Bollettino Unione Matematica Italiana

G. Falcone

Su certe classi di gruppi unipotenti

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **8-B** (2005), n.1, p. 167–171.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8B_1_167_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2005.

Bollettino U. M. I.
(8) 8-B (2005), 167-172

Su certe classi di gruppi unipotenti (*).

G. FALCONE (**)

Summary. – *We introduce some results characterizing unipotent algebraic groups having a chain as the lattice of connected subgroups and we discuss some consequent results.*

Sunto. – *Si presentano alcuni risultati che caratterizzano i gruppi algebrici unipotenti aventi come reticolo dei sottogruppi connessi una catena e si discutono alcuni risultati conseguenti.*

Presentiamo un progetto svolto in collaborazione con i Proff. K. Strambach e P. Plaumann del Matematisches Institut Universität Erlangen e il Dott. A. Di Bartolo dell'Università di Palermo.

Nello stesso numero del *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* in cui pubblica i suoi celebri risultati sulla teoria delle forme quadratiche, Ernst Witt introduce, in tre lavori, alcune fondamentali idee sulla teoria dei campi a valutazione discreta. In uno di essi [6], egli costruisce un elegante algoritmo per determinare ricorsivamente estensioni $\mathfrak{W}_n$ di anelli

$$0 \to \mathfrak{W}_{n-k} \to \mathfrak{W}_n \to \mathfrak{W}_k \to 0\,,$$

a partire dal campo di definizione $\mathsf{k} = \mathfrak{W}_1$, perfetto di caratteristica positiva p.

Nel contesto dei gruppi algebrici, per ogni n finito, il gruppo additivo dell'anello $\mathfrak{W}_n$, detto *gruppo di Witt*, fornisce un esempio di gruppo affine unipotente n-dimensionale, in cui ogni elemento g è tale che $p^n \cdot g = 0$. Qui esibiamo a mo' di esempio il gruppo $\mathfrak{W}_2$, definito sul piano affine dalla seguente operazione:

$$(x_0, x_1) + (y_0, y_1) = (x_0 + y_0, x_1 + y_1 + \Phi_1(x_0, y_0))\,,$$

(*) Con il contributo di: Deutsche Forschungsgemeinshaft (DFG STR 97/9-1), M.I.U.R., Università di Palermo.
(**) Comunicazione presentata a Milano in occasione del XVII Congresso U.M.I.

dove Φ_1 è il *factor-set* definito dal polinomio

$$\Phi_1(x_0, y_0) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(p-1)!}{i!(p-i)!} x_0^{p-i} y_0^i .$$

Tali gruppi $\mathfrak{W}_n$ costituiscono gli elementi per la classificazione dei gruppi algebrici unipotenti commutativi, apparsa in tale contesto in un lavoro di Iacopo Barsotti del 1958 [1], ma che era stata anticipata da un risultato analogo, valido per i gruppi formali, dimostrato da Jean Dieudonné [4], e che compare in lavori indipendenti di Maxwell Rosenlicht e Jean-Pierre Serre [5]. In base a tale classificazione, se $\mathfrak{G}$ è un gruppo unipotente connesso commutativo, esistono due omomorfismi di gruppi algebrici $\phi_1 \colon \mathfrak{G} \to W$, $\phi_2 \colon W \to \mathfrak{G}$ suriettivi e con nucleo finito, dove W è somma diretta di gruppi di Witt (cfr. [5], VII 10).

L'esposizione definitiva è però quella che viene data da Michel Demazure e Peter Gabriel sul loro *Groupes Algébriques* [3]. In quel volume poderoso viene esibita, tra l'altro, una famiglia di generatori per il modulo $\mathsf{H}^2(\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_1)$ dei cocicli, anche non commutativi, corrispondenti alle estensioni del gruppo $\mathfrak{W}_1$ con lo stesso gruppo $\mathfrak{W}_1$. Più precisamente, tale modulo libero destro e sinistro sull'anello degli endomorfismi di $\mathfrak{W}_1$ viene generato dalla famiglia di polinomi $\Phi_1(x_0, y_0)$ e $x_0 y_0^{p^k}$, con k intero positivo. Si osservi che Φ_1 genera allora il sottomodulo delle estensioni *commutative*.

