Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Riccardo Rosso

La meccanica celeste in Italia tra '800 e '900: il problema dei tre corpi

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **9-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2006), n.1, p. 143–182.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2006_8_9A_1_143_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2006.

Bollettino U. M. I.
La matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. IX-A, Aprile 2006, 143-182

La meccanica celeste in Italia tra '800 e '900: il problema dei tre corpi.

RICCARDO ROSSO

1. – Introduzione.

È difficile trovare una disciplina che abbia influenzato tanto in profondità la matematica quanto la meccanica celeste. Da tempi remoti essa è fonte ricchissima di ispirazione per i matematici che trovano nei suoi problemi sfide tali da obbligarli ad aprire nuove vie, introdurre nuove tecniche che a loro volta hanno una ricaduta sulla matematica *pura*. Questo mutuo arricchimento fu particolarmente significativo nel periodo, compreso tra il 1880 ed il 1920 circa, che esamineremo in questo lavoro. Furono anni di grande fermento in cui vennero messi a punto nuovi metodi per affrontare i problemi aperti in meccanica celeste, primo tra tutti il problema dei tre corpi. Vediamo quali furono i lavori che influenzarono maggiormente la ricerca in quegli anni.

Nel 1887, Ernest Heinrich BRUNS pubblicò un lavoro [Br87] contenente, tra l'altro, il seguente teorema

Nel problema newtoniano dei tre corpi, ogni integrale primo che sia una funzione algebrica rispetto alle posizioni, alle quantità di moto ed al tempo, è una funzione algebrica dei dieci integrali classici: l'energia, le tre componenti del momento angolare e le sei costanti che caratterizzano il moto rettilineo uniforme del centro di massa.

Questo risultato destò subito l'attenzione degli studiosi. Infatti, esso sembrava togliere la speranza di trovare integrali primi algebrici oltre a quelli canonici e quindi anche la possibilità di semplificare ulteriormente le equazioni di moto. Occorre notare due caratteristiche del lungo dibattito sorto attorno al teorema di BRUNS. Anzitutto la dimostrazione del teorema ha avuto una storia tormentata. Rivista a più riprese da POINCARÉ [Poi96], PAINLEVÉ [Pa98], MAC MILLAN [Mac13], WHITTAKER (Cap. 14 di [Whit04]), tra gli altri, ha ancora subìto correzioni nel 2000 [JT00]. Inoltre, gli autori contemporanei di BRUNS ottennero altre dimostrazioni sotto ipotesi diverse, alimentando discussioni sulla reale portata del teorema. Sostanzialmente, la dimostrazione di BRUNS poggiava sulla scelta di coordinate cartesiane ortogonali, mentre quella di POINCARÉ assumeva come variabili dipendenti gli elementi orbitali dei corpi: in ogni caso, restava aperta la questione – messa in luce da LEVI-CIVITA [LC06a] (1) e sollevata ancora anni dopo da MOULTON (*cfr.* §147 di [Mou14]) – se la non esistenza di integrali algebrici valesse per *tutte* le possibili scelte delle variabili dipendenti.

Per avere un'idea del ruolo del teorema di BRUNS è utile riportare il commento di Roberto MARCOLONGO (1862-1943), trent'anni dopo la sua pubblicazione.

«Questi risultati negativi, così notevoli, se non escludono affatto la possibilità di una soluzione diretta in termini finiti del problema dei tre corpi, la rendono infinitamente poco probabile. Il BOHLIN ha giustamente osservato che una equazione differenziale di secondo ordine a coefficienti costanti si integra immediatamente, senza che essa ammetta un integrale primo algebrico; e allora si chiede: non sarà possibile trovare una soluzione diretta del problema dei tre corpi senza integrali intermediari? Ma le considerazioni da lui fatte (...) non permettono di dare nessuna risposta alla questione» (*cfr.* p. 59 di [Mar19])

Per una strada che si chiude, ecco però subito aprirsene una nuova

«Senza nemmeno attendere che la scienza avesse conseguiti, con sì grande sforzo, questa serie di risultati negativi, i matematici avevano già volto i loro sforzi alla ricerca della soluzione del famoso problema mediante sviluppi in serie» (p. 60 di [Mar19])

In questo àmbito rientrano altri due contributi fondamentali, dovuti a Paul PAINLEVÉ [Pa97] ed a Karl SUNDMAN [Su12]. Il primo

«Mostrò anzitutto la possibilità dello sviluppo delle coordinate dei tre corpi in serie di polinomi in t (tempo) purché non vi siano urti tra i

(1) Come in [R05], le pagine delle citazioni da lavori di LEVI-CIVITA si riferiscono ai volumi delle *Opere Matematiche*.

tre corpi; ed accennò al fatto *probabile* che le condizioni di urto sono determinate da due condizioni analitiche distinte. (...) Poscia nelle lezioni di Stockholm del 1897, riprendendo l'argomento, dimostrò che il moto è regolare in ogni intervallo di tempo in cui non avvengono urti; e quando cessa di essere regolare non si possono presentare che due casi: o i tre corpi si urtano in uno stesso punto; o due soli si urtano mentre le loro distanze dal terzo tendono ad un limite finito» (pp. 83-84 di [Mar19])

Dal canto suo l'astronomo finlandese SUNDMAN riuscì, con gli strumenti della teoria delle funzioni analitiche, a rappresentare tutti gli elementi orbitali mediante serie di potenze in una variabile ausiliaria, diversa dal tempo. Inoltre, con un opportuno metodo di regolarizzazione, egli riuscì a prolungare la soluzione al di là di una collisione binaria. Anche i risultati di SUNDMAN però contengono una valenza negativa perché la velocità di convergenza delle serie è modesta, e così il risultato non è molto utile per le applicazioni.

