Bollettino
Unione Matematica Italiana

Simone Borghesi

Le formule del grado

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **8-B** (2005), n.1, p. 133–144.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8B_1_133_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2005.

Bollettino U. M. I.
(8) 8-B (2005), 133-144

Le formule del grado.

SIMONE BORGHESI (*)

Summary. – *This text is an introduction to the concept of* degree formulae *and some of their applications. A general definition of what we will refer to as* degree formulae *is provided and two examples of such formulae are stated: the so called* level one *and a more general one. Afterwards, we describe the components of such formulae, that is the* numbers *and the* obstruction ideals. *We will finish this text with a short discussion of the proof of the formulae and a section devoted to the explicit description of some algebraic varieties which can be studied by means of level one formulae.*

Sunto. – *Questo manoscritto è un'introduzione al concetto di formule del grado e a qualche loro applicazione. In esso si dà una formalizzazione di quello che si intenderà con formula del grado, vengono enunciati due esempi: uno cosiddetto* di primo livello *ed uno più generale. Successivamente si descrivono le componenti di queste formule: i* numeri *e gli* ideali di ostruzione. *Dopo un breve accenno alla dimostrazione, il testo si conclude con una sezione in cui si analizzano esplicitamente varietà algebriche alle quali si possono applicare le formule di primo livello.*

1. – Introduzione.

In questo testo daremo una breve descrizione dei tipi di risultati che possono essere ottenuti con le tecnologie sviluppate da V. Voevodsky (con collaborazioni di F. Morel e S. Suslin) per dimostrare la congettura di Bloch-Kato in K-teoria algebrica al primo 2. Data una categoria, il massimo che un matematico possa sperare di ottenere è la «conoscenza» di tutti i morfismi che ci possono essere tra gli oggetti di essa. Partendo dalla questione in questa generalità mostreremo come la teoria dell' omotopia possa essere utilizzata «in alcuni casi» per ottenere informazioni sul grado dei morfismi (razionali) algebrici tra varietà algebriche. Inoltre, la povertà di morfismi della categoria delle varietà algebriche su un campo κ permetterà di ottenere informazioni sulle classi di cobordismo (più precisamente su certi numeri caratteristici) delle varietà X e Y nel caso più interessante in cui $Hom(Y, X) \neq 0$. Questo legame tra invarianti di cobordismo complesso e proprietà di una mappa qualsiasi tra due varietà al-

(*) Comunicazione presentata a Milano in occasione del XVII Congresso U.M.I.

gebriche su un campo k non può essere stabilito in generale: per esempio se $k = \mathbb{C}$, la semplice esistenza di un morfismo $Y \to X$ non ha nessuna conseguenza su Y ed X, dato che ogni classe di cobordismo complesso è rappresentabile da un varietà liscia su $\mathbb{C}$ e tra due varietà su $\mathbb{C}$ esiste sempre almeno un morfismo. L'espressione «in alcuni casi» che abbiamo utilizzato precedentemente sottintende l'esistenza di *ideali d'ostruzione* dalla cui dimensione dipende il legame appena menzionato. Per una data formula del grado, più piccoli sono questi ideali e più grande è la famiglia delle varietà i cui morfismi e numeri caratteristici sono messi in relazione da questa formula. È chiaro che gli ideali di ostruzione debbono aver a che fare con la geometria algebrica delle varietà in considerazione, dovendo dipendere dal campo base. In [4] si dimostra che questi ideali si annullano se le varietà non hanno cicli soddisfacenti una proprietà. La cosa strabiliante è che sembra esserci ancora una volta un legame stretto tra la teoria dell'omotopia utilizzata per costruire un determinato numero caratteristico e l'ideale di ostruzione associato ad esso. Per esempio, nelle *formule del grado di primo livello* (cfr. sezione 3), appaiono i numeri caratteristici del fibrato tangente $s_n(T)$ ottenuti tramite lo spettro $\mathbf{\Phi}_1$, che è un'estensione di soli due spettri di Eilenberg-MacLane motivici. Ciò implica che l'ideale di ostruzione associato a s_n è «generato» solo da certi cicli zero dimensionali. Per numeri caratteristici più complicati l'ideale si ingrossa ed include cicli in dimensioni più elevate, ben determinate dalla teoria dell'omotopia necessaria per la costruzione dei numeri caratteristici in questione (cfr. [4]). La sistematizzazione del processo di costruzione (numeri)-(ideali di ostruzione), cioè di *formule del grado*, per varietà algebriche Y e X qualsiasi con $Hom(Y, X) \neq 0$ permetterebbe di mettere in relazione il tipo di omotopia di Y, X, i loro cicli algebrici e proprietà di un morfismo qualunque tra di esse, il tutto orchestrato dalla teoria dell'omotopia.

2. – Le formule del grado.

Sia $\mathcal{S}$ una sottocategoria piena della categoria degli schemi irriducibili su un campo k.

