Bollettino
Unione Matematica Italiana

Giorgio Patrizio

Foliazioni di Monge-Ampère e classificazione olomorfa

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **8-B** (2005), n.2, p. 299–321.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8B_2_299_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2005.

Bollettino U. M. I.
(8) 8-B (2005), 299-321

Foliazioni di Monge-Ampère e classificazione olomorfa.

GIORGIO PATRIZIO (*)

Summary. – *We shall describe some developements of the theory of Monge-Ampère foliations and of its applications to the classification of non compact complex manifolds.*

Sunto. – *Si illustrano alcuni sviluppi della teoria delle foliazioni di Monge-Ampère e delle sue applicazioni alla classificazione delle varietà complesse non compatte.*

1. – Introduzione.

Il problema della classificazione delle varietà complesse è centrale nelle considerazioni degli studiosi di Geometria e Analisi Complessa. Mentre per le superficie di Riemann il classico Teorema dell'Uniformizzazione fornisce una chiara, completa e unitaria soluzione, in dimensione maggiore il problema si dirama ed è alla base di una grande varietà di ricerche attuali. Per quanto riguarda la classificazione delle varietà non compatte, un punto di vista che ha prodotto importanti contributi negli ultimi 25 anni, si basa sulla teoria geometrica dell'equazione di Monge-Ampère omogenea complessa e intreccia teoria del potenziale con tecniche geometrico-differenziali. In questa conferenza illustrerò alcuni sviluppi significativi di questo approccio che estende a dimensione più alta alcune idee classiche della Teoria dell'Uniformizzazione.

Mi piace esprimere qui il mio vivo ringraziamento alla Presidenza e al Consiglio Scientifico dell'U.M.I. e al Comitato Organizzatore per l'invito a tenere questa conferenza, opportunità che mi onora.

(*) Conferenza tenuta a Milano l'11 settembre 2003 in occasione del XVII Congresso U.M.I.

2. – Motivazioni ed esempi.

L'uniformizzazione delle superficie di Riemann ha come strumento fondamentale la Teoria del Potenziale. Data una superficie di Riemann non compatta M e un suo punto p, l'idea chiave consiste nello studiare la questione dell'esistenza di potenziali armonici su $M\setminus\{p\}$ con singolarità logaritmica in p. Si presentano due possibilità mutualmente esclusive: nel caso iperbolico esiste un tale potenziale singolare limitato superiormente; nel caso parabolico esiste un tale potenziale singolare illimitato superiormente.

Questa dicotomia permette la classificazione delle superfie semplicemente connesse. Si dimostra infatti che, a meno di equivalenza biolomorfa, le due sole superficie non compatte semplicemente connesse sono la retta complessa $\mathbb{C}$, superficie parabolica, e il disco unitario $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, superficie iperbolica. L'unica superficie di Riemann semplicemente connessa compatta è la retta proiettiva $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Considerazioni di natura prevalentemente topologico permettono di concludere che ogni altra superficie di Riemann si ottiene, se iperbolica, come quoziente di Δ rispetto a un sottogruppo discreto di automorfismi o, se parabolica, come quoziente di $\mathbb{C}$. Questo è il caso esattamente di $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus\{0\} \cong \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ e dei tori complessi $T(\Gamma) = \mathbb{C}/\Gamma$, dove $\Gamma = \mathbb{Z} \oplus \omega\mathbb{Z}$ è un reticolo in $\mathbb{C}$. Un'esposizione dei dettagli di questo approccio all'uniformizzazione si può trovare nel bellissimo classico libro di Ahlfors [4] o, per citarte un testo recente, ad esempio in [5].

Contemporaneamente al completamento della dimostrazione del teorema dell'uniformizzazione portato a termine indipendentemente da Koebe ([28]) e da egli stesso ([40]), nel 1907 Poincaré osservava che i due più semplici domini limitati bidimensionali, il bidisco $\Delta \times \Delta$ e la palla $\mathbb{B}^2 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 < 1\}$ non sono biolomorficamente equivalenti ([39]). Dunque sin dai primi passi della teoria delle funzioni di più variabili complesse fu chiaro che, in dimensione maggiore di uno, persino restringendosi a varietà complesse molto particolari, nello studio del problema della classificazione a meno di equivalenza olomorfa si presentano fenomeni di natura radicalmente nuova. Si riconobbe subito dunque che non è possibile costruire una teoria dell'uniformizzazione paragonabile per eleganza, semplicità e efficacia a quella delle superficie di Riemann.

Il problema della classificazione delle varietà complesse, che in dimensione uno intreccia e unifica tecniche e risultati analitici, geometrico-differenziali e algebrici, in dimensione maggiore di uno si dirama perciò in diverse direzioni. Qui vogliamo illustrare quella che più direttamente cerca di sviluppare la relazione tra la teoria del potenziale, con le sue implicazioni geometriche, e la teoria delle funzioni di più variabili complesse.

L'idea è di considerare varietà complesse sulle quali sono definiti opportune funzioni potenziale che sono armoniche lungo sottovarietà complesse che foliano la varietà. Cominciamo presentando due esempi molto elementari ma utili per mettere a fuoco il punto di vista che si intende adottare.

Si tratta di due realizzazioni geometriche diverse di $\mathbb{C}^n$ (e di suoi domini particolari) accompagnato da funzioni «privilegiate» (potenziali) che permettono di ricapitolare la struttura geometrica considerata.

ESEMPIO 1. – $\mathbb{C}^n$ come unione di rette per l'origine.

Un modo naturale per «descrivere» $\mathbb{C}^n$ è quello di considerarlo come unione delle sue rette complesse passanti per l'origine. In questo modo $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ è foliato da rette complesse «puntate» (ossia con l'origine rimossa), una foliazione dunque che ha per fogli i fogli superficie di Riemann paraboliche. Chiudendo i fogli (ossia aggiungendo a ciascun foglio l'origine) si ottiene una foliazione di $\mathbb{C}^n$ singolare in 0. La singolarità della foliazione si può rimuovere considerando lo scoppiamento $E \to \mathbb{C}^n$ nell'origine dove la varietà complessa E si ottiene da $\mathbb{C}^n$ rimpiazzando l'origine con una copia dello spazio proiettivo complesso $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$. In questo modo – separando le direzioni all'origine – la foliazione in rette puntate di $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ si estende a una foliazione in rette non singolare di E. Si osservi che queste foliazioni sono ovviamente foliazioni olomorfe nel senso che nell'intorno di ogni punto si possono scegliere coordinate olomorfe in modo che una coordinata parametrizzi il foglio passante per il punto, le restanti $n-1$ parametrizzino localmente lo spazio dei fogli.

A questa struttura foliata di $\mathbb{C}^n$ si associa in modo naturale la funzione $u(z) = \log \|z\|^2$. La funzione u, che ha una singolarità logaritmica esattamente nell'origine dove è singolare la foliazione, è plurisubarmonica, ossia verifica la seguente condizione di convessità su $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$:

$$dd^c u = \frac{i}{2\pi} \partial \bar{\partial} u = \frac{i}{2\pi} \sum \frac{\partial^2 u}{\partial z^j \, \partial \bar{z}^k} dz^j \wedge d\bar{z}^k \geqslant 0 \, .$$

Inoltre le restrizioni di u alle rette per l'origine, ossia ai fogli della foliazione che stiamo considerando, sono armoniche con singolarità logaritmica. In effetti si può dimostrare che per ogni $z_0 \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ l'unica superficie di Riemann in $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ passante per z_0 è esattamente la retta (puntata) per l'origine passante per z_0. Infine la metrica naturale di $\mathbb{C}^n$, ossia quella euclidea, ha per potenziale esattamente la funzione $\tau(z) = \|z\|^2 = e^{u(z)}$. La forma di Khäler della metrica euclidea è infatti $dd^c \tau = \frac{i}{2\pi} \partial \bar{\partial} \tau = \frac{i}{2\pi} \sum dz^j \wedge d\bar{z}^j > 0$.

La palla unitaria $\mathbb{B}^n = \{\|z\|^2 < 1\} = \{u < 0\}$ in $\mathbb{C}^n$ ha ovviamente una presentazione geometrica dello stesso tipo. In questo caso si considera $\mathbb{B}^n$ come unione di dischi per l'origine e i dischi puntati foliano, in modo olomorfo, $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$. Tutti i fogli della foliazione in questo caso sono superficie di Riemann iperboliche. Di nuovo la funzione $u(z) = \log \|z\|^2$ è plurisubarmonica su $\mathbb{B}^n$ e ha restrizioni armoniche (con una singolarità logaritmica) su ciascun foglio della foliazione.

Per concludere la chiacchierata su questo esempio, osserviamo che occorre aver presente che la stessa struttura foliata su una varietà può essere collegata a diverse scelte di funzione plurisubarmonica associata. In altre parole, su $\mathbb{C}^n$ si possono scegliere altre funzioni plurisubarmoniche che hanno restrizione armonica (con una singolarità logaritmica) sulle rette per l'origine.