In Italia l'opera di SUNDMAN ebbe accoglienza molto favorevole dai toni talvolta entusiasti, come quelli usati da MARCOLONGO in una conferenza riportata sul Giornale di Matematiche [Mar14]. Le sue tecniche furono utilizzate in vari contesti e talora si cercò di ampliare la portata dei suoi risultati. Così, Giuseppe ARMELLINI in [Ar15] estese i risultati di SUNDMAN supponendo che i corpi fossero sferette elastiche omogenee, anziché punti materiali, mentre Paolo PIZZETTI (1860-1918) generalizzò in [Piz15] alcune formule che SUNDMAN aveva introdotto per semplificare l'espressione dell'energia cinetica. Fu però soprattutto Tullio LEVI-CIVITA a trovare nel lavoro di SUNDMAN stimoli per ottenere una generale procedura di regolarizzazione delle equazioni di moto, servendosi di variabili dal significato fisico trasparente [LC20].

Il passaggio dal XIX al XX secolo fu poi segnato dall'opera di Henri POINCARÉ, di cui *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste* [Poi92] rappresentano l'essenza: la profondità delle idee proposte e la potenza delle tecniche sviluppate diedero una svolta alla ricerca nel campo. A fronte della crisi dei metodi quantitativi, messa in luce da BRUNS, i metodi qualitativi di POINCARÉ consentivano di affrontare con rinnovata energia problemi di grande complessità. Sull'importanza di

POINCARÉ nello sviluppo della meccanica celeste molto è stato scritto. A titolo di esempio, riportiamo il commento di MARCOLONGO:

«Il fondatore della teoria delle soluzioni periodiche delle equazioni della dinamica e specialmente pel problema ristretto; colui che ha rinnovato e dato meraviglioso impulso a tutti i problemi della Meccanica celeste, è senza dubbio POINCARÉ. (...) Egli ha gettato sprazzi di luce vivissima sul classico problema [dei tre corpi]; egli ha fondato teorie nuove, altre ne ha approfondite, come quella degli invarianti integrali, delle soluzioni periodiche, ed asintotiche; delle equazioni alle variazioni, esponenti caratteristici; tutti elementi di cui è tessuta la tela delle *Méthodes Nouvelles*» (pp. 113-115 di [Mar19]).

I tre volumi che compongono *Les Méthodes Nouvelles* racchiudono gli elementi principali della svolta operata da POINCARÉ nella corposa memoria del 1890 [Poi90] pubblicata sugli *Acta Mathematica* e basata sul lavoro grazie al quale egli si era aggiudicato un anno prima il premio che re OSCAR II di Svezia e Norvegia aveva messo a disposizione di chi avesse ottenuto per primo la soluzione globale del problema degli N-corpi. Benché a rigor di termini POINCARÉ non avesse risolto il problema nel senso richiesto dal bando, la ricchezza concettuale della memoria di POINCARÉ era tale da spingere la commissione, formata da WEIERSTRASS, HERMITE e MITTAG-LEFFLER, ad attribuirgli il premio: per un interessante resoconto delle vicende legate alla competizione si possono consultare il Capitolo I di [DH96] e la monografia [B-G97] dedicata ai contributi di Poincaré nel problema dei tre corpi.

L'elogio tessuto da MARCOLONGO è certo consono al ruolo di POINCARÉ nella meccanica celeste. Per i nostri scopi è però bene soffermarsi a considerare come la scuola italiana recepì la lezione di POINCARÉ. Si può procedere su due livelli di lettura, da una parte analizzando temi e metodi di ricerca adottati dalla scuola italiana e dall'altra valutando l'originalità dei risultati ottenuti. Un esame anche rapido dei lavori analizzati nel seguito basta a riconoscere che la maggior parte dei temi di ricerca si innestano su vie aperte o rielaborate da POINCARÉ. Quando LEVI-CIVITA ed i suoi allievi studiano a fondo soluzioni periodiche nella teoria del moto lunare o quando PAVANINI esibisce nuovi esempi di soluzioni periodiche per il problema ristretto, si può certo concludere che è stata assimilata la lezione di POINCARÉ contenuta nel celebre passo dei *Méthodes Nouvelles*: «le soluzioni periodiche sono la sola breccia attraverso cui si può sperare di violare uno spazio ritenuto sin qui inaccessibile» (*cfr.* [Poi92], Vol. I, p. 82).