DEFINIZIONE 2.1. – *Una* formula del grado *a valori in un anello R è una sequenza $(t_r, I_{h_i(r)})_{r \in \mathbb{N}^+}$ dove $I_{h_i(r)}$ sono corrispondenze*

$$Oggetti(\mathcal{S}) \to \{ideali\ di\ R\}$$

per $i = 1, 2$. Inoltre t_r sono mappe moltiplicative (*vedi definizione sottostante*) *con il rispetto degli ideali $I_{h_i(r)}$ e l'indice $r \in \mathbb{N}^+$.*

Le funzioni $r \to h_i(r)$ sono a valori in $\mathbb{N}^+$ per $i = 1, 2$. Dato un morfismo $f : Y \to X$ denoteremo con $Y_{K(X)}$ la fibra generica di f, cioè il limite del diagramma

$$
\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[d, "f"] \\
\operatorname{Spec} K(X) \arrow[r] & X
\end{tikzcd}
\tag{1}
$$

nella categoria degli schemi su k.

DEFINIZIONE 2.2. – *Sia* $(t_r, I_{h_i(r)})_r$ *una sequenza come nella precedente definizione. Allora,* t_r *sono mappe* moltiplicative *se per ogni morfismo (razionale)* $f : Y \to X$ *in* S *da uno schema di dimensione* m *ad uno schema di dimensione* n, *la seguente equazione*:

$$t_m(Y) = t_{m-n}(Y_{K(X)})\, t_n(X) \tag{2}$$

è soddisfatta nell'anello $R/(I_{h_1(m)}(Y) + I_{h_2(n)}(X))$.

Prima di enunciare le formule del grado di cui discuteremo, descriviamo i numeri caratteristici che appaiono in esse.

DEFINIZIONE 2.3. – *Sia* n *un intero non negativo e* $V \to X$ *un fibrato vettoriale su uno schema liscio* X. *Definiamo* $s_n(V) \in CH_0(X)$ *la classe corrispondente all'n-esimo polinomio di Newton nelle classi di Chern di* V.

Per esempio $s_1 = c_1$, $s_2 = c_1^2 - 2c_2$ e $s_3 = c_1^3 - 3c_2c_1 + 3c_3$. Sia $I_0(X)$ l'ideale generato dalle riduzioni modulo p degli interi $\{[k(x) : k],\ x \in X \textit{ punti chiusi}\}$. La seguente è la formula del grado di primo livello:

TEOREMA 2.1. – *Siano* Y *e* X *due varietà liscie e proiettive,* p *un numero primo e* t *un intero non negativo fissati. Se esiste* $f : Y \to X$ *razionale, allora vale la seguente congruenza*:

$$t_n^1(Y) = \deg(f) \cdot t_n^1(X) \tag{3}$$

nell'anello $(\mathbb{Z}/p)/I_0(X)$, *dove* $t_n^1(M) = 0$ *a meno che* $n = \dim(M) = p^t - 1$. *In tale caso* $t_n^1(M) = -1/p \cdot \deg(s_{p^t-1}(T_M)) \bmod p$ *dove* T_M *è il fibrato tangente di* M.

Per quanto riguarda la formula del grado di primo livello, $I_{h_1(r)} = 0$ per ogni r, e $I_{h_2(r)}(X) = I_0(X)$ per ogni r. Discuteremo più approfonditamente di questa formula del grado nella prossima sezione.

Esistono formule del grado *superiori* i cui numeri possono essere non banali per varietà di dimensione $i(p^t - 1)$ per ogni intero positivo i. I numeri che appaiono in esse sono più complicati.

TEOREMA 2.2. – *Sia p un numero primo, t un intero non negativo ed $f: Y \to X$ una mappa regolare tra varietà lisce e proiettive di dimensione m e n rispettivamente su un campo perfetto k. Allora,*

$$t_m(Y) = t_{m-n}(Y_K(X))\, t_n(X) \tag{4}$$

nell' anello $(\mathbb{Z}/p)/I_{h(n)}(X)$ dove $h(n)$ è il più grande intero con la proprietà che $h(n)(p^t - 1) < n$.

Prima daremo una descrizione dei numeri, mentre gli ideali verranno descritti in seguito.

2.1. *I numeri.*

Ad una n-upla α di interi non negativi associamo il polinomio simmetrico $g_\alpha(\mathbf{t})$ nelle variabili $t_1, \ldots, t_z$ con $z \geqslant \sum \alpha_i$. Il polinomio $g_\alpha(\mathbf{t})$ è la somma di tutti i monomi con α_1 variabili elevate alla potenza 1, α_2 elevate alla potenza 2 e così via. Per esempio, se $n = 3$ abbiamo:

$$g_{(0,1,1)}(\mathbf{t}) = t_1^2 t_2^3 + t_1^2 t_3^3 + t_2^2 t_3^3 + t_2^2 t_1^3 + t_3^2 t_1^3 + t_2^2 t_2^3 \tag{5}$$

mentre

$$g_{(0,1,2)}(\mathbf{t}) = t_1^2 t_2^3 t_3^3 + t_2^2 t_1^3 t_3^3 + t_3^2 t_2^3 t_1^3. \tag{6}$$

Essendo g_α simmetrico, può essere espresso unicamente come $f_\alpha(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ per qualche polinomio nelle funzioni elementari simmetriche $\sigma_i(\mathbf{t})$. Ricordiamo che $\sigma_1(\mathbf{t}) = t_1 + \ldots + t_z$, $\sigma_2(\mathbf{t}) = \sum_{i_1 < i_2} t_{i_1} t_{i_2} = t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_1 t_3 + \ldots$, $\sigma_2(\mathbf{t}) = \sum_{i_1 < i_2 < i_3} t_{i_1} t_{i_2} t_{i_3}$ e così via fino a definire $\sigma_z(\mathbf{t}) = t_1 \ldots t_z$.