Sia $\tau_g(z) = g(z)\|z\|^2$ liscia e strettamente plurisubarmonica su $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ per qualche funzione reale g costante su le rette complesse per l'origine. Allora si vede facilmente che $u_g = \log \tau_g$ è plurisubarmonica su $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ con restrizione armonica alle rette complesse «puntate» per l'origine. La diversa scelta di u_g corrisponde a un modi non olomorficamente equivalenti di «invadere» $\mathbb{C}^n$. La metrica che ha potenziale τ_g è (un multiplo di) quella euclidea se e solo se g è costante e questo succede se e solo se τ_g è liscia su $\mathbb{C}^n$. Inoltre se g è costante i domini di sottolivello $D_g = \{\tau_g < 1\}$ sono palle centrate nell'origine; in generale, per g liscia arbitraria, D_g è un dominio circolare completo ossia se $z \in D_g$ allora $\lambda z \in D_g$ per ogni $\lambda \in \overline{\Delta} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$. Al variare di g, la famiglia $\{D_g\}$ è molto grande. Infatti se denotiamo con $\sim$ l'equivalenza a meno di biolomorfismi, allora $\{D_g\}/_\sim$ è una famiglia infinito dimensionale [36].

Esempio 2. – $\mathbb{C}^n$ come complessificazione di $\mathbb{R}^n$.

Per ogni retta reale $r \subset \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n \oplus i\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{C}^n$ sia $L_r \subset \mathbb{C}^n$ l'unica retta complessa con $r \subset L_r$. Allora se $r_1 \neq r_2$ necessariamente si ha $L_{r_1} \cap L_{r_1} \subset \mathbb{R}^n$. Inoltre $L_r \setminus r$ è l'unione di due semipiani per ogni retta reale $r \subset \mathbb{R}^n$. Dunque $\mathbb{C}^n \setminus \mathbb{R}^n$ è foliato dai semipiani ottenuti in questo modo. Questa foliazione non è olomorfa e i fogli sono tutti iperbolici; inoltre, chiudendo i fogli, si ottienne una foliazione di $\mathbb{C}^n$ singolare lungo $\mathbb{R}^n$. Anche in questo caso è semplice trovare una funzione plurisubarmonica privilegiata associata a questa costruzione. La funzione

$$u(z) = \sqrt{\sum (Im\, z_j)^2}$$

è plurisubarmonica e liscia su $\mathbb{C}^n \setminus \mathbb{R}^n$ (ossia $dd^c u \geq 0$) e continua su tutto $\mathbb{C}^n$. Inoltre ha restrizione armonica su ciascun foglio della foliazione di $\mathbb{C}^n \setminus \mathbb{R}^n$ in semipiani descritta sopra. Si osservi inoltre che la funzione $\varrho = u^2$ è strettamente plurisubarmonica ed è un potenziale per la metrica euclidea: $dd^c \varrho = \dfrac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\varrho = \dfrac{i}{2\pi}\sum dz^j \wedge d\overline{z}^j > 0$.

In ambedue gli esempi si presenta una varietà complessa come varietà foliata in superficie di Riemann nel complemento di una sottovarietà (complessa compatta nel primo esempio, totalmente reale nel secondo). Questa struttura geometrica è accompagnata da una funzione plurisubarmonica u che ha restrizione armonica esattamente sui fogli della foliazione. In ambedue i casi una opportuna funzione di u è strettamente plurisubarmonica, si estende liscia anche all'insieme singolare per la foliazione, e definisce una metrica naturale per la varietà in questione. Si osservi, inoltre, che in tutti i casi i fogli della foliazione considerata sono totalmente geodetici per questa metrica. In quel che segue investigheremo questo tipo di struttura.

3. – Foliazioni di Monge-Ampère.

Cominciamo fornendo la tecnologia minima indispensabile. Sia N una varietà complessa con $dim_{\mathbb{C}} N = n$ e sia $u : N \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^{∞}. Rispetto a una qualunque scelta di coordinate olomorfe, useremo le usuali notazioni per le derivate:

$$u_j = \frac{\partial u}{\partial z^j} \qquad u_{\bar{k}} = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}^k} \qquad u_{j\bar{k}} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^j \, \partial \bar{z}^k} \qquad \text{ecc.}$$

Con $d = \partial + \bar{\partial}$ si indica la decomposizione del differenziale nella parte $\mathbb{C}$-lineare e nella parte $\mathbb{C}$-coniugato lineare; si definisce inoltre $d^c = \frac{i}{2\pi}(\bar{\partial} - \partial)$. Di conseguenza

$$dd^c u = \frac{i}{2\pi} \partial \bar{\partial} u =_{\text{localmente}} \sum u_{j\bar{k}} dz^j \wedge d\bar{z}^k .$$

Per definizione u si dice *plurisubarmonica* se e solo se

$$dd^c u \geqslant 0 \ \Leftrightarrow_{\text{loc.}} (u_{j\bar{k}}) \geqslant 0 \, ,$$

mentre si dice *strettamente plurisubarmonica* se $dd^c u > 0$. La funzione u soddisfa *l'equazione di Monge-Ampère omogenea complessa* se

$$(dd^c u)^n = \underbrace{dd^c u \wedge \ldots \wedge dd^c u}_{n \text{ volte}} = 0 \, . \tag{1}$$

Dato che localmente $(dd^c u)^n = n! \left(\frac{i}{2\pi} \right)^n \det(u_{j\bar{k}}) \, dz^1 \wedge \ldots \wedge dz^n d\bar{z}^1 \wedge \ldots \wedge d\bar{z}^n$, rispetto a coordinate locali la (1) equivale a

$$\det(u_{j\bar{k}}) = 0 \, . \tag{2}$$

Si vede subito che su superficie di Riemann, quando $n = 1$, l'equazione di Monge-Ampère omogenea complessa è l'equazione di Laplace.

Se valgono condizioni di non degenericità aggiuntive, una soluzione dell'equazione di Monge-Ampère induce una foliazione in superficie di Riemann della varietà N che la supporta. Studiate sistematicamente per la prima volta in [7], queste foliazioni, chiamate appunto *foliazioni di Monge-Ampère* sono strumento geometrico essenziale in questo contesto. Introduciamo questa costruzione seguendo [11], [36], [37], [41], [48], [49].

Cominciamo richiedendo che una soluzione dell'equazione (1) soddisfi condizioni aggiuntive. Sia $\varrho = h(u)$ con h definita da una delle seguenti scelte (tutte utili in differenti applicazioni):

$$h(t) = \begin{cases} e^t, \\ t^2, \\ \cosh t\,, \\ \log(1+\cosh u)\,. \end{cases} \tag{3}$$

Allora abbiamo la seguente

Proposizione 3.1. – *Siano $u : N \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ e $\varrho = h(u)$ definita da* (3). *Se*

$$dd^c\varrho > 0\,, \quad dd^c u \geqslant 0 \quad \text{e} \quad (dd^c u)^n = 0\,, \tag{4}$$

allora

(*i*) *$du \neq 0$ e $rk(dd^C u) =_{\mathrm{loc}} rk(u_{j\bar{k}}) = n-1$;*

(*ii*) *in ogni punto $p \in N$ la forma $dd^c u$ è positiva su* $\ker \partial u(p)$, *lo spazio delle direzioni complesse tangenti all'ipersuperficie di livello di u per p, e esiste una retta complessa $\mathcal{L}_p \subset T_p N$ tale che $dd^c u_{|\mathcal{L}_p} \equiv 0$.*

Il punto (*i*) segue da calcoli elementari, il punto (*ii*) è conseguenza del fatto che le ipersuperficie di livello sono regolari perché $du \neq 0$ e strettamente pseudoconvesse perché ipersuperficie di livello di ϱ che è strettamente plurisubarmonica. Dunque necessariamente u deve avere forma di Levi definita positiva sullo spazio tangente olomorfo di ogni punto di una ipersuficie di livello. D'altra parte, dato che u soddisfa (1), necessariamente per ogni punto esiste una direzione complessa lungo la quale $dd^c u$ si annulla. Si osservi infine che la condizione $dd^c\varrho > 0$ non dipende dalla scelta di h in (3) nel senso che se vale per una scelta di h, vale anche per le altre.

La famiglia $\mathcal{L} = \{\mathcal{L}_p\}_{p \in N} = Ann\, dd^c u$ definisce una distribuzione di rango complesso 1 su N che per il teorema di Frobenius è integrabile dato che la forma $dd^c u$ è chiusa. Le sottovarietà integrali massimali – che a priori sono varietà reali di dimensione 2 – sono tutte sottovarietà complesse di dimensione 1. Questo segue dal fatto che $dd^c u$ è una forma di tipo (1,1) e quindi invariante rispetto alla struttura quasi-complessa J.