Anche le osservazioni di POINCARÉ su altri temi di ricerca classici – come lo sviluppo della funzione perturbatrice, la scelta di opportuni elementi ellittici e la riduzione delle equazioni differenziali del problema dei tre corpi (*cfr.* Capp. I e VI, vol. I di [Poi92]) – diedero spunti per ulteriori ed originali ricerche condotte da LEVI-CIVITA e dai suoi allievi. Ad esempio, l'introduzione degli elementi *isoenergetici* (*cfr.* §2) ad opera di LEVI-CIVITA fu un elemento di novità nello studio del problema di KEPLER perturbato, così come l'impiego di variabili dal trasparente significato cinematico nella riduzione di ordine delle equazioni differenziali che reggono il problema dei tre corpi (*cfr.* §3).

Gli studiosi italiani ottennero risultati innovativi in altri due campi. Nelle ricerche sulle collisioni binarie nel problema dei tre corpi ARMELLINI e, soprattutto, BISCONCINI e LEVI-CIVITA, (*cfr.* §4) si applicarono allo studio proposto da PAINLEVÉ delle condizioni iniziali da imporre per arrivare ad un urto binario in un intervallo di tempo finito. Nel problema collegato della regolarizzazione delle equazioni del problema dei tre corpi LEVI-CIVITA divenne poi un'autorità riconosciuta dalla comunità scientifica internazionale ed i suoi lavori un punto di riferimento per ricercatori del settore sino, si può dire, ai giorni nostri.

In definitiva, emerge dall'analisi dei lavori l'immagine di una scuola attiva, pronta a misurarsi con i problemi più significativi, accogliendo la lezione dei grandi e traendone spunti per contributi apprezzabili, destinati a lasciare un segno.

La rassegna è organizzata secondo le linee seguenti. Anzitutto, nella Sezione 2 vengono esaminati alcuni lavori di LEVI-CIVITA sullo sviluppo della funzione perturbatrice nel problema di KEPLER e sugli elementi ellittici. Ad un altro tema classico, la riduzione del problema dei tre corpi, è invece dedicata la Sezione 3. La Sezione 4 tratta le collisioni nel problema dei tre corpi e la regolarizzazione delle equazioni di moto in corrispondenza di un urto, argomento dove LEVI-CIVITA ha lasciato i contributi maggiori nella meccanica celeste classica. Le Sezioni 5 e 6 trattano, a diverso titolo, delle soluzioni periodiche nel problema dei tre corpi. Dapprima, nella Sezione 5, analizzeremo le applicazioni astronomiche di una teoria generale, proposta da LEVI-CIVITA, sulle proprietà asintotiche di soluzioni di sistemi di equazioni differenziali a coefficienti periodici. Successivamente, nella Sezione 6, considereremo le soluzioni periodiche di PAVANINI per il problema ristretto. Infine, la breve Sezione 7 contiene le conclusioni dello studio.

2. – Problema di Kepler perturbato.

In molte circostanze occorre studiare il moto di un corpo celeste P soggetto all'attrazione prevalente di un altro corpo O e ad un insieme di forze secondarie descritte da una *funzione perturbatrice*. Ad esempio, nel moto lunare è naturale considerare la Terra come corpo prevalente e trattare gli effetti del Sole come una perturbazione sul sistema Terra-Luna. In situazioni come questa, benché la nitida caratterizzazione delle orbite kepleriane sia perduta, è ancora possibile appoggiarsi ad essa per descrivere il moto di P. Seguendo un procedimento introdotto da EULER, anziché determinare l'orbita realmente seguita, si studia il comportamento di una conica intermedia, detta *conica osculatrice*

«che sarebbe descritta da P, qualora, cessando ogni influenza perturbatrice, esso si muovesse, a partire dallo stato di moto $\begin{pmatrix} p_x & p_y & p_z \\ x & y & z \end{pmatrix}$, sotto la esclusiva attrazione del corpo centrale (2)» (p. 341 di [LC13])

In particolare, quando la conica osculatrice è una ellisse $\mathcal{E}$, gli *elementi ellittici* sono sei parametri indipendenti necessari per determinarne le dimensioni e la posizione rispetto ad un sistema di riferimento prefissato e per trovare la posizione di P su $\mathcal{E}$. Gli effetti della perturbazione sul moto sono desunti dall'evoluzione di $\mathcal{E}$ nel corso del tempo. Ad esempio, come elementi ellittici si possono considerare il

(2) (x, y, z) sono le coordinate cartesiane di P mentre (p_x, p_y, p_z) denotano le componenti della quantità di moto di P.

semiasse maggiore a e l'eccentricità e di $\mathcal{E}$, l'inclinazione i del piano che contiene $\mathcal{E}$ rispetto ad un piano di riferimento (per il moto della Luna: il piano dell'eclittica), la longitudine del nodo ascendente (3) ϑ, la longi-