DEFINIZIONE 2.4. – *Sia X uno schema liscio e proiettivo di dimensione m e $V \to X$ un fibrato vettoriale su di esso con classi di Chern c_i. Per una n-upla di interi non negativi $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, poniamo $s_\alpha(c_1, \ldots, c_n) = f_\alpha(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ rimpiazzando formalmente le variabili σ_i con c_i. In questo manoscritto, ogni volta che apparirà s_α si assumerà sempre che $\dim(X) = \sum_{i=1}^{n} i\alpha_i$. L'intero $s_\alpha(V)$ è definito come il grado del ciclo zero dimensionale $s_\alpha(c_1(V), c_2(V), \ldots c_n(V))$. Ricordiamo che se $\sum_i a_i x_i$ è un ciclo di dimensione zero, il suo grado è definito come $\sum_i a_i [k(x_i), k]$ dove $k(x_i)$ è il campo residuo di $x_i \in X$.*

OSSERVAZIONE 2.1. – In questa notazione, i cicli che prima avevamo denotato con s_n vengono scritti come $s_{(0,0,\ldots,\overset{n}{1})}$.

Esempi. – Se X è una curva, cioè $m = 1 = 2^1 - 1$ si ha che $s_{(1)} = c_1$. Se X è una superficie ($m = 2 = 3^1 - 1$), $s_{(0,\,1)} = c_1^2 - 2c_2$, mentre se X è una varietà tridimensionale ($m = 3 = 2^2 - 1$) si hanno due di tali classi: $s_{(0,\,0,\,1)} = c_1^3 - 3c_2c_1 + 3c_3$ e $s_{(1,\,1)} = c_2c_1 - 3c_3$.

Per definire i numeri t_r abbiamo bisogno di un' immersione chiusa i di X liscio e proiettivo in uno schema liscio W con la proprietà che $i^*(T_W)$ sia il fibrato triviale su X, dove T_W è il fibrato tangente di W. Sfortunatamente, se X non è zero dimensionale, non possiamo prendere nessuno spazio proiettivo $\mathbb{P}_k^N$ come W. Se $i' : X \hookrightarrow \mathbb{P}_k^N$ è possibile però «deformare» $\mathbb{P}_k^N$ in modo tale da ottenere il seguente risultato:

Teorema 2.3. – *Esiste uno schema liscio, quasi proiettivo $\widetilde{\mathbb{P}}_k^N$ con una $\mathbb{A}^1$ equivalenza $p : \widetilde{\mathbb{P}}_k^N \to \mathbb{P}_k^N$ tale che:*

1. *esiste un'immersione chiusa i che rende commutativo il seguente diagramma*

(7)
$$\begin{tikzcd} & \widetilde{\mathbb{P}}_k^N \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, "i"] \arrow[r, "i'"'] & \mathbb{P}_k^N \end{tikzcd}$$

2. $i^* T_{\widetilde{\mathbb{P}}_k^N}$ *è triviale.*

Non ci soffermeremo a dare definizioni precise su cosa significhi per una mappa essere un $\mathbb{A}^1$ equivalenza. In questo manoscritto quando si parlerà di schemi, in realtà ci riferiremo a classi di equivalenza di una categoria localizzata, in cui le $\mathbb{A}^1$ equivalenze sono invertite. Nel caso particolare appena descritto, $\widetilde{\mathbb{P}}_k^N$ e $\mathbb{P}_k^N$ diventeranno isomorfi. Ciò non verrà mai utilizzato esplicitamente ed il lettore che non è familiare con localizzazioni di categorie può considerare $\widetilde{\mathbb{P}}_k^N$ come un sostituto «sufficientemente» simile a $\mathbb{P}_k^N$. Questo risultato ha numerose applicazioni che vengono dimostrate ed utilizzate consistentemente in [4]. Ritornando al teorema precedente, i è l'immersione chiusa che è rilevante per la descrizione dei numeri t_r:

Definizione 2.5. – *Sia α una n-upla di interi non negativi ed $i' : X \hookrightarrow \mathbb{P}_k^N$ una varietà liscia e proiettiva. Il simbolo $s_\alpha(X)$ è definito come $s_\alpha(\nu_i)$ dove $i : X \hookrightarrow \widetilde{\mathbb{P}}_k^N$ è l'immersione chiusa del teorema* 2.3.