Dato che la forma $dd^c u$ è nulla sugli spazi tangenti a ogni varietà integrale di $\mathcal{L}$, per costruzione una superficie di Riemann in N è una porzione di sottovarietà integrale se e solo se la restrizione su di essa di u è armonica. Si può dunque concludere che vale il seguente

TEOREMA 3.2. – *Siano $u : N \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ e $\varrho = h(u)$ definita da* (3). *Se*

$$dd^c \varrho > 0, \quad dd^c u \geqslant 0 \quad e \quad (dd^c u)^n = 0\,, \tag{5}$$

la distribuzione $\mathcal{L} = Ann\, dd^c u$ è integrabile e definisce una foliazione di N in superficie di Riemann chiamata Foliazione di Monge-Ampère associata a u. Per ogni punto $p \in N$, il foglio L_p passante per p è la superficie di Riemann massimale in N passante per p tale che $u_{|L_p}$ sia armonica.

Come si è osservato negli esempi del paragrafo 2, ci si può chiedere se una foliazione di Monge-Ampère sia olomorfa o meno. È immediato osservare la foliazione è olomorfa se e solo se la distribuzione $\mathcal{L} = Ann dd^c u$ che la definisce, che è sempre di classe C^∞, è olomorfa. Ricordiamo brevemente come si affronta questo problema. Occorre fissare una scelta particolare per h in (3). Sia $\tau = e^u$ e supponiamo che valga (3) per u e $\varrho = \tau$. Allora la forma $dd^c \tau > 0$ è la forma di Kähler di una metrica κ su N. Sia Z il *gradiente complesso* di τ ossia il campo vettoriale di tipo (1, 0) duale di $\bar\partial$ rispetto a κ. Ossia Z è il campo tale che per ogni campo W di tipo (1, 0) risulta:

$$\bar\partial(\overline{W}) = \kappa(Z, W)\,. \tag{6}$$

Dato che localmente la (6) equivale a $\sum\limits_k \tau_{\bar k} \overline{W}_k = \sum\limits_{j,k} Z_j \tau_{j\bar k} \overline{W}_k$ allora in coordinate locali abbiamo

$$Z = \sum_k Z_j \frac{\partial}{\partial z^j} = \sum_k \tau^{j\bar k} \tau_{\bar k} \frac{\partial}{\partial z^j}\,. \tag{7}$$

Si ha il seguente

TEOREMA 3.3. – *Siano $u : N \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ e $\tau = e^u$. Se*

$$dd^c \tau > 0, \quad dd^c u \geqslant 0 \quad e \quad (dd^c u)^n = 0\,,$$

Allora:

(*i*) *La distribuzione $\mathcal{L} = Ann\, dd^c u$ è un sottofibrato banale di rango uno del fibrato $T^{1,0}N$ generato globalmente dal gradiente complesso $Z \neq 0$ di τ.*

(*ii*) *Il gradiente complesso $Z \neq 0$ di τ ha restrizione olomorfa a ciascun foglio della foliazione di Monge-Ampère.*

(*iii*) *La foliazione di Monge-Ampère è olomorfa* $\Leftrightarrow$ $\mathcal{L}$ *è olomorfo* $\Leftrightarrow$ Z *è olomorfo* (*ossia se le sue componenti* Z_j *definite in* (7) *sono funzioni olomorfe*).

La dimostrazione del Teorema 2.3, che si avvale anche di importanti idee introdotte in [6], è dovuta a Stoll ([41]).

4. – Foliazioni con singolarità in un punto (o in una sottovarietà complessa).

In questa sezione ci occuperemo della situazione illustrata nel primo esempio del paragrafo 2. Il risultato «classico» in questo contesto che ha motivato molta della ricerca successiva è il seguente Teorema di Stoll ([41] e per dimostrazioni alternative [11], [48]):

TEOREMA 4.1. – *Sia M una varietà complessa (connessa) con* $\dim_{\mathbb{C}} M = n$. *Esiste una esaustione $\tau : M \to [0, R)$, per $R = 1$ o $R = +\infty$, di classe C^∞ tale che*

$$dd^c\tau > 0 \quad su\ M \quad e \quad (dd^c \log\tau)^n = 0 \quad su\ M \setminus \{\tau = 0\} \tag{8}$$

se e solo se

- $R = 1$ *e esiste una applicazione biolomorfa $F : \mathbb{B}^n \to M$ con $\tau(F(z)) = \|z\|^2$ $\forall z \in \mathbb{B}^n$*

oppure

- $R = +\infty$ *e esiste una applicazione biolomorfa $F : \mathbb{C}^n \to M$ con $\tau(F(z)) = \|z\|^2$ $\forall z \in \mathbb{C}^n$.*

Il Teorema di Stoll è una estensione diretta a varietà di dimensione maggiore del Teorema di Uniformizzazione per superficie di Riemann non compatte. Ricordiamo qui brevemente le idee necessarie per lo sviluppo della dimostrazione. Intanto si osservi si può dimostrare che le condizioni (8), apparentemente meno restrittive, assicurano che su $M \setminus \{\tau = 0\}$ si ha anche $dd^c \log\tau \geqslant 0$. Dunque su $N = M \setminus \{\tau = 0\}$ è definita una foliazione di Monge-Ampère associata a $u = \log\tau$. Lo studio della struttura degli insiemi minimali di funzioni strettamente plurisubarmoniche, insieme al fatto che $(dd^c \log\tau)^n = 0$, permette di concludere che $\{\tau = 0\} = \{p\}$: un insieme puntiforme! Il resto della dimostrazione consiste nel considerare l'esponenziale $F = Exp_p$ della metrica definita dalla forma di Kähler $dd^c\tau$. Una analisi attenta che utilizza di nuovo in modo cruciale il fatto che $(dd^c \log\tau)^n = 0$ dimostra che F trasforma dischi unitari per l'origine se $R = 1$ (o rette complesse per l'origine se $R = +\infty$) bi-olomorficamente nella chiusura di fogli della foliazione di Monge-Ampère associata a $\log \tau$. Dato che F è di classe C^∞, il fatto che sia olomorfa segue da considerazioni elementari. Il teorema di Stoll ha stimolato numerose ricerche negli anni '80 delle quali non si può dare conto completo qui. Ci limitiamo a ricordare alcuni sviluppi e generalizzazioni che hanno avuto un rilievo particolare. In particolare ci sono classi di esempi di varietà che supportano esaustioni τ soddisfacenti versioni rilassate di (3). In particolare è naturale richiedere che τ sia solo debolmente plurisubarmonica sull'insieme minimale $\{\tau = 0\}$ o addirittura che τ non sia liscia su di esso.

Per quanto riguarda il primo tipo di esempi si tratta di considerare verietà non di Stein che ammettono sottovarietà complesse compatte. Esempio elementare di questo fenomeno è lo scoppiamento nell'origine di $\mathbb{C}^n$ con l'esaustione pull-back della norma al quadrato. Più in generale ha una tale struttura un qualunque fibrato in rette complesse negativo su una varietà proiettiva, insieme con l'esaustione definita da una potenza della metrica hermitiana considerata. Una estensione a questa situazione più generale è data dal seguente risultato di D. Burns ([11]):

TEOREMA 4.2. – *Sia M una varietà complessa connessa con $\dim_{\mathbb{C}}(M) = n$. Esiste una esaustione $\tau : M \to [0, +\infty)$ di classe C^∞ tale che su $N = M \setminus \{\tau = 0\}$*

$$dd^c \tau > 0 \quad e \quad (dd^c \log \tau)^n = 0 \quad su \ M \setminus \{\tau = 0\} \tag{9}$$

se e solo se esiste un fibrato $Q \to V$ in rette negativo su $(n-1)$-varietà proiettiva V con metrica hermitiana h su Q e un biolomorfimo $F : \widehat{Q} \to \widehat{M}$ di quozienti di Remmert con $\tau(F(Z)) = h^m(Z)$ per m intero positivo. Se $M = \widehat{M}$ è di Stein, allora $\widehat{Q} = \mathbb{C}^n$ e $\tau(F(Z))$ è un polinomio omogeneo di tipo (p, p).

Il punto cruciale della dimostrazione è provare che che la foliazione di Monge-Ampère è olomorfa ossia che il gradiente complesso di τ è olomorfo su $M \setminus \{\tau = 0\}$. Dai risultati di Bedford-Burns ([6]) e Stoll ([41]) segue che questo equivale a dimostrare che la metrica $dd^c \tau$ abbia curvatura di Ricci nulla lungo i fogli della foliazione. Il risultato si ottiene allora con un argomento tipo lemma di Ahlfors che dipende dal fatto che, dato che l'esaustione è illimitata, i fogli sono superficie di Riemann paraboliche.