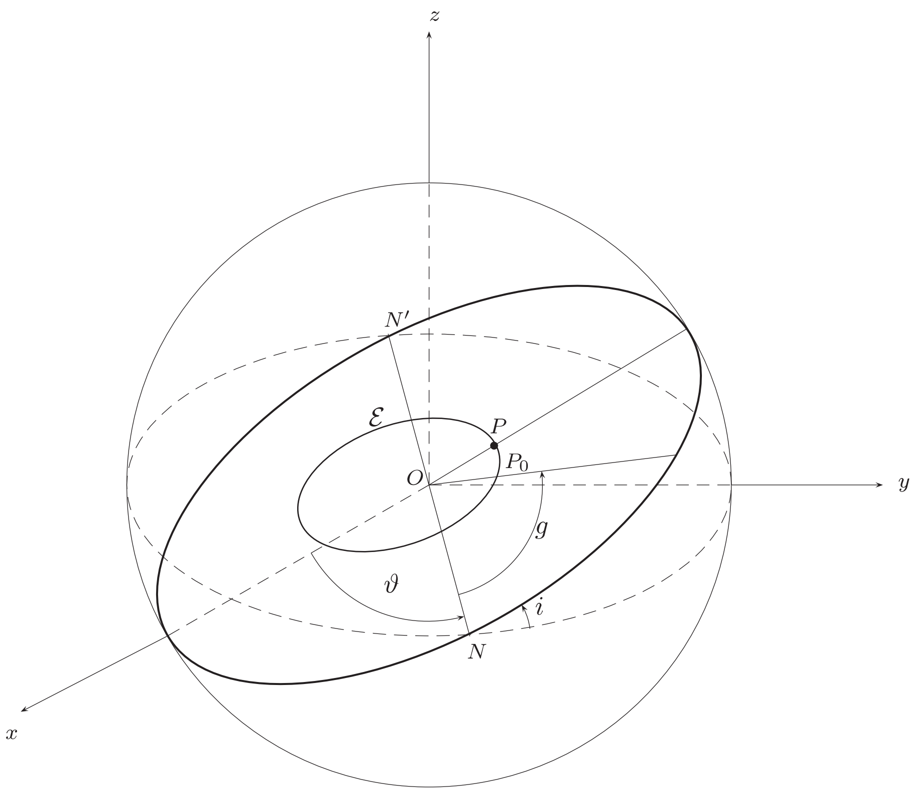

Fig. 1. – Schema degli elementi ellittici per il moto del corpo P, all'istante t. Il punto O rappresenta il corpo che esercita attrazione predominante su P. Oltre a P, sull'ellisse osculatrice $\mathcal{E}$ al tempo t è individuato il pericentro P_0. L'angolo i è l'inclinazione del piano contenente $\mathcal{E}$ rispetto al piano di riferimento xOy. L'angolo ϑ è la longitudine del nodo ascendente N, posto sulla linea dei nodi NN'. L'angolo g, detto argomento del pericentro, permette di ricavare la longitudine del pericentro $\tilde{\omega} := \vartheta + g$. L'eccentricità e ed il semiasse a di $\mathcal{E}$, insieme all'anomalia media ℓ, completano gli elementi ellittici di P.

(3) La *linea dei nodi* è la retta di intersezione del piano contenente l'ellisse osculatrice di P con il piano di riferimento. La linea dei nodi interseca l'ellisse in due punti detti nodo ascendente e discendente, a seconda del senso di moto di P.

tudine del pericentro $\tilde{\omega} := \vartheta + g$ – dove g indica l'argomento del pericentro– e l'anomalia media ℓ (*cfr.* [R05]), che contiene le informazioni sulla legge oraria di P (si veda la Figura 1). Tra i molti che studiarono l'evoluzione dell'orbita osculatrice di un punto materiale P ricordiamo Enrico ALMANSI che in [Al22] ottenne equazioni di evoluzione per gli elementi ellittici in una forma elegante facendo intervenire una funzione perturbatrice ridotta, opportunamente definita. ALMANSI evitò il ricorso alle formule di GAUSS –introdotte per lo studio delle disuguaglianze secolari (*cfr.* Cap. XXVII di [Tiss89]) – proiettando, a partire dalle equazioni di moto di P, la forza perturbatrice su un'opportuna terna cartesiana.

Nelle ricerche teoriche è utile effettuare cambiamenti di coordinate che conservano la forma canonica delle equazioni di moto. Gli elementi ellittici che godono di questa proprietà sono detti *elementi canonici* e tra questi figurano gli elementi di DELAUNAY, definiti da

$$\begin{cases} L := \beta\sqrt{a}\,, & G := \beta\sqrt{a(1-e^2)}\,, \quad \Theta := \beta\sqrt{a(1-e^2)}\cos i \\ \ell\,, & g\,, \quad \vartheta\,, \end{cases}$$

dove β è una costante dipendente dalle masse di P e del corpo O che esercita l'attrazione dominante. Questi elementi vennero introdotti da DELAUNAY nella teoria del moto lunare [Del67] e furono modificati da POINCARÉ con semplici trasformazioni lineari che li rendavano più adatti alle applicazioni (*cfr.* [Poi05], §§56-58). Benché questi elementi fossero usati comunemente, LEVI-CIVITA fu comunque spinto a trovare un nuovo sistema di elementi ellittici in quanto

«In tutti questi sistemi, il parametro che fissa la posizione sull'orbita è: o proprio l'anomalia media ℓ, ovvero ℓ aumentata di angoli che nel moto ellittico sono costanti. Ne risulta una discreta complicazione nell'espressione della funzione perturbatrice; questa sarebbe notevolmente più semplice se, al posto dell'anomalia media ℓ, si usasse l'anomalia eccentrica u» (*cfr.* p. 342 di [LC13])

In effetti, l'idea di LEVI-CIVITA si basava sul metodo tradizionalmente adoperato per lo sviluppo della funzione perturbatrice, illustrato da POINCARÉ al Capitolo XV di [Poi07]. Infatti,