Strumenti della teoria dell'omotopia classica ci permettono di calcolare esplicitamente tutti i numeri $s_\alpha(\mathbb{P}_k^N)$, sempre assumendo che $\sum_{i=1}^{n} i\alpha_i = N$. In questo caso i' dovrà immergere $\mathbb{P}_k^N$ come sottoschema chiuso in $\mathbb{P}_k^M$ per $M > N$. Se b è la somma formale $1 + b_1 + b_2 + \ldots$ allora $s_\alpha(\mathbb{P}_k^N)$ è il coefficiente di $b_1^{\alpha_1}\dots b_n^{\alpha_n}$ nella somma formale che esprime b^{-N-1}. In particolare, $s_{(1)}(\mathbb{P}^1_k) = -2$, $s_{(2)}(\mathbb{P}^2_k) = 6$ e $s_{(0,1)}(\mathbb{P}^2_k) = -3$. Ciò implica che per $\mathbb{P}^N_k$, questi numeri sono indipendenti da M e dalle immersioni chiuse i' ed i. In realtà questo fatto è vero più in generale:

Proposizione 2.1. – *Sia $i' : X \hookrightarrow \mathbb{P}^N_k$ uno schema liscio e proiettivo. Allora le classi dei cicli zero dimensionali $s_\alpha(\nu_i)$ in $CH_0(X)$ dipendono solo da X.*

La dimostrazione si basa sul fatto che $i^*(T_{\tilde{\mathbb{P}}^N_k})$ è un fibrato triviale e quindi i cicli $s_\alpha(\nu_i)$ possono essere espressi in funzione di classi caratteristiche del fibrato tangente di T_X. Esplicitamente, si ha una sequenza esatta corta

$$0 \to T_X \to \mathcal{O}_X^{\oplus N} \to \nu_i \to 0$$

i.e. $[T_X] + [\nu_i] = N$ in $K_0(X)$, quindi $s_\alpha([\nu_i] + [T_M]) = 0$. A questo punto si può calcolare il ciclo utilizzando la formula $s_\alpha([\nu_i] + [T_M]) = \sum s_{\alpha'}(\nu_i)\cdot s_{\alpha''}(T_M)$ dove la somma è estesa su tutti gli addendi $s_{\alpha'} \otimes s_{\alpha''}$ che compaiono nella diagonale di $s_\alpha \in H^{*,*}(BGl)$. Questi sono esplicitamente ricavabili dalla struttura di algebra di Hopf di $H_{*,*}(BGl)$. Per esempio gli $s_{(0,0,\dots,\overset{n}{1})}$, essendo duali di elementi indecomponibili in $H_{*,*}(BGl)$, sono primitivi, quindi $\Delta(s_{(0,0,\dots,\overset{n}{1})}) = s_{(0,0,\dots,\overset{n}{1})} \otimes 1 + 1 \otimes s_{(0,0,\dots,\overset{n}{1})}$, in altre parole $s_{(0,0,\dots,\overset{n}{1})}([V]+[W]) = s_{(0,0,\dots,\overset{n}{1})}(V) + s_{(0,0,\dots,\overset{n}{1})}(W)$ per ogni fibrato vettoriale V e W. Induttivamente su α si vede che $s_\alpha(\nu_i)$ può essere espresso in funzione di classi caratteristiche del fibrato tangente. Per ulteriori dettagli su queste tecniche si veda [4]. Il lettore può aver notato che, nell'esempio di $\mathbb{P}^N_k$ appena discusso, 2 divide $s_{(1)}(\mathbb{P}^1_k)$ e 3 divide $s_{(0,1)}(\mathbb{P}^2_k)$. Tale fatto vale anche nelle dimensioni superiori come si può dimostrare adattando al nostro contesto un teorema di J. Milnor:

Teorema 2.4. – *Sia X una varietà liscia e proiettiva su un campo di caratteristica zero. Allora per ogni primo p, l'intero $s_{p^t-1}(X) := s_{(0,\dots,\overset{p^t-1}{1})}(X)$ è divisibile per p per ogni t non negativo.*

Nel caso più generale di X, i numeri $t_r(X)$ sono bene definiti solo in $(\mathbb{Z}/p)/I_{h(r)}(X)$. Se $X = X_1 \times_k \dots \times_k X_v$ con $\dim(X_i) = p^t - 1$ per ogni $1 \leqslant i \leqslant v$, abbiamo il seguente risultato:

Proposizione 2.2. – *Sia X come sopra. Allora*

$$t_{v(p^t-1)}(X) = (1/p^v)\, s_{(0,0,\dots,\overset{p^t-1}{v})}(X) \bmod p =$$

$$\prod_{i=1}^{v} (1/p)\, s_{(0,\dots,\overset{p^t-1}{1})}(X_i) \bmod p = \prod_{i=1}^{v} t_{p^t-1}(X_i)$$

OSSERVAZIONE 2.2. – *Se* $k \subset \mathbb{C}$, *questa proposizione vale anche per* X *cobordante con* $X_1 \times_k \ldots \times_k X_v$ *nel senso che* $X(\mathbb{C})$ *sia cobordante con* $X_1(\mathbb{C}) \times \ldots \times X_v(\mathbb{C})$ *come varietà differenziale complessa.*

2.2. *Ideali di ostruzione.*

Vogliamo sottolineare che una qualsiasi scelta di numeri $\{t_n\}_n$ è sempre parte di una formula del grado: basta imporre $I_{h_i(n)}(X) = R$ per ogni i, n e X. Questa è una formula del grado *triviale* e non dà nessuna informazione. È perciò cruciale trovare gli ideali più piccoli possibili perché la formula dia informazioni più precise.