Se si assume che la foliazione di Monge-Ampère sia olomorfa si hanno buoni risultati di classificazione anche nel caso di varietà con esaustioni limitate superiomente. Il risultato più generale è il seguente (Wong [49])

TEOREMA 4.3. – *Sia D un dominio dominio strettamente pseudoconvesso contenuto in una varietà di Stein M con $\dim_{\mathbb{C}}(M) = n$ e sia $\tau : \overline{D} \to [0, 1]$*

esaustione continua, di classe C^{∞} *su* $N = \overline{D} \setminus \{\tau = 0\}$ *e tale che su* N:

(10) $\quad dd^c \tau > 0, \quad (dd^c \log \tau)^n = 0$

e la foliazione di Monge-Ampère è *olomorfa su* N.

Allora

(*i*) *D è biolomorfo a un dominio strettamente pseudoconvesso* $D_0 \subset \mathbb{C}^n$ *circolare pesato generalizzato completo ossia invariante rispetto alla* $\mathbb{C}$-*azione defınta, per certi* $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}_+$, *da*

$$Z = (z_1, \ldots, z_n) \mapsto (e^{\mu_1 \zeta} z_1, \ldots, e^{\mu_n \zeta} z_n)$$

(ii) *Se i fogli della foliazione di Monge-Ampère sono chiusi, D è biolomorfo a un dominio strettamente pseudoconvesso* $D_0 \subset \mathbb{C}^n$ *circolare pesato generalizzato completo ossia invariante rispetto alla* $\mathbb{C}^*$-*azione defınta, per certi* $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{Q}_+$, *da*

$$Z = (z_1, \ldots, z_n) \mapsto (\zeta^{q_1} z_1, \ldots, \zeta^{q_n} z_n)$$

Una caratterizzazione analoga basata sulla prescrizione del comportamento asintotico di τ sull'insieme singolare $\{\tau = 0\}$ vale per domini circolari completi (Patrizio [35]).

D'altra parte in generale, nel caso di esaustioni limitate superiormente, non è possibile una classificazione semplice. Infatti la foliazione di Monge-Ampère non è quasi mai olomorfa! Esiste una larga classe di esempi in cui compaiono «naturalmente» foliazioni di Monge-Ampère non olomorfe singolari in punto. Ricordiamo una definizione. La *pseudometrica di Kobayashi* κ_M di una varietà complessa M è definita da

(11) $$\kappa_M(p; v) = \inf\{|\xi| \,|\, \exists \phi \in Hol(\varDelta, M) : d\phi_0(\xi) = v\}$$

per ogni $p \in M$ e $v \in T_p M$. La pseudometrica di Kobayashi in generale è una (pseudo)metrica di Finsler complessa (ossia l'assegnazione di una (pseudo)norma C^*-invariante su ogni spazio tangente) semicontinua superiormente. La distanza integrale associata a κ_M è la *(pseudo)distanza di Kobayashi*. È ben noto che per il disco unitario $\kappa_\varDelta$ è la metrica di Poincaré e più in generale $\kappa_{\mathbb{B}^n}$ è la metrica di Bergmann della palla unitaria. In effetti κ_M è una metrica hermitiana se e solo se M è una palla o il quoziente di una palla.

Le nozioni di pseudometrica e pseudodistanza di Kobayashi sono utilissime nello studio delle varietà complesse per le loro proprietà di invarianza. Infatti le applicazioni olomorfe non dilatano né l'una né l'altra e i biolomorfismi sono isometrie. Esse sono inoltre lo strumento appropriato per estendere la nozione di iperbolicità in dimensione maggiore di uno: una varietà complessa si dice iperbolica (completa) se la pseudodistanza di Kobayashi è effettivamente una distanza (completa), ossia se due punti sono a distanza nulla se e solo se coincidono.

Proprio per studiare le proprietà geometriche e la teoria delle funzioni delle varietà iperboliche, Vesentini ([45] e [46]) introdusse il concetto di *geodetica complessa* ossia di immersione olomorfa isometrica di dischi considerati con la metrica di Poincaré in varietà iperboliche considerate con la metrica e la distanza di Kobayashi che realizzano quindi le metriche intriseche.

L'esistenza di geodetiche complesse permette di affrontare numerose questioni importanti ma in genere non è purtroppo facile da verificare. In un lavoro fondamentale e celebrato di L. Lempert ([29]) si dimostra l'esistenza di geodetiche complesse per domini strettamente convessi. Sorprendentemente Lempert scopre inoltre un legame strettissimo fra metriche intrinseche e foliazioni di Monge-Ampère. Risulta infatti che la foliazione in geodetiche complesse passanti per un punto di un dominio strettamente convesso è la foliazione di Monge-Ampère associata a una soluzione dell'equazione costruita proprio a partire dalla distanza di Kobayashi. I risultati di Lempert possono essere sintetizzati nel modo seguente:

TEOREMA 4.4. – *Siano $D \subset \mathbb{C}^n$ limitato, liscio, strettamente convesso, $p \in D$, δ_p la distanza di Kobayashi da p. Allora*

(*i*) $\kappa_D \in C^\infty(TD \setminus \{\textit{sezione nulla}\})$ *e* $\delta_p \in C^\infty(D \setminus \{p\})$;

(*ii*) $dd^c(\tanh \delta_p) > 0$ *e* $(dd^c(\log \tanh \delta_p))^n = 0$ *su* $D \setminus \{p\}$ *con* $\log \tanh \delta_p(z) = O(\log|z-p|)$ *vicino p*;

(*iii*) *per ogni direzione tangente $v \neq 0$ in p esiste una unica geodetica complessa per la metrica e la distanza di Kobayashi passante per p e collineare a v. Le geodetiche complesse per la metrica e la distanza di Kobayashi passanti per p sono le chiusure dei fogli della foliazione di Monge-Ampère associata a* $\log \tanh \delta_p$.

Il Teorema mostra quanto sia ricco il panorama degli esempi di varietà che supportano esaustioni che soddisfano l'equazione di Monge-Ampère omogenea complessa con una singolarità logaritmica in un punto. Nella maggior parte di questi esempi infatti la foliazione di Monge-Ampère è non olomorfa. In effetti è noto che la maggior parte dei domini strettamente convessi è rigido, ossia ha gruppo di automorfismi ridotto all'identità.

Infatti, nella topologia naturale, l'insieme dei domini limitati strettamente pseudoconvessi con bordo liscio di classe C^2 è un aperto denso nell'insieme di tutti i domini limitati con bordo liscio di classe C^2 ([21]). D'altra parte dal seguente risultato ([34]) segue che se la foliazione di Monge-Ampère negli esempi prodotti dal Teorema 3.4 è olomorfa, allora il gruppo degli automorfismi del dominio contiene per lo meno un sottogruppo isomorfo a S^1:

TEOREMA 4.5. – *Siano* $D \subset \mathbb{C}^n$ *limitato, liscio, strettamente convesso.* $p \in D$, δ_p *la distanza di Kobayashi da p. Allora esiste un punto* $p \in D$ *tale che la foliazione di Monge-Ampère associata a* $u = \tanh \delta_p$ *è olomorfa se e solo se D è biolomorfo a un dominio circolare completo di* $\mathbb{C}^n$.

Costruzioni di esaustioni con le proprietà indicate nel Teorema 3.4 sono possibili a partire da considerazioni geometrico-differenziali. Senza entrare nei complicati dettagli tecnici, ricordiamo che come conseguenza della teoria sviluppata in [1] e [2] si ha il seguente risultato di esistenza. Nello spazio degli spazi di Finsler complessi (M, F), dove M è varietà complessa semplicemente connessa, F metrica di Kähler-Finsler complessa con curvatura olomorfa costante negativa e con opportune simmetrie della curvatura, esiste un aperto $\mathcal{A}$ contenente ($\mathbb{B}^n$, *Bergmann*) tale che se $(M, F) \in \mathcal{A}$ allora $F = \kappa_M$ e per ogni punto $p \in M$ valgono (*i*), (*ii*), (*iii*) del Teorema 3.4.

Ricordiamo infine che, per mezzo di ulteriori invarianti, è possibile descrivere uno spazio dei moduli infinito dimensionale per domini strettamente convessi con un punto fissato ([31] e [10]). Invece è completamente aperto il problema di caratterizzare a meno di biolomorfismi i domini strettamente convessi fra i domini strettamente pseudoconvessi. Nonstante non ci siano indicazioni concrete per suffragarla, è diffusa la convinzione che una tale caratterizzazione si devrobbe poter ottenere in termini delle speciali proprietà della metrica di Kobayashi insieme all'esistenza di potenziali che soddisfano l'equazione di Monge-Ampère omogenea complessa con singolarità logaritmica in un punto. Un risultato in questo ambito contribuirebbe a chiarire il ruolo della convessità reale in Analisi Complessa che proprio il contributo di Lempert ha rimesso per molti versi al centro dell'attenzione.

Più recentemente lo studio di foliazioni di Monge-Ampère con singolarità logaritmica si è rivolto a situazioni e applicazioni in cui o sono presenti fenomeni di degenericità o in cui viene a mancare la regolarità. Naturalmente in tutti e due i casi la geometria è in generale molto più ricca. Proponiamo due situazioni che illustrano queste problematiche.

