Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Salvatore Siciliano

Struttura torale di un'algebra associativa

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **8-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2005), n.3-1, p. 641–644.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_3-1_641_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2005.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VIII-A, Dicembre 2005/1, 641-644

Struttura torale di un'algebra associativa

SALVATORE SICILIANO

In codesta nota, tutte le algebre considerate sono assunte di dimensione finita su un campo e, inoltre, ogni algebra associativa è unitaria.

Sia L un'algebra di Lie su un campo F. Una sottoalgebra H di L si dice *sottoalgebra di Cartan* se H è nilpotente e autonormalizzante in L, ossia $N_L(H) = H$. Tali sottoalgebre occupano un ruolo centrale nella teoria sia classica che modulare delle algebre di Lie: si ricordi, ad esempio, che ogni algebra di Lie semisemplice definita su un campo algebricamente chiuso di caratteristica zero è completamente determinata dall'azione delle sue sottoalgebre di Cartan.

Se il campo base F ha almeno un numero di elementi pari alla dimensione di L, l'esistenza di qualche sottoalgebra di Cartan è assicurata da un teorema di D. Barnes (si veda [1]). Tra le classi di algebre di Lie contenenti incondizionatamente delle sottoalgebre di Cartan, trovano posto le algebre di Lie risolubili e le algebre di Lie ristrette. Tuttavia, la questione dell'esistenza di sottoalgebre di Cartan in algebre di Lie definite su campi arbitrari rimane tuttora un problema aperto. Il seguente teorema (cfr. [3]), nel quale si è ridotto il problema generale al caso semisemplice, costituisce un passo verso tale direzione:

TEOREMA 1. – *Sia L un'algebra di Lie di dimensione minimale priva di sottoalgebre di Cartan. Allora L è semisemplice.*

Tra le algebre di Lie contenenti delle sottoalgebre di Cartan a prescindere dal campo base su cui sono definite, un posto di particolare rilievo spetta alle algebre di Lie provenienti da algebre associative. Se A è un'algebra associativa su un campo F, il simbolo A_{Lie} denota l'algebra di Lie associata ad A mediante il prodotto $[x, y] = xy - yx$, per ogni $x, y \in A$. Uno dei principali obiettivi del lavoro di tesi è stata la descrizione unificata (comune cioè sia al caso modulare che non modulare) delle sottoalgebre di Cartan di A_{Lie}, fornita in termini di proprietà della sola struttura associativa di A. Un elemento x di A è detto *semisemplice* se il suo polinomio minimo è privo di radici multiple nel suo campo di riducibilità completa. Un *toro* è definito come una sottoalgebra commutativa di A costituita da elementi semisemplici. Se $char\, F = p > 0$, tale definizione di toro è più forte di quella classica (cfr. [5] o [4]) considerando A_{Lie} come algebra di Lie ristretta mediante la funzione potenza canonica $[p] : x \to x^p$, l'ordinaria p-sima potenza degli elementi di A. Infatti, un toro nel senso della definizione data per algebre di Lie ristrette non è necessariamente una sottoalgebra associativa di A. Tuttavia si è dimostrato che, limitatamente ai soli tori massimali di un'algebra associativa, le due definizioni sono equivalenti. La caratterizzazione delle sottoalgebre di Cartan di un'algebra di Lie proveniente da un'algebra associativa è contenuta nel seguente teorema:

TEOREMA 2. – *Sia A un'algebra associativa su un campo F e sia $H \subseteq A$. Allora H è una sottoalgebra di Cartan di A_{Lie} se e solo se esiste un toro massimale T di A tale che $H = C_A(T)$.*

Successivamente, vista la forte influenza dell'azione delle sottoalgebre di Cartan sulla struttura generale di un'algebra di Lie, è apparso naturale indagare riguardo a possibili interconnessioni tra sottoalgebre di Cartan di A_{Lie} e proprietà e oggetti strutturali di A. Si è affrontata tale problematica fissando A in certe classi speciali di algebre associative, evidenziando in ciascuna situazione dei legami piuttosto netti.

Si è dapprima esaminato il caso di algebre di divisione $D \in \mathfrak{S}(F)$, laddove $\mathfrak{S}(F)$ denota la classe delle algebre semplici e centrali su F, ossia delle F-algebre associative semplici il cui centro coincide con F. Si noti che tale ipotesi di centralità non è limitativa, potendo sempre riguardare, per le problematiche considerate, D come un'algebra centrale sul campo base costituito dal proprio centro. Si è dimostrato che i sottocampi massimali separabili di D coincidono con le sottoalgebre di Cartan dell'algebra di Lie ad essa associata:

TEOREMA 3. – *Sia $D \in \mathfrak{S}(F)$ un'algebra di divisione e sia $H \subseteq D$. Allora H è un sottocampo massimale separabile di D se e solo se H è una sottoalgebra di Cartan di D_{Lie}.*

Seguendo [2], un'algebra associativa A è detta *risolubile* se $A/Rad(A)$ è commutativa, dove $Rad(A)$ denota il radicale di Jacobson di A. Si è provato che, se A è risolubile e $A/Rad(A)$ è separabile, allora i tori massimali di A coincidono con i complementi di $A/Rad(A)$ in A. Conseguentemente, è stato stabilito il seguente risultato:

