n)(x)dx \\ \forall\, v \in H_0^1(\Omega), \quad v \leq \psi_n \ \text{ in } \ \Omega, \end{cases}
$$

dove, per ogni $n \in \mathcal{N}$, A_n è un operatore uniformemente ellittico, ψ_n è una funzione di $H^1(\Omega)$ tale che $(\psi_n)_{\partial\Omega} \geq 0$ e la nonlinearità p_n è una funzione che verifica opportune condizioni di crescita superlineare e sottocritica a zero e a infinito.

Il risultato di esistenza di soluzioni non banali esposto in precedenza assicura l'esistenza di una soluzione u_n del problema $(\mathcal{P}_n)$, per ogni $n \in \mathcal{N}$. Il teorema relativo alla stabilità conseguito in questa tesi riguarda la dipendenza continua delle soluzioni $(u_n)_n$ trovate col metodo precedentemente esposto rispetto alla G-convergenza della successione $(A_n)_n$, alla convergenza debole in $H^1(\Omega)$ delle funzioni $(\psi_n)_n$ e ad una opportuna condizione di convergenza sulle nonlinearità $(p_n)_n$. Nella dimostrazione di tale teorema è cruciale il fatto che le soluzioni $(u_n)_n$ si possano caratterizzare come limite, a meno di sottosuccessioni, di una famiglia di punti critici di opportuni funzionali.

Per ottenere il citato risultato di stabilità si prova la limitatezza della successione $(u_n)_n$ in $H_0^1(\Omega)$ e si utilizza un teorema di stabilità per disequazioni variazionali lineari già noto in letteratura dovuto a Boccardo e Capuzzo Dolcetta.

Il risultato presentato in questa tesi è stato ottenuto in [3]. Rispetto a tale lavoro dove la stabilità delle soluzioni è provata solo nel caso in cui $\lambda < \dfrac{c_1}{c_2}\lambda_1$ (c_1 e c_2 sono le costanti di uniforme ellitticità degli operatori $(A_n)_n$), nella tesi si dimostra che tale risultato vale per ogni valore del parametro reale λ.

3. – Molteplicità.

In questa tesi viene presentato anche un risultato di molteplicità di soluzioni per il problema $(\mathcal{P})$ ottenuto in [2] mediante l'uso di teoremi non classici in teoria dei punti critici. Precisamente si prova l'esistenza di tre soluzioni non banali per il problema $(\mathcal{P})$ nel caso in cui il parametro λ sia vicino agli autovalori dell'operatore A. Tale risultato viene conseguito associando opportuni funzionali direttamente alla disequazione variazionale $(\mathcal{P})$ e studiando i loro punti «critici» mediante alcuni teoremi astratti dimostrati nel corso di [2]. I funzionali presi in considerazione non sono regolari: per questo si utilizza la teoria dei punti «critici» introdotta da Degiovanni e Marzocchi e basata sul concetto di pendenza debole.

I teoremi astratti provati in [2] garantiscono l'esistenza di punti «critici» per un funzionale non regolare sotto opportune ipotesi geometriche (che sono del tipo di quelle richieste da Marino e Saccon nei ∇-Teoremi) e, inoltre, una condizione di compattezza (la classica condizione di Palais-Smale che, in questo caso, deve essere verificata su un aperto e non su tutto lo spazio come si richiede di solito).

È facile provare che i punti «critici» trovati in questo modo sono soluzioni non banali della disequazione variazionale $(\mathcal{P})$.

Il risultato di molteplicità per il problema $(\mathcal{P})$ viene ottenuto confrontando i valori critici delle soluzioni.

BIBLIOGRAFIA

[1] GIRARDI M., MASTROENI L. e MATZEU M., *Existence and regularity results for nonnegative solutions of some semilinear elliptic variational inequalities via mountain pass techniques*, ZAA, J. Anal. Appl., **20** (2001), 845-857.

[2] MAGRONE P., MUGNAI D. e SERVADEI R., *Multiplicity of solutions for semilinear variational inequalities*, preprint (2004).

[3] MAGRONE P. e SERVADEI R., *A stability result for Mountain Pass type solutions of semilinear elliptic variational inequalities*, Nonlinear Studies, **9** (2002), 387-405.

[4] MATZEU M. e SERVADEI R., *A Linking type method to solve a class of semilinear elliptic variational inequalities*, Adv. Nonl. Studies, **2** (2002), 1-17.

[5] SERVADEI R., *Existence results for semilinear elliptic variational inequalities with changing sign nonlinearities*, apparirà su NoDEA (2003).

Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Perugia
e-mail: servadei@dipmat.unipg.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Roma «Tor Vergata») - Ciclo XV
Direttore di ricerca: Prof. Michele Matzeu,
Università degli Studi di Roma «Tor Vergata»