«Si può anzi dire che gli sviluppi in serie trigonometrica di ℓ si discutono teoricamente e si formano praticamente trasformando (con procedimenti più o meno laboriosi) gli analoghi sviluppi relativi alla u. Con tutto ciò non si adotta in definitiva la u, ma ci si attiene alla ℓ, perché da un lato questo argomento è il più indicato in quasi tutti i calcoli di prima approssimazione (rispetto alle masse perturbatrici); e d'altro canto consente di conservare la forma canonica» (*cfr.* p. 342 di [LC13])

Per realizzare il suo programma, LEVI-CIVITA introdusse un'orbita ellittica intermedia *diversa* da quella osculatrice. Se k_0 è la costante di attrazione newtoniana ed r la distanza di O da P, l'ellisse osculatrice di P è, per definizione, l'orbita che sarebbe descritta da P se, ad un dato istante, venisse soppressa ogni perturbazione e su P agisse solo l'attrazione k_0/r^2 dovuta ad O. Di conseguenza, al variare del tempo t, l'energia $h := T - \dfrac{k_0}{r}$ associata a tale ellisse *non* è costante, mentre lo è k_0. LEVI-CIVITA, al contrario, procedette fissando il valore h_0 di $T - \dfrac{k_0}{r}$ all'istante iniziale $t = t_0$ e *definendo* una quantità $k = k(t)$ soggetta al vincolo

$$T - \frac{k(t)}{r} = h_0 \qquad \forall t\,.$$

Con nomenclatura suggestiva, LEVI-CIVITA chiamò *isodinamici* gli elementi ellittici tradizionali ed *isoenergetici* quelli introdotti in [LC13]. Nel resto di questa memoria LEVI-CIVITA mostrò che gli elementi isoenergetici sono anche canonici e li confrontò con gli elementi di DELAUNAY, sottolineando i vantaggi ottenuti nell'impostare il problema dei tre corpi in termini dei nuovi elementi.

3. – La riduzione del problema dei tre corpi.

La *riduzione* del problema dei tre corpi è stata un tema di ricerca di punta per oltre un secolo e ad essa hanno dedicato energie molti matematici insigni. Tracciare la storia di questo tema richiederebbe un lavoro a sé stante ma, per inquadrare i contributi italiani a riguardo, è comunque opportuno delinearne le tappe principali. Nel caso di interazioni newtoniane, il problema dei tre corpi è retto dal seguente sistema di equazioni differenziali del secondo ordine

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{j=1}^{3} \frac{Gm_j}{r_{ij}^3}(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i) \quad i = 1, 2, 3, \tag{1}$$

dove $\boldsymbol{r}_i$ è il vettore posizione dell'$i-$esimo corpo (assimilato ad un punto materiale di massa m_i), $r_{ij} := |\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|$ è la distanza tra l'i-esimo ed il j-esimo punto materiale e G è la costante di gravitazione universale.

Come già accennato nell'introduzione di [R05], ridurre il problema dei tre corpi significa passare dal sistema (1) – di ordine 18 – ad un sistema più semplice, sfruttando gli integrali primi del sistema e servendosi di coordinate opportune. Un passo fondamentale nella riduzione fu compiuto da LAGRANGE che, in una celebre memoria [Lag72] premiata nel 1772 dall'Accademia di Parigi,

«Ha mostrato che la risoluzione del problema può ottenersi determinando anzitutto i lati del triangolo formato dai tre corpi (...); fatto ciò le coordinate dei tre corpi nello spazio possono ottenersi con tre quadrature. Tutta la difficoltà consiste dunque nella risoluzione del primo problema e LAGRANGE trova che esso dipende dalla integrazione di due equazioni del secondo e da una di terzo ordine in cui compariscono la costante delle forze vive e una combinazione di quelle delle aree (...). Il sistema differenziale è del settimo ordine e non contiene esplicitamente il tempo; quindi (...) la difficoltà del problema consiste nella integrazione di un sistema del sesto ordine. In ogni modo, poiché coi soli dieci integrali conosciuti sarebbero occorse ancora otto integrazioni per la completa soluzione del problema, il passo notevole compiuto da LAGRANGE consiste nell'aver eseguito una nuova integrazione» (*cfr.* pp. 18-20 di [Mar19])

Per avere un'ulteriore riduzione dell'ordine si dovette attendere il 1842, anno in cui JACOBI pubblicò un lavoro [Jac42] dove

«Si vale di una semplice ed elegante trasformazione, in cui si riferisce il secondo corpo al primo, ed il terzo al centro di massa dei primi due, e la quale permette di sostituire ai tre corpi altri due fittizi ruotanti intorno al centro di massa di due dei corpi dati, e soggetti a forze derivanti da un potenziale dipendente dalle distanze dei due corpi dall'origine (baricentro) e dal coseno del loro angolo. Il movimento di questi due corpi può ritenersi, in prima approssimazione, come un moto kepleriano; i piani delle orbite ellittiche si tagliano secondo una retta mobile del piano invariabile (4) e le loro inclinazioni sullo stesso sono perfettamente determinate dai parametri delle orbite. (...) Tra questi elementi, variabili in ogni istante coll'orbita, stabilisce cinque equazioni differenziali del primo ordine e ad una di secondo ordine, nelle quali non vi ha più traccia (...) dei nodi. Poiché in queste equazioni, come in quelle del LAGRANGE, il tempo non compare che col suo differenziale, il sistema effettivamente stabilito dal JACOBI – e nello averlo stabilito consiste un progresso sulla memoria di LAGRANGE – è di sesto ordine» (*cfr.* pp. 28-29 di [Mar19])