TEOREMA 4. – *Sia A un'algebra associativa risolubile su un campo F. Se $A/Rad(A)$ è separabile, allora $H \subseteq A$ è una sottoalgebra di Cartan di A_{Lie} se e solo se esiste un complemento T di $A/Rad(A)$ in A tale che $H = C_A(T)$.*

È stato considerato poi il caso di un'algebra gruppale FG. In tale circostanza, si è evidenziato un legame tra i tori massimali di A e i caratteri irriducibili del gruppo G. In particolare, nelle ipotesi del teorema di Maschke, i tori massimali di FG hanno dimensione costante coincidente con la somma dei gradi dei caratteri irriducibili di G sul campo dei numeri complessi. Infatti si ha:

PROPOSIZIONE 1. – *Sia G un gruppo finito e sia F un campo la cui caratteristica non divida l'ordine di G. Siano* $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_s$ *i caratteri irriducibili di G (su* $\mathbb{C}$*). Sia poi H una sottoalgebra di Cartan di* $(FG)_{Lie}$. *Allora H è un toro massimale di FG e* $\dim_F H = \sum_{i=1}^{s} \deg \chi_i$.

Ora, un sottogruppo nilpotente e autonormalizzante di un gruppo è detto *sottogruppo di Carter*. Un celebre teorema dovuto a R.W. Carter afferma che ogni gruppo risolubile finito contiene dei sottogruppi di Carter e, inoltre, essi sono a due a due coniugati. Evidentemente, la definizione di sottogruppo di Carter corrisponde, nell'ambito della teoria dei gruppi, alla nozione di sottoalgebra di Cartan nella teoria delle algebre di Lie. A tal proposito, non mancano in letteratura risultati rivolti ad evidenziare alcune analogie tra le proprietà di questi due tipi di sottostrutture. D'altra parte, data un'algebra associativa A, può essere considerata simultaneamente sia l'algebra di Lie A_{Lie} associata ad A che il gruppo $A^\star$ costituito dagli elementi invertibili di A. Un problema naturale è quindi stabilire se esistano eventuali relazioni tra sottoalgebre di Cartan di A_{Lie} e sottogruppi di Carter di $A^\star$. In particolare, ci si è interessati a circostanze in cui i sottogruppi di Carter coincidevano con i gruppi degli elementi invertibili delle sottoalgebre di Cartan. In tale direzione, sono state presentate due situazioni completamente contrapposte. Per algebre risolubili, si è stabilito il seguente risultato:

TEOREMA 5. – *Sia A un'algebra associativa risolubile su un campo F. Se* $A/Rad(A)$ *è separabile, allora* $C \subseteq A^\star$ *è un sottogruppo di Carter di* $A^\star$ *se e solo se esiste un complemento T di* $Rad(A)$ *in A tale che* $C = C_{A^\star}(T^\star)$.

In particolare, se $F \neq \mathbb{F}_2$, nelle ipotesi del Teorema 5 ogni sottogruppo di Carter di $A^\star$ risulta essere il gruppo degli elementi invertibili di una sottoalgebra di Cartan di A_{Lie}. In contrasto col caso risolubile, è stato invece provato che:

PROPOSIZIONE 2. – *Sia F un campo di caratteristica diversa da* 2 *e sia* $D \in \mathfrak{S}(F)$ *un'algebra di divisione di dimensione* 4 *su F. Allora* $D^\star$ *è privo di sottogruppi di Carter abeliani.*

Poichè, in virtù del Teorema 3, tutte le sottoalgebre di Cartan di D_{Lie} sono abeliane, nelle ipotesi della Proposizione 2 nessun sottogruppo di Carter di $D^\star$ può provenire da una sottoalgebra di Cartan nel senso prima specificato.

Infine, data un algebra gruppale FG, si sono cercate condizioni sufficienti affinchè ogni sottogruppo di Carter di G fosse contenuto in qualche sottogruppo di Carter di $(FG)^\star$. Utilizzando il teorema 5, è stato ottenuto il seguente risultato:

TEOREMA 6. – *Siano F un campo e G un gruppo finito. Se FG è risolubile e inoltre* $FG/Rad(FG)$ *è separabile, allora ogni sottogruppo di Carter di G è contenuto in un sottogruppo di Carter di* $(FG)^\star$.

BIBLIOGRAFIA

[1] BARNES D.W., *On Cartan subalgebras of Lie algebras*, Math. Z., **101** (1967), 350-355.
[2] JENNINGS S.A., *Central chains of ideals in an associative ring*, Duke Math. J., **9** (1942), 341-355.
[3] SICILIANO S., *On the Cartan subalgebras of Lie algebras over small fields*, J. Lie Theory, **13** (2003), 511-518.
[4] STRADE H. e FARNSTEINER R., *Modular Lie algebras and their representations*, Marcel Dekker, New York (1988).
[5] WINTER D.J., *Abstract Lie Algebras*, M.I.T. Press, Cambridge (1972).

Dipartimento di Matematica «E. De Giorgi», Lecce
e-mail: salvatore.siciliano@unile.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Lecce) - Ciclo XVI
Direttore di ricerca: prof. Francesco Catino