La prima si ricollega al Teorema 3.2 e riguarda lo studio di soluzioni «molto» degeneri dell'equazione di Monge-Ampère per le quali si perde traccia della foliazione: la questione principale è «ritrovarla».

Cominciamo con un esempio. Sia $\tau : \mathbb{C}^n \to [0, +\infty)$ un polinomio omogeneo di *bigrado* (p,p) ossia tale che per $z \in \mathbb{C}^n$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ si abbia:

$$\tau(\lambda Z) = \lambda^p \bar{\lambda}^p \tau(Z) = |\lambda|^{2p} \tau(Z)$$

Supponiamo inoltre che τ sia positivo:

$$\tau(Z) \geqslant 0 \quad \text{e} \quad \tau(Z) = 0 \Leftrightarrow Z = 0$$

e plurisubarmonico su $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$

$$dd^c \log \tau \geqslant 0\,.$$

Dato che per $\lambda \in \mathbb{C}$ e $Z \in \mathbb{C}^n$

$$\log \tau(\lambda Z) = \log |\lambda|^{2p} + \log \tau(Z)$$

si vede subito che $u = \log \tau$ è armonica sulle rette complesse per l'origine (con singolarità nell'origine). Dunque

$$(dd^c \log \tau)^n = 0 \quad \text{su } \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$$

e possiamo concludere immediatamente che la foliazione in rette (puntate) per l'origine è la foliazione di Monge-Ampère associata a $u = \log \tau$. D'altra parte, dato che non abbiamo specificato altrimenti, il rango della $(dd^c \log \tau)$ non è a priori costante e quindi il suo annullatore non è una distribuzione di rango costante e neanche la teoria dell'integrabilità dei sistemi differenziali singolari non può essere utilizzata.

Per investigare questo fenomeno D. Burns ([11]) si è chiesto se un polinomio omogeneo positivo e psedoconvesso con logaritmo che soddisfa l'equazione di Monge-Ampère su $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ debba essere necessariamente omogeneo di bigrado (p, p). Questa domanda, nonstante la sua apparente ingenuità, in realtà va alla radice della questione e non ha trovato ancora risposta completa. Il problema consiste appunto nella ricerca di una tecnica geometrica per la ricostruzione della foliazione. Recentemente si è riuscito a rispondere affermativamente nel caso in cui il polinomio sia convesso. In questo caso ogni dominio di sottolivello del polinomio è convesso e quindi, per i risultati di Lempert ([29]), è foliato in geodetiche complesse per la metrica di Kobayashi. Utilizzando il principio del Massimo di Bedford e Taylor ([8]) e risultati di unicità per il problema di Dirichlet per l'equazione di Monge-Ampère 3, si riesce a «prolungare» la foliazione di un dominio di sottolivello a a quella di uno più grande e quindi a ottenere una foliazione con fogli parabolici su $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Adattando appropriatamente gli argomenti di [11], si dimostra che questa foliazione è olomorfa e si conclude il seguente ([25]):

TEOREMA 4.6. – *Sia P un polinomio omogeneo convesso positivo su $\boldsymbol{C}^n$ tale che $u = \log P$ è plurisubarmonico e soddisfa $(dd^c \log P)^n = 0$ su $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Allora P è un polinomio omogeneo di bigrado (k, k).*

L'altro esempio che vogliamo illustrare è la generalizzazione di un classico risultato di H. Cartan ([15]). Per due domini limitati $G_1, G_2 \subset\subset \mathbb{C}^n$ circolari completi (ossia tali che per $Z \in G_j$, $\lambda \in \Delta$ si ha $\lambda Z \in G_j$) un'applicazione $F : G_1 \to G_2$ è un biolomorfismo con $F(0) = 0$ se e solo se $F = dF_0$ è un isomorfismo lineare. Utilizzando metodi di dinamica complessa insieme con argomenti di teoria del potenziale per l'equazione di Monge-Ampère, si ottiene la seguente generalizzazione ([9]):

TEOREMA 4.7. – *G_1, $G_2 \subset\subset \mathbb{C}^n$ domini lim. circ.i completi, $F : G_1 \to G_2$ appl. olomorfa propria con sviluppo in polinomi omogenei*

$$F(Z) = P_k(Z) + P_{k+1}(Z) + \dots .$$

Allora $F(0) = 0$ e $P_k(Z)$ non degenere (ossia se $P_k(Z) = 0$ solo per $Z = 0$) $\Leftrightarrow$ $F = P_k$ è un'applicazione polinomiale omogenea.

La dimostrazione ha due pilastri fondamentali. A ogni dominio circolare completo è canonicamente associato un *funzionale di Minkowski* ossia una seminorma complessa positivamente omogenea di cui il dominio circolare è dominio di sottolivello. Dalle proprietà di omogeneità del funzionale di Minkowski di un dominio circolare completo, segue facilmente che il suo logaritmo soddisfa l'equazione di Monge-Ampère omogenea complessa su $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Il primo fatto cruciale è che, di nuovo applicando risultati di unicità derivanti dal principio del Massimo di Bedford e Taylor ([8]), si dimostra che il pull-back mediante un'applicazione olomorfa propria che fissa l'origine e soddisfa la condizione di non degenericità richiesta nell'enunciato del funzionale di Minkowski del codominio è unn potenza intera del funzionale di Minkowski del dominio. A partire da questo, l'altro passo consiste nel dimostrare che l'applicazione propria ristretta a una retta per l'origine è omogenea complessa e trasforma, almeno localmente, una foliazione di Monge-Ampère in una foliazione di Monge-Ampère. Qui la difficoltà consiste nel fatto che nonostante le foliazioni di Monge-Ampère siano ben definite per motivi geometrici, le funzioni che le definiscono sono solo continue. Si ricorre alla considerazione della corrente di Green associata all'applicazione (cf. ad esempio [18]), strumento sviluppato in dinamica complessa, che potrebbe risultare utile in situazioni analoghe nelle quali le condizioni di regolarità non permettono di utilizzare tecniche classiche.

5. – Foliazioni con singolarità lungo una sottovarietà reale.

Ci occupiamo ora della situazione illustrata nel secondo esempio del paragrafo 2. Il punto di vista in questo caso è quello della complessificazione. Un risultato molto classico ([47]) afferma che, per una una varietà analitica reale S, esiste sempre una varietà complessa $M \supset S$ tale che $\dim_{\mathbb{R}} S = \dim_{\mathbb{C}} M$ e X sia totalmente reale in M. Infatti si dimostra che esiste un intorno U di S in M diffeomorfo a TS. Questo fatto non è altro che una realizzazione del un principio generalissimo della complessificazione che emerge in molti settori della matematica. Pur essendo utile in molti contesti, ad esempio è stato sfruttato e reso molto noto nel famoso lavoro di H. Grauert ([20]) sull'immergibilità delle varietà analitiche reali, questo tipo di complessificazione è decisamente non «intriseco».

Ad esempio sia $S = \mathbb{R}^n$ o $S = D \subset \mathbb{R}^n$ un dominio limitato strettamente convesso. Allora il dominio tubolare $M_D = \mathbb{R}^n + iD$ «complessifica» $\mathbb{R}^n$ per ogni tale D. D'altra parte $M_{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n + i\mathbb{R}^n = \mathbb{C}^n$ non è biolomorfo ad alcun tubo $M_D = \mathbb{R}^n + iD$ con D limitato perché quest'ultimo è biolomorfo a un dominio limitato. Inoltre un risultato di Matsushima ([33]) prova che che due tubi M_{D_1} e M_{D_2} su domini strettamente convessi sono bilomorfi se e solo se le basi D_1 e D_2 sono affinemente equivalenti. Dunque l'insieme di queste complessificazioni di $\mathbb{R}^n$ modulo l'equivalenza biolomorfa è una famiglia infinito dimensionale.

È allora utile cercare un'altra nozione, meno generica, di complessificazione. L'idea consiste nel considerare una struttura Riemanniana sulla varietà reale e complessificare anche questa. Sia (S, g) una varietà Riemanniana analitica reale completa con $\dim_{\mathbb{R}} S = n$ e sia U un intorno aperto di S nel suo fibrato tangente TS. Una *struttura complessa adattata* per (S, g) su U è una struttura complessa tale che per ogni geodetica $\eta : \mathbb{R} \to S$,

$$\begin{array}{rcccc} d\eta : & \mathbb{C} & \simeq & T\mathbb{R} & \to & TS \\ & t + is & \simeq & \left(t;\, s\dfrac{\partial}{\partial t}\right) & \mapsto & d\eta_t\left(s\dfrac{\partial}{\partial t}\right) \end{array}$$

è olomorfa su $d\eta^{-1}(U) = V \supset \mathbb{R}$.