PROPOSIZIONE 2.3. – *L'ideale* $I_0(X)$ *è generato dalle riduzioni modulo* p *degli interi* $\{[k(x) : k],\ x \in X$ *punti chiusi*$\}$.

TEOREMA 2.5. – *Sia* $Z \subset X$ *un sottoschema chiuso ed irriducibile (non necessariamente liscio) di dimensione pura* n *in uno schema liscio e proiettivo* X. *Allora i numeri* t_n *possono essere estesi anche a* Z, *nel senso che* $t_n(Z)$ *è zero, se* $n \neq a(p^t - 1)$ *e* $t_n(Z)$ *è un numero ben definito in* $(\mathbb{Z}/p)/I_{a-1}(X)$, *se* $n = a(p^t - 1)$. *Inoltre, sotto l'ipotesi che* $I_{a-1}(X) = 0$, *l'uguaglianza* $t_n(Z) = t_n(\tilde{Z})$ *vale per ogni modello liscio (se esiste)* $\tilde{Z} \to Z$ *e per ogni rappresentante* $\tilde{Z} \in [Z] \in CH_n(X) \otimes \mathbb{Z}/p$.

Questa è la descrizione degli ideali di ostruzione associati ai t_r:

TEOREMA 2.6. – *Sia* X *uno schema liscio e proiettivo,* p *un numero primo e* t *un intero positivo fissati. Allora* $I_h(X, p, t)$ *è generato dai* $t_r(Z)$ *ben definiti in* $\mathbb{Z}/p$, *dove* $Z \subset X$ *varia tra i sottoschemi chiusi irriducibili di dimensione pura* $i(p^t - 1)$ *per ogni* $0 \leq i \leq h$.

COROLLARIO 2.1. – *Sia* X *liscio e proiettivo. Allora* $I_h(X) = 0$ *se e solo se* $t_{i(p^t-1)}(Z)$ *sono ben definiti e uguali a zero per tutti gli* $0 \leq i \leq h$ *e* $Z \subset X$ *rappresentanti di generatori di* $CH_{i(p^t-1)}(X) \otimes \mathbb{Z}/p$.

Rimandiamo il lettore all'articolo [4] per altri criteri di annullamento degli ideali di ostruzione e discussioni di esempi specifici.

La dimostrazione delle formule del grado è basata sull'esistenza, per ogni numero primo p e intero non negativo t, di certi oggetti (spettri) nella *categoria omotopica stabile motivica* $\mathcal{SH}(k)$, costruti in [1] per campi base immersi in $\mathbb{C}$ ed in [3] per la versione su campi base perfetti. Questi oggetti sono stati denominati *K-teorie algebriche di Morava* ed indicati come $\mathbf{\Phi}_r$ per interi non negativi r. Rispetto alle loro controparti in teoria dell'omotopia classica, poche sono le loro proprietà conosciute. In particolare, non si conoscono strutture di anello che questi spettri possano avere. Eventuali tali strutture, compatibili con quella standard sullo spettro di Eilenberg-MacLane motivico, avrebbero facilitato l'esposizione della dimostrazione delle formule del grado. Invece di intraprendere la via della ricerca di possibili strutture di anello si è deciso di utilizzare ciò che è stato dimostrato ad oggi sugli spettri $\mathbf{\Phi}_r$. Pur a fronte di maggiore tecnicismo e complicazioni nella dimostrazione abbiamo ottenuto un programma che lascia qualche speranza a future possibili generalizzazioni. In [1] sono state dimostrate le formule del grado necessarie per le applicazioni di M. Rost nel suo testo relativo alla costruzione di *varietà norma* (cfr. [6]), fondamentali per la dimostrazione della congettura di Bloch-Kato in K-teoria algebrica ai primi dispari. Per tale applicazione è stato sufficiente costruire le formule del grado superiori per mappe tra varietà liscie e proiettive di dimensione uguale e si poteva assumere che il campo base ammettesse un'immersione in $\mathbb{C}$. Nella presente versione non si pone nessuna restrizione sulle dimensioni delle varietà coinvolte; per far apparire i numeri della fibra generica è stato necessario usare teorie coomologiche piuttosto che omologiche. Le trasformazioni naturali indotte nei gruppi di coomologia vanno in direzione opposta a quella necessaria e ciò ha posto il problema di costruire morfismi *immagine diretta* in direzione opposta. D'altra parte, non si poteva ragionare interamente in termini di teorie coomologiche, perché, per la scarsezza di informazioni su $\mathbf{\Phi}_r$, non siamo riusciti a costruire morfismi immagine diretta per le teorie coomologiche da tali spettri definite. In questo caso, per avere mappe nella direzione corretta e poter definire gli ideali di ostruzione in modo appropriato, siamo stati costretti ad usare l'omologia e le trasformazioni naturali. Fortunatamente, è stato possibile mettere in relazione teorie omologiche e coomologiche, definite dagli spettri tramite una dualità ben conosciuta in teoria dell'omotopia classica e ridimostrata in questo contesto. A titolo esplicativo diamo ora la costruzione dei numeri t_n con la quale vengono dimostrate le formule del grado. Esiste una categoria triangolata $\mathcal{SH}(k)$ tra i cui oggetti possiamo trovare tutti gli schemi di tipo finito su un campo k. Una sua particolarità è che per ogni oggetto $\mathbf{E} \in \mathcal{SH}(k)$ abbiamo una teoria omologica $\mathbf{E}_{*,*}(\ )$ ed una coomologica $\mathbf{E}^{*,*}(\ )$ ad esso associata ed in particolare, se k è un campo perfetto, esiste un oggetto $\mathbf{H}_A$ le cui teorie (co)omologiche associate sono i gruppi di Chow (superiori). Tra i vari oggetti interessanti di $\mathcal{SH}(k)$, **MGl** gode della proprietà per cui per ogni k varietà liscia, proiettiva X di dimensione pura n, esiste un classe canonica $[X]_{\mathbf{MGl}} \in \mathbf{MGl}_{2n,\,n}(X)$ ed è in un certo senso l'oggetto universale con tale proprietà. Si ricorda al lettore che gli spettri $\mathbf{\Phi}_r$ formano una torre (cfr. [2]) $\ldots \to \mathbf{\Phi}_i \to \mathbf{\Phi}_{i-1} \to \ldots \to \mathbf{\Phi}_1 \to \mathbf{H}_{\mathbb{Z}/q}$ e che lo spettro **MGl** possiede mappe non canoniche e_i che rendono commutativo il diagramma