La tecnica di JACOBI venne perfezionata da BERTRAND [Ber54] che estese l'analisi anche ad interazioni non newtoniane e da BOUR [Bou56] che spostò l'accento sull'impiego del formalismo hamiltoniano. Le trasformazioni usate da BOUR erano molto complicate e vennero rese più agili da Francesco BRIOSCHI (1824-1897) in [Bri68] e soprattutto da Francesco SIACCI (1839-1907) che propose in [Sia71] una ulteriore trasformazione delle equazioni, abbastanza generale da abbracciare quelle di JACOBI, BOUR e BRIOSCHI.

Un altro importante risultato fu ottenuto da LIE che nel 1875 ridusse il sistema al sesto ordine sfruttando la nozione di *involuzione* tra integrali primi [Lie75]. Per sottolineare l'importanza del contributo di LIE basta il seguente commento di LEVI-CIVITA

«La esplicita riduzione del problema dei tre corpi al minimo ordine differenziale (...) appare oggidì concettualmente ovvia in base alla teoria di LIE degli integrali dei sistemi canonici» (*cfr.* p.437 di [LC15a])

Ulteriori riduzioni al sesto ordine furono elaborate da BRUNS nel già citato lavoro [Br87], da POINCARÉ [Poi96] e da WHITTAKER (*cfr.* §159 di [Whit04]). I metodi di BRUNS e WHITTAKER lasciavano però insoddisfatto LEVI-CIVITA che in [LC15a] espose un ulteriore metodo di riduzione. L'insoddisfazione nasceva dal ricorso di BRUNS e WHITTAKER

(4) Come discuteremo tra poco, il piano invariabile è il piano passante per il centro di massa G dei tre corpi, avente per giacitura (costante) la direzione del momento angolare rispetto ad G.

«ad uno speciale spediente analitico (la scelta di una opportuna trasformazione di contatto), sulla cui origine non si dà ragguaglio alcuno, e che d'altra parte richiede qualche sviluppo materiale di calcolo» (p. 438 di [LC15a])

Il nuovo metodo è esposto nel lavoro [LC15a], frutto dell'organizzazione degli appunti per il corso di lezioni di Meccanica Superiore tenute da LEVI-CIVITA a Padova. È noto che il momento della quantità di moto $\boldsymbol{K}$ dei tre corpi è una costante del moto ([5]). Se $\boldsymbol{K} \neq \boldsymbol{0}$, è individuato un piano *fisso* passante per il centro di massa, ortogonale a $\boldsymbol{K}$: tale piano – che sussiste anche per $n \neq 3$ – è detto piano *invariabile*. Fatta questa precisazione, vediamo gli aspetti salienti di [LC15a].

- In un riferimento con origine nel centro di massa G dei tre corpi P_0, P_1 e P_2 si considerano due piani di riferimento, entrambi passanti per G: il piano invariabile Π ed il piano π, in generale mobile, che contiene i tre corpi.
- Snodo essenziale della riduzione è la separazione delle variabili in due classi, una atta ad individuare la posizione di π rispetto a Π, l'altra a determinare le posizioni dei corpi in π. Alla prima classe di coordinate appartengono l'angolo ϑ tra π e Π, detto *inclinazione*, e la *longitudine del nodo* ψ, cioè l'angolo formato dall'intersezione tra π e Π (linea dei nodi) con una direzione fissa appartenente a Π. I momenti canonicamente coniugati a ϑ e ψ sono indicati con Θ e Ψ, rispettivamente. Nella seconda classe di variabili rientrano le coordinate (x_υ, y_υ) $(\upsilon = 0, 1, 2)$ dei tre punti in π, dove l'asse x è disposto lungo la linea dei nodi; i rispettivi momenti coniugati sono indicati con (p_υ, q_υ).
- In termini di queste variabili le equazioni del moto conservano la forma canonica e la hamiltoniana H si spezza in due addendi

$$H = \mathcal{H} + F\,,$$

in cui $\mathcal{H} = \mathcal{H}(x_\upsilon, y_\upsilon, p_\upsilon, q_\upsilon)$ e $F = F(\Theta, \Psi)$.

- Utilizzando una trasformazione canonica già introdotta da

([5]) Fissata l'origine nel centro di massa del sistema, la quantità di moto totale è nulla e non occorre specificare la scelta del polo nella definizione di $\boldsymbol{K}$.

POINCARÉ, le variabili (x_υ, y_υ) e (p_υ, q_υ) vengono rimpiazzate da

$$\begin{cases} x'_1 := x_1 - x_0 \,, & x'_2 := x_2 - x_0 \,, \quad x'_0 := x_0 \\ p'_1 := p_1 \,, & p'_2 := p_2 \,, \quad\quad\quad p'_0 := p_0 + p_1 + p_2 \end{cases}$$

e da

$$\begin{cases} y'_1 := y_1 - y_0 \,, & y'_2 := y_2 - y_0 \,, \quad y'_0 := y_0 \\ q'_1 := q_1 \,, & q'_2 := q_2 \,, \quad\quad\quad q'_0 := q_0 + q_1 + q_2 \ : \end{cases}$$

le coordinate di P_1 e P_2 sono cioè riferite a P_0, mentre p_1, p_2, q_1 e q_2 mantengono il significato di componenti della quantità di moto assoluta. Infine, avendo fissato la posizione del centro di massa, $p'_0 = q'_0 = 0$.