È evidente che per $\mathbb{R}^n$ con la metrica euclidea la struttura complessa adattata non è altro che la struttura complessa usuale su $\mathbb{C}^n$ che si considera identificato con il fibrato tangente $T\mathbb{R}^n$ nel modo ovvio. La descrizione geometrica della situazione è quella delineata nell'Esempio 2 del paragrafo 2 nel quale appunto si considera $\mathbb{C}^n$ come unione delle complessificazioni delle rette di $\mathbb{R}^n$.

Un esempio meno banale, ma altrettanto tipico, è la complessificazione della sfera unitaria

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \textstyle\sum x_j^2 = 1\}$$

che naturalmente ci si aspetta sia la iperquadrica affine

$$Q^n = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \textstyle\sum z_j^2 = 1\}.$$

In effetti la struttura complessa adattata per S^n con l'usuale metrica con curvatura costante 1 è quella indotta su TS^n dall'identificazione con Q^n data dal diffeomorfismo $F : TS^n \to Q^n$ definito per $x \in S^n$ e $\xi \in T_x S^n$ da

$$F(x;\, \xi) = \cosh \|\xi\| + i \frac{\sinh \|\xi\|}{\|\xi\|}\, \xi\,. \tag{12}$$

In questo caso i cerchi massimi di S^n, curve geodetiche per la metrica standard, si complessificano nell'identificazione fornita dall'applicazione F in quadriche ottenute intersecando Q^n con i piani complessi di $\mathbb{C}^{n+1}$ che si ottengono come complessificazioni di piani in $\mathbb{R}^{n+1}$.

Vi è un legame stretto tra questa idea di complessificazione basata sulla nozione di struttura olomorfa adattata e l'esistenza di potenziali di Monge-Ampère. Vale infatti il seguente:

TEOREMA 5.1. – *Sia M una varietà complessa con* $\dim_{\mathbb{C}} M = n$ *per la quale esista un'esaustione* $u : M \to [0, R)$, $0 < R \leqslant +\infty$, *in modo che, posti* $S = \{u = 0\}$ *e* $\varrho = u^2$, *si abbia*:

$$u \in C^\infty(\{u > 0\}) \cap C^0(M) \quad e \quad \varrho \in C^\infty(M) \tag{13}$$

$$dd^c \varrho > 0 \quad su \quad M \quad e \quad (dd^c u)^n = 0 \quad su \quad \{u > 0\} \tag{14}$$

e sia h la metrica su M con forma di Kähler $dd^c \varrho > 0$. *Allora*:

(i) *S è una sottovarietà totalmente reale di classe C^ω con* $\dim_{\mathbb{R}} S = n = \dim_{\mathbb{C}} M$;

(ii) *$\varrho \in C^\omega(M)$ e $g = h_{|S}$ è una metrica Riemanniana di classe C^ω*;

(iii) *M è biolomorfa a $T^R S = \{v \in TS \mid \sqrt{g(v, v)} < R\}$ equipaggiato con struttura complessa adattata a (S, g).*

Il punto (iii) del teorema è stato dimostrato sotto l'ipotesi che S è una sottovarietà totalmente reale di classe C^∞ in [37]. I punti (i) e (ii), che vanno intesi come risultati di regolarizzazione, sono stati successivamente provati rispettivamnte da D. Burns in [12] e da L. Lempert in [30]. I punti chiave della dimostrazione consistono nel riconoscere che l'insieme minimale S è una varietà totalmente geodetica di M rispetto alla metrica h e che le chiusure dei fogli della foliazione di Monge-Ampère (a loro volta sottovarietà totalmente geodetiche) associata alla funzione u intersecano S in geodetiche. Dato che inoltre la sottovarietà S è lagrangiana in M, la struttura complessa J_M definisce una isometria fra il fibrato tangente TS e il fibrato normale $NS = JTS$ a S in M. L'identificazione fra M e il fibrato tangente TS è la composizione di J_M con l'applicazione esponenziale normale S.

Si può rivisitare l'esempio della quadrica alla luce del Teorema 4. 1. In questo caso la funzione $u : Q^n \to [0, +\infty)$ definita sulla iperquadrica Q^n da

$$u(Z) = \cosh^{-1}(\|Z\|^2_{|Q^n}),$$

dove $\| \bullet \|^2_{|Q^n}$ è la restrizione a Q^n della norma al quadrato di $\mathbb{C}^n$, ha per insieme minimale la sfera n-dimensionale $u^{-1}(0) = S^n = Q^n \cap \mathbb{R}^{n+1}$ e soddisfa l'equazione di Monge-Ampère omogenea complessa $(dd^c u)^n = 0$ su $Q^n \setminus S^n$. La funzione $\varrho = u^2$ è di classe C^ω e strettamente plurisubarmonica su Q^n e la metrica

g su S^n, definita come restrizione della metrica di Kähler definita dalla forma $dd^c\varrho$, è la metrica standard della sfera S^n.

La foliazione di Monge-Ampère su $Q^n \backslash S^n$ associata a u si può descrivere nel modo seguente. Al variare dei piani $\Pi \in Gr_{\mathbb{R}}(2, n+1)$ nella Grassmanniana dei 2-piani in $\mathbb{R}^{n+1}$, se $\Pi_{\mathbb{C}}$ è la complessificazione di Π, allora

$$\Pi_{\mathbb{C}} \cap Q^n = C_\Pi^+ \cup \gamma_\Pi \cup C_\Pi^-$$

è una quadrica e γ_Π è un cerchio massimo in $S^n = Q^n \cap \mathbb{R}^{n+1}$. I fogli della foliazione di Monge-Ampère sono allora i C_Π^+ e C_Π^- al variare di $\Pi \in Gr_{\mathbb{R}}(2, n+1)$ e sono tutti biolomorfi a dischi bucati.

Si osservi infine che il pull-back sul fibrato tangente della sfera mediante S^n mediante il diffeomorfismo F definito da (12) dell'esaustione $u: Q^n \to [0, +\infty)$ che soddisfa l'equazione di Monge-Ampère è esattamente la norma $\|\bullet\|_{sf}$ della metrica standard della sfera:

$$u(F(x; \xi)) = \|\xi\|_{sf}.$$

La situazione descritta in questo esempio è tipica. Infatti le complessificazioni che abbiamo descritto esistono, almeno in un intorno della sezione nulla, per ogni varietà Riemanniana analitica reale e la struttura adattata è unica. Inoltre la norma della metrica soddisfa l'equazione di Monge-Ampère omogenea complessa. I risultati di esistenza e unicità noti si possono riassumere nel seguente:

TEOREMA 5.2. – *Sia* (S, g) *una varietà Riemanniana* C^ω *completa con* $\dim_{\mathbb{R}} S = n$. *Allora*:

(i) *Se su un aperto* $U \supset S$ *di* TS *è definita una struttura complessa adattata a* (S, g), *questa è unica*;

(ii) *su qualche aperto* $U_0 \supset S$ *di* TS *esiste la struttura complessa adattata a* (S, g);

(iii) *se* S *è compatta allora esiste una struttura complessa adattata su un intorno tubolare* $T^R S = \{v \in TS \mid \|v\|_g < R$;

(iv) *se* (S, g) *è una varietà omogenea compatta allora la struttura complessa adattata esiste su tutto* TS;

(v) *se* S *è compatta, esiste la struttura complessa adattata su* $T^R S$ *e si denotano* $u(v) = \|v\|_g$ *e* $\varrho = u^2$ *allora* $(dd^c u)^n = 0$ *su* $T^R S \backslash S$ *e* $(dd^c \varrho)^n > 0$ *su* $T^R S$.

L'esistenza e l'unicità di strutture olomorfe adattate su un intorno della sezione nulla nel fibrato tangente e la relazione con l'equazione di Monge-Ampère (i punti (i), (ii), (iii) e (v) del Teorema 4.2) sono state dimostrate indipendentemente e con approcci diversi da L. Lempert e R. Szöke ([32] e [42]) e da V. Guillemin e M. Stenzel ([19]); il punto (*iv*) del Teorema 4.2 è dovuto a Szöke ([43]). Il teorema è stato recentemente esteso a varietà di Finsler da T. Duchamp e M. Kalka ([17]). Questo risultato, che non riportiamo per evitare tecnicalità, è molto interessante perché copre moltissimi importanti esempi. Tra quelli già citati ricordiamo che un dominio tubolare $M_D \subset \mathbb{C}^n$ su un dominio limitato strettamente convesso liscio $D \subset \mathbb{R}^n$ ha la struttura complessa adattata a $(\mathbb{R}^n, F_D)$ dove F_D è la metrica di Finsler su $\mathbb{R}^n$ definita dal funzionale di Minkowski di D.