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{MGl} \arrow[d, "\tau"] \arrow[dr, "e_1"] \arrow[drrr, "e_i"] & & & & \\
\mathbf{H}_{\mathbb{Z}/q} & \mathbf{\Phi}_1 \arrow[l] & \cdots \arrow[l] & \mathbf{\Phi}_i \arrow[l] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}
\tag{8}
$$

Il numero $t_n(X)$ è definito come $(e_r)_* p_* [X]_{\mathbf{MGl}}$ dove $p : X \to Spec\ k$ è il morfismo strutturale di X, $r(p^t - 1) \geqslant n$, p_* è la trasformazione naturale in omologia indotta da p. Per certe applicazioni però è importante avere una costruzione di $t_n(X)$ in termini di gruppi di coomologia, ma questo non può essere ottenuto direttamente, perchè, essendo la coomologia un funtore controvariante, la trasformazione naturale indotta da p va in direzione opposta. Il problema viene risolto tramite la definizione di un omomorfismo $\widehat{p}_* : \mathbf{MGl}^{*,*}(X) \to \mathbf{MGl}^{*+2n,*+n}(Spec\ k)$ immagine diretta e la dimostrazione di una dualità $t\delta : \mathbf{MGl}_{*,*}(X) \xrightarrow{\cong} \mathbf{MGl}^{*-2n,*-n}(X)$ (adottando le stesse notazioni di [4]). Identificando $\mathbf{E}_{*,*}(Spec\ k)$ con $\mathbf{E}^{-*,-*}(Spec\ k)$ tramite l'isomorfismo canonico tra di essi, si dimostra che $p_* = \widehat{p}_* (t\delta)^{-1}$ e quindi $t_r(X)$ può anche essere scritto come $(e_r)_* \widehat{p}_* (t\delta)^{-1} [X]_{\mathbf{MGl}}$.

Volendo sintetizzare, la dimostrazione delle formule del grado è basata essenzialmente su un utilizzo alterno del meglio che coomologia ed omologia ci possono offrire, passando da una all'altra tramite la dualità $t\delta$.

3. – Le formule di primo livello.

In questa sezione ci concentreremo sulle formule del grado di primo livello cioè di quelle ottenute dallo spettro $\mathbf{\Phi}_1$ con il solo I_0 come ideale di ostruzione. Esse furono derivate per la prima volta da V. Voevodsky quando nella prima prepubblicazione sulla congettura di Milnor definiva lo spettro $\mathbf{\Phi}_1$. È da loro che nasce il termine «formule del grado», perchè $t_0(Y_{K(X)})$ è il grado di f. Più precisamente esse si riducono all'enunciato del teorema 2.1. Diamo ora esempi di varietà liscie e proiettive Y tali che $t_1(X) \neq 0$ e varietà X tali che $I_0(X) = 0$. Ricordiamo che le classi s_n sono additive, quindi è possibile calcolare $s_n(T_X)$ direttamente per un'intersezione completa qualsiasi in $\mathbb{P}^N_k$. In particolare, se $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}^N_k$ è un'ipersuperficie di grado d, dalle due sequenze esatte:

$$0 \to T_X \to i^*(T_{\mathbb{P}^N}) \to i^*\mathcal{O}(d) \to 0 \tag{9}$$

e

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N_k} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1) \oplus \overset{N+1}{\cdots} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1) \to T_{\mathbb{P}^N_k} \to 0 \tag{10}$$

otteniamo che $s_{N-1}(T_X) = (N + 1 - d^{N-1})\, i^*(c_1^{N-1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N_k}(1)))$ e quindi