Un esempio semplice, ma fondamentale, è costituito dal gruppo $\mathfrak{I}_2$, di dimensione due, delle matrici 3×3 unipotenti (a_{ij}), tali che $a_{23} = a_{12}^p$. Come ogni gruppo non commutativo di dimensione due, tale gruppo non può contenere, oltre al centro, un ulteriore sottogruppo di dimensione uno. Il fatto che tale gruppo contenga un unico sottogruppo connesso fa nascere una serie di questioni non prive d'interesse nell'ambito dei gruppi unipotenti non commutativi: è possibile determinare la struttura delle catene, definite come quei gruppi algebrici connessi aventi un solo sottogruppo connesso di data dimensione? quali sono i gruppi algebrici con centro di co-dimensione uno? quali con derivato di dimensione uno? quali contengono soltanto sottogruppi connessi normali?

Cominciando ad analizzare questi problemi, si riconosce subito il ruolo importante svolto dalle catene. Sebbene la definizione di catena possa darsi nel caso più generale, si riconosce che essa non perde ogni interesse soltanto nel caso in cui il gruppo algebrico è unipotente e definito su un campo k di caratteristica positiva p.

Gli stessi gruppi di Witt forniscono l'esempio più immediato di catena, anzi, in base a quanto detto sopra, un gruppo unipotente connesso commutativo $\mathfrak{G}$ di dimensione n è una catena se, e soltanto se, esistono due omomorfismi di gruppi algebrici $\phi_1 \colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{W}_n$, $\phi_2 \colon \mathfrak{W}_n \to \mathfrak{G}$, suriettivi e con nucleo finito.

Nel caso non commutativo, come si è visto, i gruppi di dimensione due sono sempre catene. In base al già citato teorema di struttura del modulo

$\mathsf{H}^2(\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_1)$, un gruppo non commutativo di dimensione due si può realizzare su un piano affine definendo il prodotto:

$$(x_0, x_1) * (y_0, y_1) = (x_0 + y_0, x_1 + y_1 + \Psi(x_0, y_0)),$$

dove si è posto

$$\Psi(x_0, y_0) = f_0(\Phi_1(x_0, y_0)) + \sum_{i=1}^{s} f_i(x_0 y_0^{p^i})$$

con $f_i(t)$ p-polinomio ($i = 0, \dots, s$). Si noti che il gruppo è non commutativo se, e soltanto se, esiste $i = 1, \dots, s$ tale che $f_i \neq 0$ e che l'esponente del gruppo è p se, e soltanto se, $f_0 = 0$. Tale esempio viene facilmente generalizzato considerando l'estensione centrale $\mathfrak{C}_n$ di gruppi:

$$0 \to \mathfrak{W}_{n-1} \to \mathfrak{C}_n \to \mathfrak{W}_1 \to 0,$$

definita dal prodotto

$$(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) * (y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, y_n) = (z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n)$$

$$\begin{cases} z_0 = x_0 + y_0; \\ z_1 = x_1 + y_1 + \Phi_1(x_0, y_0); \\ \vdots \\ z_{n-1} = x_{n-1} + y_{n-1} + \Phi_{n-1}(x_0, \dots, x_{n-2}, y_0, \dots, y_{n-2}); \\ z_n = x_n + y_n + f_0(\Phi_n(x_0, \dots, x_{n-1}, y_0, \dots, y_{n-1})) + \sum_{i=1}^{s} f_i(x_0 y_0^{p^i}). \end{cases}$$

dove i polinomi Φ_i sono quelli che definiscono il gruppo di Witt $\mathfrak{W}_n$.

Ebbene, se la caratteristica del campo di definizione è maggiore di due, questo esempio è sufficientemente generale: per ogni catena $\mathfrak{G}$ di dimensione n esiste una siffatta catena $\mathfrak{C}_n$ ed un omomorfismo suriettivo e con nucleo finito $\phi : \mathfrak{C}_n \to \mathfrak{G}$. Come corollario si trova subito che, per qualsiasi catena non commutativa n-dimensionale $\mathfrak{G}$, il derivato $\mathfrak{G}'$ ha dimensione uno e il centro $\mathfrak{z}\mathfrak{G}$ ha dimensione $n-1$.