Una questione molto importante riguarda la ricerca del dominio massimale nel fibrato tangente sul quale è definita la struttura olomorfa adattata per una varietà Riemanniana. Per varietà compatte vi è una stima precisa per il raggio massimale $R_{\max}$ per il quale esiste la struttura complessa adattata su un dominio tubolare $T^R S$ per $R \leqslant R_{\max}$. In [32] si dimostra il seguente

TEOREMA 5.3. – *Sia (S, g) una varietà Riemanniana compatta di classe C^ω tale che esiste struttura complessa adattata su $T^R S$ per $R \leqslant R_{\max}$. Allora le curvature sezionali della metrica g sono $\geqslant -\dfrac{\pi^2}{4R^2}$. L'uguaglianza viene realizzata da varietà compatte di curvatura costante e implica che se (S, g) ha curvature sezionali limitate superiormente da una costante negativa allora non esiste struttura complessa adattata su tutto il fibrato tangente TS.*

Recentemente, motivate da questioni importanti di Teoria geometrica degli invarianti e da problemi di complessificazione di azioni di gruppi, sono stati condotti studi sui domini massimali di varietà su cui agiscono gruppi di trasformazioni (Si veda ad esempoio [14], [22], [23], [24]). In questo caso, piuttosto che a intorni tubolari della sezione nulla, è interessante studiare il dominio massimale generale di esistenza della struttura complessa adattata. Questo dominio infatti conserva intatte le informazioni della struttura geometrica in questione. Non approfondiremo questo tema limitandoci a sottolineare che compaiono nuovi e interessanti fenomeni. Per esempio queste complessificazioni naturali non sono in generale olomorficamente convesse. Ovviamente questo fatto pone non trascurabili problemi tecnici ma lascia intendere che la teoria ha possibili campi di applicazione molto più generali.

Per chiarire meglio il significato del Teorema 4.2 si osservi che, come conseguenza immediata dell'unicità della struttura complessa adattata, abbiamo il seguente:

COROLLARIO 5.4. – *Siano $(S_1, g_1), (S_2, g_2)$ varietà Riemanniane C^ω, e per qualche R, $M_1 = T^R S_1$, $M_2 = T^R S_2$ varietà di Stein con struttura* *complessa adattata. Allora un'isometria fra* (S_1, g_1) *e* (S_2, g_2) *si estende a un biolomorfismo fra* M_1 *e* M_2.

Combinando questo risultato con la teoria geometrica della foliazione di Monge-Ampère, si possono ottenere molte applicazioni alla caratterizzazione di varietà complesse speciali. A titolo di esempio ricordiamo un risultato recentemente ottenuto con Adriano Tomassini ([38]):

TEOREMA 5.5. – *Sia* M *una varietà complessa connessa, semplicemente connessa, con* $\dim_{\mathbb{C}} M = n$. *Allora* M *è biolomorfo alla iperquadrica affine* $Q^n \subset \mathbb{C}^{n+1}$ *se e solo se esiste un'esaustione* $\varrho : M \to [1, +\infty)$ *tale che, se* $u = \cosh^{-1} \varrho$, *risulti*

(i) $dd^c \varrho > 0$ su M e $(dd^c u)^n = 0$ su $\{u > 0\} = \{\varrho > 1\}$ e

(ii) *la curvatura bisezionale olomorfa di* $dd^c \varrho$ *è costante lungo le direzioni tangenti alla varietà minimale* $S = \{\varrho = 1\} = \{u = 0\}$.

Vogliamo ora accennare ad alcuni problemi sui quali si è concentrata la ricerca negli ultimi tempi. Il filo conduttore che li collega si può riassumere con il tentativo di determinare quando e in che misura il Corollario 4.4 ammetta il viceversa.

La questione si può porre in modo più rigoroso nel modo seguente. Siano $(S_1, g_1), (S_2, g_2)$ varietà Riemanniane di classe C^ω, e supponiamo che, con le notazioni utilizzate sopra, gli intorni tubolari $M_1 = T^R S_1 M_2 = T^R S_2$ siano varietà di Stein con struttura complessa adattata per qualche $R > 0$. Allora, sotto quali ipotesi si può concludere che se M_1 e M_2 sono biolomorfe allora necessariamente (S_1, g_1) e (S_2, g_2) sono isometriche?

Quando vale, questa proprietà di rigidità produce una corrispondenza precisa fra la geometria delle varietà Riemanniane (e dell'azione dei sottogruppi di isometrie) e la geometria delle varietà complesse (e dei sottogruppi del gruppo degli automorfismi) che è di grande interesse anche per le applicazioni. Dopo una serie di progressi parziali, recentemente sono stati dimostrati alcuni risultati che risolvono positivamente il problema in moltissimi casi. La situazione si può riassumere con il seguente

TEOREMA 5.6. – *Siano* $(S_1, g_1), (S_2, g_2)$ *varietà Riemanniane di classe* C^ω *e, per qualche* $R > 0$ *gli intorni tubolari* $M_1 = T^R S_1 M_2 = T^R S_2$ *siano varietà di Stein con struttura complessa adattata. Se*

(i) S_1 *e* S_2 *sono compatte*

oppure

(ii) S_1 *e* S_2 *sono omogenee,* $R < R_{\max}$ *e* $M_1, M_2 = T^R S_2$ *non sono quozienti della palla unitaria* $\mathbb{B}^n$.

allora se esiste un biolomorfismo $F : M_1 \to M_2$ *necessariamente* $F(S_1) = S_2$, $f = F_{|} S_1 : S_1 \to S_2$ *è una isometria e* $F = df : M_1 = T^R S_1 \to M_2 = T^R S_2$.

Sotto l'ipotesi (i) la conclusione è stata dimostrata da D. Burns e R. Hind ([13]), sotto l'ipotesi (ii) da Su-Jen Kan [26]. Il fatto chiave da provare per ottenere la dimostrazione del Teorema è constatare che la componente connessa dell'identità del gruppo degli automorfismi del tuboè isomorfa alla componente connessa dell'identità del gruppo delle isometrie della varietà Riemanniana. Sotto l'ipotesi (ii) questo si ottiene combinando tecniche di azioni di gruppi con argomenti tipici dello studio dei domini con gruppo di automorfismi non compatto. Invece sotto l'ipotesi (i), si utilizzano raffinati argomenti di geometria simplettica.

Dalla considerazione di classi di esempi quali ad esempio i domini tubolari di $\mathbb{C}^n$, risulta evidente che risultati di rigidità dello stesso genere dovrebbero essere veri anche per varietà complesse definite come intorni tubolari di varietà di Finsler analitiche reali con strutture complesse adattate.

Nel caso in cui la struttura complessa sia definita sull'intero fibrato tangente non ci si possono aspettare risultati analoghi. Infatti il gruppo degli automorfismi di una varietà di questo tipo potrebbe essere di dimensione infinita e quindi «non confrontabile» con il gruppo delle isometria della varietà Riemanniana di partenza. Questo corrisponde alla possibilità di «muovere» la varietà Riemanniana dentro la sua complessificazione per mezzo di automorfismi della complessificazione. Questo è quanto effettivamente accade per esempio nel caso dell'iperquadrica affine. Il primo risultato che ha messo in evidenza questo fenomeno è dovuto a R. Szöke ([42]):

TEOREMA 5.7. – *Esistono (due famiglie a un parametro) metriche* C^ω *sulla sfera* S^2 *diverse da quella euclidea per le quali esistono strutture complesse adattate su tutto* TS^2.

Questo Teorema, e altri fenonomeni dello stesso genere, a lungo è sembrato una evidenza negativa per la seguente congettura avanzata nel 1989 dall'autore e da P. M. Wong:

CONGETTURA: Sia M una varietà di Stein tale che $M = TS$ con la struttura complessa adattata per una varietà Riemanniana S diffeomorfa a una sfera. Allora M è biolomorfa a un iperquadrica affine.

La congettura è suffragata da un buon numero di evidenze tecniche. Se $M = TS$ è una varietà complessa di dimensione (complessa) n con la struttura complessa adattata per una varietà Riemanniana S, allora esiste una esaustione $u : M \to [0, \infty)$ con $S = \{u = 0\}$ che soddisfa l'equazione di Monge-Ampère $(dd^c u)^n = 0$ su $\{u > 0\} = M \setminus S$. Posto $\psi = \log(1 + \cosh u)$, allora ψ è strettamente pseudoconvessa su M e la metrica h con forma fondamentale $dd^c\psi$ ha volume finito ([37]). Nel caso in cui S è la sfera unitaria con la metrica standard e quindi che M è l'iperquadrica affine $Q\, n$, la metrica h è esattamente la restrizione della di Fubini-Study di $\mathbb{P}^{n+1}$ alla (porzione affine dell') iperquadrica. In generale l'esistenza di una tale metrica, alla luce del criterio di algebricità di Demailly ([16]) è il primo indizio che M sia biolomorfo a una varietà algebrica affine. Recentemente, in ([3]), D. Burns e R. Aguilar hanno dato una dimostrazione del fatto che una varietà complessa M, fibrato tangente di una varietà Riemanniana con la struttura complessa adattata, è biolomorfo a una varietà algebrica affine. Come conseguenza si ottiene una completa classificazione di tali varietà in dimensione 2 da cui segue la congettura (un simile argomento di classificazione è stato trovato anche da B. Totaro, [44]). Sfortunatamente un punto tecnico in [3] non sembra ancora completamente chiarito e quindi la congettura, persino in dimensione 2, è sicuramente provata solo assumendo che M sia algebrica affine.