$\deg(s_{N-1}(T_X)) = d(N+1-d^{N-1}) = -s_{N-1}(X)$. Se $N = p^t$ allora otteniamo che

$$t_1(X) = 1/p \cdot s_{p^t-1}(X) \equiv 1 \mod p$$

Un altro esempio è costituito dalle varietà di Severi-Brauer: per ogni algebra centrale semplice su un campo k di grado n esiste una varietà associata di dimensione $n-1$, detta *varietà di Severi-Brauer* di A e di solito denotata come $SB(A)$. Se F è un'estensione di k tale che $A_F \cong M_n(F)$, cioè l'anello di matrici $n \times n$ su F (il che è sempre possibile per un teorema di Wedderburn), allora $SB(A)_F \cong \mathbb{P}_F^{n-1}$. Dalla sequenza esatta corta (3.9) si calcola che $s_N(\mathbb{P}_k^N) = -s_n(T_{\mathbb{P}_k^N}) = -(N+1)$ e quindi

$$t_1(SB(A)) = s_{p-1}(SB(A))/p \mod p = -1 \mod p$$

per una algebra centrale semplice A su k di grado p.

Anche per quanto riguarda l'ideale di ostruzione abbiamo varietà notevoli:

Primo $p = 2$: Una quadrica su k è detta *anisotropa* se non ha punti razionali. Per il teorema di Springer, se una quadrica X è anisotropa, allora ogni suo cambiamento di base su estensioni di k di grado dispari rimane anisotropo. Ora se X avesse un punto chiuso x tale che $[k(x) : k]$ fosse dispari, allora $X_{k(x)}$ non potrebbe essere anisotropa. Quindi $I_0(X) = 0$ se X è una quadrica anisotropa.

Primo p qualsiasi: Esempi di varietà con ideale di ostruzione nullo sono varietà che *spezzano simboli* in K-teoria algebrica. Ricordiamo che i gruppi di K-teoria algebrica di Milnor $K_n(F)$ di un campo F sono definiti come i quozienti del gruppo moltiplicativo di $F^* \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{n}{\cdots} \otimes_{\mathbb{Z}} F^*$ per il sottogruppo generato dagli elementi

$$a_1 \otimes \cdots \otimes a_i \otimes (1-a_i) \otimes \cdots \otimes a_n$$

per $n > 0$ e si pone $K_0(F) = \mathbb{Z}$. Gli elementi in $K_*(F)$ del tipo $a = a_1 \otimes \cdots \otimes a_n$ sono chiamati *simboli* (puri). Sia m un intero positivo; l'immagine di a in $K_*(k)/m$ verrà denotata con $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Diremo che una varietà X su k *spezza* un simbolo $0 \neq a \in K_*(k)$ se $i_* a = 0$ dove $i : k \hookrightarrow K(X)$ è l'inclusione canonica e i_* è il morfismo indotto in K-teoria algebrica.

PROPOSIZIONE 3.1. – *Sia X una varietà liscia su k che spezza un simbolo non nullo modulo p. Allora $I_0(X, p) = 0$.*

Per un numero p qualsiasi, un esempio di tale varietà per $a = \{a_1, a_2\}$ è dato dalla varietà di Severi-Brauer $SB(A_\xi(a_1, a_2))$. Supponiamo che k contenga una radice p-esima dell'unità ξ. Allora l'algebra centrale semplice $A_\xi(a_1, a_2)$ è generata da u e v soggetti alle seguenti relazioni: $u^p = a_1$, $v^p = a_2$ e $uv = \xi vu$. Ci sono esempi di varietà che spezzano simboli modulo p in grado 3. Se $p = 2$ allora ci sono varietà che spezzano simboli modulo 2 in grado arbitrario: se $a =$

$\{a_1, \dots a_n\}$ è un simbolo modulo 2, la quadrica

$$«a_1, \dots, a_n» := \langle 1, -a_1 \rangle \otimes \dots \otimes \langle 1, -a_n \rangle$$

è chiamata la quadrica di Pfister associata al simbolo a. Questa quadrica spezza a. In generale, l'esistenza di varietà che spezzano simboli modulo p costituisce un aspetto fondamentale per gli approcci conosciuti alla congettura di Bloch-Kato in K-teoria algebrica. Analizzeremo ora qualche applicazione delle formule del grado di primo livello. Quelli che seguono sono risultati di M. Rost e rimandiamo a [5] per i dettagli sulle dimostrazioni.