È possibile inoltre caratterizzare le catene in base ad alcune proprietà del reticolo dei sottogruppi connessi, ad esempio si dimostra che il gruppo algebrico unipotente connesso $\mathfrak{G}$ è catena se e soltanto se esistono due sottogruppi $\mathfrak{S}$ e $\mathfrak{L}$, tali che $\mathfrak{L}$ è sottogruppo proprio di $\mathfrak{S}$ e i gruppi $\mathfrak{S}$ e $\mathfrak{G}/\mathfrak{L}$ sono catene. Sfruttando questo fatto e il risultato citato sulla struttura di una catena, si dimostra che, in caratteristica dispari,

– ogni sottogruppo massimale di $\mathfrak{G}$ è una catena se e soltanto se $\mathfrak{G}$ è una catena, oppure $\mathfrak{G}$ è un vector group di dimensione due, oppure $\mathfrak{G}$ è un gruppo unipotente 3-dimensionale, avente un sottogruppo algebrico di dimensione due non commutativo di esponente p;

– se $\mathfrak{G}$ possiede un unico sottogruppo connesso di dimensione uno allora o $\mathfrak{G}$ è catena, oppure contiene un sottogruppo algebrico di dimensione due non commutativo di esponente p;

– se $\mathfrak{G}$ possiede un unico sottogruppo connesso di co-dimensione uno allora o $\mathfrak{G}$ è catena, oppure contiene un sottogruppo algebrico normale $\mathfrak{L}$ di co-dimensione due, tale che $\mathfrak{G}/\mathfrak{L}$ è non commutativo.

Questi risultati conducono alla seguente caratterizzazione di una catena in termini del reticolo dei sottogruppi connessi:

$\mathfrak{G}$ è una catena se e soltanto se $\mathfrak{G}$ possiede un unico sottogruppo connesso di dimensione uno e un unico sottogruppo connesso di co-dimensione uno.

La conoscenza della struttura di questi gruppi elementari consente di iniziare un'indagine rivolta ai gruppi unipotenti non commutativi. Possono essere qui segnalati i primi risultati ottenuti, validi su un campo di caratteristica maggiore di due: riducendo le considerazioni ad un eventuale controesempio minimale, che risulterebbe essere una catena, si prova che è al più pari a due la classe di nilpotenza di un gruppo algebrico connesso in cui ogni sottogruppo connesso risulti normale.

Infine, l'ultimo risultato che vogliamo citare è la caratterizzazione dei gruppi algebrici affini connessi con centro di co-dimensione uno: si trova che un tale gruppo $\mathfrak{G}$ ha come derivato $\mathfrak{G}'$ un vector group (centrale). Viceversa, sotto la condizione che $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'$ sia il prodotto diretto di un toro e di una catena unipotente, se $\mathfrak{G}'$ è un vector group centrale, allora $\mathfrak{z}\mathfrak{G}$ ha co-dimensione uno. Ciò riduce il problema allo studio delle estensioni centrali, con derivato di dimensione uno, di un gruppo isogeno ad un gruppo di Witt con un gruppo unipotente di dimensione uno, isomorfo dunque a $\mathfrak{W}_1$. Tali estensioni o sono catene o sono isomorfe al gruppo fattoriale ottenuto quozientando il prodotto diretto di una catena commutativa e di un gruppo unipotente non commutativo di dimensione due, modulo un opportuno sottogruppo diagonale di dimensione uno.

Sebbene nell'ambito dei gruppi algebrici unipotenti il caso in cui la caratteristica del campo è due non si presenta mai come difforme, in tale caratteristica rimane a oggi non provato che una catena abbia il centro di dimensione massima, come non provati rimangono tutti i risultati conseguenti.

BIBLIOGRAFIA

[1] I. Barsotti, *On Witt vectors and periodic group-varieties*, Ill. J. Math., **2** (1958), 99-110; correction ibid., **2** (1958), 608-610.

[2] A. Borel, *Linear Algebraic Groups*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo 1991.

[3] M. DEMAZURE - P. GABRIEL, *Groupes Algébriques*, Masson & Cie, Paris, North-Holland, Amsterdam 1991.
[4] J. DIEUDONNÉ, *Lie groups and Lie hyperalgebras over a field of characteristic* $p > 0$ *(VIII)*, Amer. J. Math. LXXX, **3** (1958), 740-772.
[5] J. P. SERRE, *Groupes algébriques et corps de classes*, Actualités scientifiques et industrielles. 1264. Hermann, Paris 1959.
[6] E. WITT, *Zyklische Körper und Algebren der Charakteristik* p *vom Grad* p^n. *Struktur diskret bewerteter perfekter Körper mit vollkommenem Restklassenkörper der Charakteristik* p, J. Reine Angew. Math., **176** (1936), 126-140.

Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Via Archirafi 34 - 90123 Palermo

Pervenuta in Redazione
il 21 giugno 2004