La congettura è comunque completamente aperta in dimensione maggiore di 2 e affidarla al lettore interessato ci sembra un buon modo di concludere.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. Abate - G. Patrizio, *Finsler Metrics - A Global Approach. (with applications to geometric function theory)*, Springer Lecture Notes n. **1591** Springer Verlag, Berlin (1994).

[2] M. Abate - G. Patrizio, *Finsler Metrics - Kèlher Finsler manifolds of constant holomorphic curvature*, Int. J. of Math., 8 (1997), 169-186.

[3] R. Aguilar - D. Burns, *On the algebraicization of certain Stein anifolds*, Preprint 2001, arXiv:math.CV/0010287.

[4] L. V. Ahlfors, *Conformal Invariants*, Mc Graw Hill, New York (1973).

[5] A. F. Beardon, *A Primer on Riemann Surfaces*, Cambridge University Press, Cambridge (1984).

[6] E. Bedford - D. Burns, *Holomorphic Mapping of Annuli in $\mathbf{C}^n$ and the Associated Extremal Function*, Ann. Sc. Nor. Sup. Pisa, **VI** (1979), 381-414.

[7] E. Bedford - M. Kalka, *Foliations and Complex Monge-Ampère Equations*, Comm. Pure App. Math., **30** (1977), 543-571.

[8] E. Bedford - B. A. Taylor, *A new capacity for plurisuharmonic functions*, Acta Math., **149** (1982), 1-41.

[9] F. Berteloot - G. Patrizio, *A Cartan theorem for proper holomorphic mappings of complete circular domains*, Advances in Math., **153** (2000), 342-352.

[10] J. Bland - T. Duchamp, *Moduli for Pointed Convex Domains*, Invent. Math., **104** (1991), 61-112.

[11] D. Burns, *Curvature of the Monge-Ampère foliation and parabolic manifolds*, Ann. of Math., **115** (1982), 349-373.

[12] D. BURNS, *On the Uniqueness and Characterization of Grauert Tubes*, In *Complex Analysis and Geometry*, Dekker Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **173** (1995), 119-133.

[13] D. BURNS and R. HIND, *Symplectic geometry and the uniqueness of Grauert tubes*, Geom. and Funct. Anal., **11** (2001), 1-10.

[14] D. BURNS - S. HALVERSCHEID - R. HIND, *The geometry of Grauert tubes and complexification of symmetric spaces*, Duke Math. J., **118** (2003), 465-491.

[15] H. CARTAN, *Les fonctions de deux variables complexes et le problème de représentation analytique*, J. Math. Pures Appl., (9) **10** (1931), 1-114.

[16] J. P. DEMAILLY, *Mesures de Moge-Ampère et caractérizasatio géométrique des variétés algébriques affines*, Bull. Soc. Math. France, Memoire, **19** (1985).

[17] T. DUCHAMP - M. KALKA, *Singular Monge-Ampére foliations*, Math. Ann., **325** (2003), 187-209.

[18] J. E. FORNAESS - N. SIBONY, *Complex dynamics in higher dimensions, Complex Potential Theory, NATO ASI Series*, Mathematical and Physical Sciences-Vol. **439** (1994), 131-186.

[19] V. GUILLEMIN - M. STENZEL, *Grauert Tubes and the Homogeneous Monge-Ampère Equation*, J. of Diff. Geometry, **34** (1991), 561-570.

[20] H. GRAUERT, *On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds*, Ann. Math., **68** (1958), 460-472.

[21] R. E. GREENE - G. KRANTZ, *Deformation of Complex Structures, estimates of $\overline{\partial}$ Equation and Stabilty of the Bergmann Kernel*, Adv. of Math., **43** (1982), 1-86.

[22] S. HALVERSCHEID, *Maximal domains of definiton of adapted complex structures of symmetric spaces of non-compact type*, Schriftenreihe des Graduiertenkollegs Geometrie und Mathematische Physik, **39** (2001) Bochum: Univ. Bochum, Institut für Mathematik.

[23] S. HALVERSCHEID - A. IANNUZZI, *Maximal complexifications of certain homogeneous Riemannian manifolds*, Trans. Am. Math. Soc., **355** (2003), 4581-4594.

[24] A. T. HUCKLEBERRY - J. A. WOLF, *Cycles Spaces of Flag Domains: A Complex Geometric Viewpoint*, Preprint 2002, arXiv:math.RT/0210445.

[25] M. KALKA - G. PATRIZIO, *Polynomial Solutions of the Complex Homogeneous Monge-Ampère Equation*, Michigan Math. J., **52** (2004), 243-251.

[26] SU-JEN KAN, *On rigidity of Grauert tubes over homogeneous Riemannian manifolds*, To appear in J. reine angew. Math.

[27] M. KLIMEK, *Pluripotential Theory*, London Mathematical Society Monographs New Series, **6**, Oxford (1991).

[28] P. KOEBE, *Über die Uniformisierung beliebiger analityscher Kurven*, Göttinger Nachr. (1907), 191-210 e 633-669.

[29] L. LEMPERT, *La métrique de Kobayashi et la représantation des domaines sur la boule*, Bull. Soc. Math. France, **109** (1989), 427-474.

[30] L. LEMPERT, *Complex Structures on the Tangent Bundle of Riemannian Manifolds*, In *Complex Analysis an and geometry*, Plenum Press, (1993), 235-251.

[31] L. LEMPERT, *Holomorphic invariants, normal forms, and the moduli space of convex domains*, Annals of Math., **128** (1988), 43-78.

[32] L. LEMPERT, R. SZÖKE, *Global Solutions of the Homogeneous Complex Monge-Ampère Equation and Complex Structures on the Tangent Bundle of Riemannian Manifolds*, Math. Ann., **290** (1991), 689-712.

[33] Y. MATSUSHIMA, *On tube domains*, In Symmetric Spaces, short Courses presented at Washington Univ., Pure appl. Math. 8, Dekker, New York (1972), 255-270.

[34] G. PATRIZIO *Parabolic Exhaustions for Strictly Convex Domains*, Manuscripta Math., **47** (1984), 271-309.
[35] G. PATRIZIO, *A Characterization of Complex Manifolds Biholomorphic to a Circular Domain*, Math. Z., **189** (1985), 343-363.
[36] G. PATRIZIO - P. M. WONG, *Stability of the Monge-Amère Foliation*, Math. Ann., **263** (1983), 13-29.
[37] G. PATRIZIO - P. M. WONG, *On Stein Manifolds with Compact Symmetric Center*, Math. Ann., **289** (1991), 355-382.
[38] G. PATRIZIO - A. TOMASSINI, *A Characterization of Affine Hyperquadrics*, To appear in Annali di Matematica Pura e App.
[39] H. POINCARÉ, *Les fonctions analytiques de deux variables et la représantation conforme*, Rend.Circ. Matem. Palermo, **23** (1907), 185-220.
[40] H. POINCARÉ, *Sur l'uniformisation des fonctions analytiques*, Acta Math., **31** (1908), 1-63.
[41] W. STOLL, *The Characterization of Strictly Parabolic Manifolds*, Ann. Sc. Nor. Sup. Pisa, **VII** (1980), 87-154.
[42] R. SZÖKE, *Complex Structures on the Tangent Bundle of Riemannian Manifolds*, Math. Ann., **291** (1991), 409-428.
[43] R. SZÖKE, *Adapted Complex Structures and Riemannian homogeneous spaces*, Ann. Pol. Math., **LXX** (1998), 215-220.
[44] B. TOTARO, *Complexifications of nonnegatively curved manifolds*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS), **5** (2003), 69-94.
[45] E. VESENTINI, *Variations on a theme of Carathéodory*, Ann. Sc. Nor. Sup. Pisa, **VI** (1979), 39-68.
[46] E. VESENTINI, *Complex geodesics*, Comp. Math., **44** (1981), 375-394.
[47] H. WHITNEY - F. BRUHAT, *Quelques propriétés fondamentales des ensembles analytiques-réels*, Comment. Math. Helv., **22** (1959), 132-160.
[48] P. M. WONG, *Geometry of the homogeneous complex Monge-Ampère equation*, Inv. Math., **67** (1982), 261-274.
[49] P. M. WONG, *On Umbilical Hypersurfaces and Uniformization of Circular Domains*, Proc. Symp. in Pure Math., **41** (1984), 225-252.

Dipartimento di Matematica «U. Dini», Università di Firenze
Viale Morgagni 67/A, 50134 Firenze. E-mail: patrizio@math.unifi.it

---

Pervenuta in Redazione
l'1 giugno 2004