TEOREMA 3.1. – *Siano X ed Y due varietà proiettive ed irriducibili, con Y liscia. Se esiste un morfismo razionale $f : Y \dashrightarrow X$, allora $I_0(Y) \subset I_0(X)$. Se $t_n(Y) \neq 0 \in (\mathbb{Z}/p)/I_0(X)$ allora:*

1. $\dim(X) \geqslant \dim(Y)$,

2. *se* $\dim(X) = \dim(Y)$ *allora $Y_{K(X)}$ ha un punto di grado primo a p su Spec $K(X)$.*

La restrizione sulle dimensioni segue dalla formula del grado applicata alla composizione

$$g : Y \xrightarrow{f} X \hookrightarrow X \times_k \mathbb{P}^n_k. \tag{11}$$

Nel caso $\dim(X) < \dim(Y)$, si ha che $\deg(g) = 0$, ma visto che $I_0(X \times_k \mathbb{P}^n_k) = I_0(X) = 0$ e $t_n(Y) \neq 0$, ciò contraddice la formula del grado. La seconda affermazione è equivalente al fatto che $\deg(f)$ non è divisibile per p.

Si noti che questo risultato in particolare implica «l'incompressibilità» di varietà con numero non zero in varietà con ideale di ostruzione banale. Ciò è in contrasto con il caso in cui le varietà hanno dimensione $r(p^t - 1)$ con $r > 1$. Infatti, le formule del grado superiori mostrano che nel caso di annullamento dell'appropriato ideale di ostruzione e di $t_m(Y) \neq 0$, la fibra generica $Y_{K(X)}$ può avere dimensione strettamente maggiore di zero, e anche numero $t_{m-n}(Y_K(X))$ non zero. Il teorema 3.1 applicato alle quadriche dà il seguente risultato:

COROLLARIO 3.1. – *Sia Y una quadrica liscia e proiettiva di dimensione $m \geqslant 2^t - 1$, e sia X una varietà su k tale che $I_0(X) = 0$. Se esiste un morfismo razionale $f : Y \dashrightarrow X$ allora:*

1. $\dim(X) \geqslant 2^t - 1$;

2. *se* $\dim(X) = 2^t - 1$, *allora esiste un morfismo razionale $X \dashrightarrow Y$.*

Sia Y' una sottoquadrica di Y che intersechi non trivialmente il dominio di f e tale che $\dim(Y') = 2^t - 1$. I calcoli dei numeri t_n che abbiamo fatto all'inizio della sezione danno $t_{2^t-1}(Y') \equiv 1 \mod 2$. La formula del grado applicata ad

$f': Y' \dashrightarrow X$ dà $\dim(X) \geqslant 2^k - 1$ (cfr. teorema 3.1). Sempre per il Teorema precedente, $Y'_{K(X)}$ ha un punto di grado dispari su $K(X)$, quindi è isotropa su un'estensione di grado dispari e per il Teorema di Springer deve essere isotropa già su $K(X)$. L'efficacia delle formule del grado di primo livello si evidenzia in due risultati sulle quadriche, dimostrati in passato con tecniche specifiche di teoria delle quadriche, che in questo caso vengono ottenuti come immediate conseguenze del corollario precedente:

COROLLARIO 3.2. – *Siano Y ed X due quadriche anisotrope, tali per cui esiste un morfismo razionale $Y \dashrightarrow X$.*

1. (*Hoffmann*) *Se* $\dim(Y) \geqslant 2^t - 1$, *allora* $\dim(X) \geqslant 2^t - 1$.
2. (*Izhboldin*) *Se* $\dim(Y) = \dim(X) = 2^t - 1$, *allora esiste un morfismo razionale* $X \dashrightarrow Y$.

Le formule del grado di primo livello mostrano che la prima di queste proprietà delle quadriche è solo conseguenza di una condizione sul tipo di omotopia della varietà dominio che consideriamo (non banalità di certi numeri caratteristici) e di una proprietà algebrica di esse (divisibilità delle estensioni dei campi residui). Essenzialmente, non è necessario utilizzare l'ipotesi che le varietà in questione siano quadriche. Le stesse considerazioni valgono anche per il risultato di Izhboldin eccetto che per l'impiego del Teorema di Springer.

BIBLIOGRAFIA

[1] S. BORGHESI, *Algebraic Morava K-theories and the Higher Degree Formula*, PhD Thesis (2000), Northwestern University, http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0412/.
[2] S. BORGHESI, *Algebraic Morava K-theories*, Invent. Math., **151** (2003), 381-413.
[3] S. BORGHESI, *Algebraic Morava K-theory spectra over perfect fields*, Prepubblicazione (2003), http://www.sns.it/Geometria/.
[4] S. BORGHESI, *The degree formulae*, Prepubblicazione (2003), http://www.sns.it/Geometria/.
[5] M. ROST, *Degree formula*, http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/rost/chain-lemma.html#degree-formula.
[6] M. ROST, *Norm Varieties and Algebraic Cobordism*, Proceedings ICM 2002.

Scuola Normale Superiore, Piazza dei Cavalieri 7, 56126 PISA

Pervenuta in Redazione
il 16 dicembre 2003