• Detta H' la hamiltoniana espressa nelle nuove coordinate, la forma di WHITTAKER per il *sistema ridotto* che descrive il moto dei corpi in π è così ottenuta in modo trasparente

$$\begin{cases} \dot{x}'_\upsilon = \dfrac{\partial H'}{\partial p'_\upsilon} \,, & \dot{y}'_\upsilon = \dfrac{\partial H'}{\partial q'_\upsilon} \,, \\ \dot{p}'_\upsilon = -\dfrac{\partial H'}{\partial x'_\upsilon} \,, & \dot{q}'_\upsilon = -\dfrac{\partial H'}{\partial y'_\upsilon} \ : \end{cases}$$

in questo sistema υ assume solo i valori 1 e 2 perché la scelta delle coordinate rende banali le equazioni relative a $\upsilon = 0$.

• Infine, la conoscenza di una soluzione del sistema ridotto consente di determinare il comportamento di ϑ e ψ. Infatti, se $\mathcal{M}$ è la componente del momento della quantità di moto $\boldsymbol{K}$ nella direzione ortogonale al piano dei tre corpi π, l'inclinazione è retta dall'equazione *trascendente*

$$\cos\vartheta = \frac{\mathcal{M}}{K} \,,$$

dove K è il modulo di $\boldsymbol{K}$. La longitudine del nodo è poi governata dall'equazione

$$\dot{\psi} = \frac{K}{D} I_x \,,$$

dove I_x è il momento centrale di inerzia dei tre corpi lungo la retta dei nodi e $D > 0$ una quantità legata alle proprietà di inerzia del triangolo formato dai tre corpi. Questa equazione permette anche di verificare che la retta dei nodi ruota sempre nello stesso verso.

Oltre a chiarire in [LC15a] un punto delicato dei lavori di BRUNS e WHITTAKER, LEVI-CIVITA suggerì ad una sua allieva, Maria RONCHI, di ottenere la riduzione seguendo un nuovo procedimento

«il quale non la cede, in speditezza, a quello consentito dalla preventiva introduzione delle variabili kepleriane, ed ha d'altra parte il vantaggio di fornire la espressione esplicita $\mathcal{H}$ della funzione caratteristica (...) sotto una forma perfettamente comparabile per semplicità a quella di WHITTAKER. Nel procedimento (...) si trae essenziale partito da una trasformazione canonica (nuova o almeno non ancora applicata dagli specialisti in materia), la quale viene suggerita da considerazioni elementari di cinematica del punto» (*cfr.* pp. 1221-1222 di [R17])

Esaminando il caso generale dove i tre corpi P_0, P_1 e P_2 non appartengono sempre ad un medesimo piano, la RONCHI considerò come variabili le inclinazioni dei piani istantanei di moto ([6]) per P_1 e P_2 e le coordinate di P_1 e P_2 in tali piani. La scelta di queste coordinate, dal chiaro significato cinematico, consentì di effettuare la riduzione per via elementare.

4. – Collisioni e regolarizzazione.

In analogia con (1), il sistema di equazioni che regge il problema newtoniano degli N corpi ($N > 3$) è

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{j=1}^{N} \frac{Gm_j}{r_{ij}^3}(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i) \quad i = 1, ..., N\,. \tag{2}$$

Le (2) non sono definite quando almeno una delle distanze relative r_{ij} si annulla. Un problema di interesse matematico è stabilire le cause per

([6]) Sono i piani che passano per P_0 e contengono le velocità istantanee di P_1 e P_2, cui una soluzione di (2) abbia un intervallo massimale di esistenza che si estende fino ad un istante *finito* t^*. Soluzioni con questa particolarità sono dette *singolari*. La questione fu affrontata e risolta da PAINLEVÉ nelle celebri *Lezioni di Stoccolma* tenute nel 1895 e pubblicate due anni più tardi [Pa97]. PAINLEVÉ dimostrò che condizione necessaria e sufficiente affinché all'istante $t = t^*$ la soluzione di (2) presenti una singolarità è che

$$\lim_{t \to t^*} r(t) = 0,$$

dove $r(t) := \min_{i \neq j} r_{ij}(t)$ è la minima distanza tra coppie di punti. Questo teorema *non* afferma in generale che due punti debbano entrare in collisione quando $t = t^*$. Sarebbe così se si potesse anche dimostrare che i vettori posizione $\boldsymbol{r}_i$ ammettono limite quando $t \to t^*$. Al contrario, gli indici i e j che entrano nella definizione di $r(t)$ potrebbero variare infinite volte all'approssimarsi dell'istante $t = t^*$, garantendo però l'esistenza del limite di $r(t)$. PAINLEVÉ dimostrò che questo tipo di singolarità, detta *pseudocollisione*, non può mai avvenire per $N = 3$ e propose la seguente congettura

Per $N \geq 4$ esistono pseudocollisioni.

La congettura, passata alla storia come congettura di PAINLEVÉ, è stata dimostrata indipendentemente da GERVER [Ger91] e XIA [Xia92] dopo quasi un secolo, tra il 1991 ed il 1992: un'avvincente narrazione delle tappe principali che hanno portato alla dimostrazione della congettura di PAINLEVÉ è contenuto nei primi tre capitoli del libro di DIACU e HOLMES [DH96].

Nelle Lezioni di Stoccolma, PAINLEVÉ aveva sottolineato l'importanza di definire le condizioni iniziali che, nel problema dei tre corpi, conducevano ad una collisione in un tempo finito. In particolare, egli riteneva che le tali condizioni dovessero soddisfare opportune relazioni analitiche. In questo contesto si collocano i lavori di LEVI CIVITA [LC03b], Giulio BISCONCINI [Bis05] e Giuseppe ARMELLINI [Ar18]. Nel primo lavoro, LEVI-CIVITA selezionò le condizioni iniziali che conducevano ad un urto nel problema *ristretto* dei tre corpi. In questo problema si suppone che due corpi, detti *masse primarie* – S e J nella notazione di [LC03b] – abbiano masse preponderanti rispetto a quella del corpo P restante, che svolge il ruolo di *massa di prova*: è influenzato da S e J, ma non esercita alcuna influenza su di loro. Nella versione più semplice del problema ristretto, il problema *circolare piano*, si suppone che S e J si muovano uniformemente lungo circonferenze centrate nel loro centro di massa O, mentre P è vincolato a muoversi nel piano contenente le orbite di S e J (Figura 2). Il problema può dirsi risolto quando il moto di P è determinato. È spesso comodo scrivere le equazioni di moto per P in un riferimento –detto *sinodico*– con origine in O e solidale con le masse primarie: la necessità di introdurre le forze apparenti nel bilancio delle forze viene ampiamente compensata dalla semplificazione cinematica del problema. Le equazioni ottenute ammettono un integrale primo, l'integrale di JACOBI, il cui valore consente di determinare la regione accessibile a P durante il moto. In [LC03b], LEVI-CIVITA ottenne questo risultato

«Considerando, per fissar le idee, gli urti P, S (lo stesso naturalmente si applica agli urti P, J) *riconosceremo che una sola relazione uniforme* $u = 0$ *è caratteristica dell'urto e la costruiremo effettivamente.*» (p. 279 di [LC03b])

Per relazione uniforme si intende qui una relazione algebrica nelle

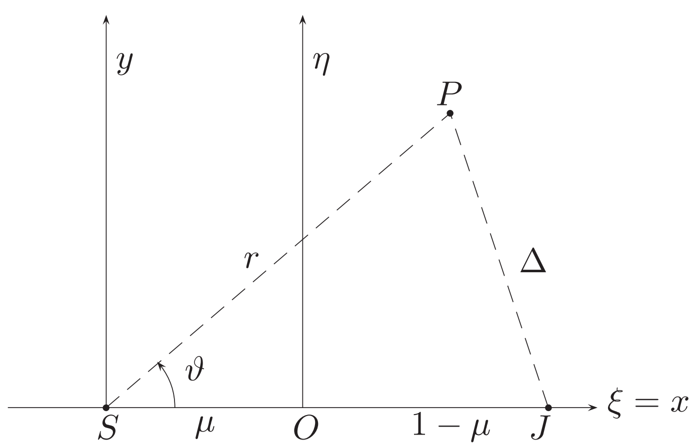

Fig. 2. – La geometria del problema ristretto dei tre corpi. Il corpo J ha massa (normalizzata) μ, S ha massa $1 - \mu$.

velocità, secondo la definizione di POINCARÉ (*cfr.* p. 276 di [LC03a] e la discussione a p. 96 di [Win41]). Lo studio, che comprende anche le *eiezioni*, cioè i moti che *partono* da una collisione, si può riassumere schematicamente in questi termini. Tradotto il sistema di equazioni di moto in forma canonica, grazie ad accorti cambiamenti di variabile vengono isolate delle quantità che restano finite all'approssimarsi di una collisione e si studiano le modalità con cui questa ha luogo. Ad esempio, è possibile dimostrare che la derivata temporale $\dot{r}(t) := \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ della distanza $r(t)$ tra P ed S si mantiene diversa da zero in prossimità dell'urto. Inoltre, la funzione $r(t)\dot{r}^2(t)$ ha limite inferiore non nullo, quando $t \to t^*$. Il primo risultato, in particolare, consente di assumere r come variabile indipendente eliminando il tempo dalle equazioni di moto, almeno quando P ed S sono abbastanza vicini. Grazie ad ulteriori cambiamenti di variabile, i moti in cui P ed S si urtano sono caratterizzati come tutte e sole le soluzioni di un sistema, che rimangono olomorfe quando $\rho := \sqrt{r}$ si annulla. La relazione caratteristica dell'urto è del tipo

$$\vartheta' + 1 = \rho f(\rho, \vartheta)\,,$$

dove ϑ' è la velocità angolare di P nel sistema sinodico ed f è una funzione periodica in ϑ, regolare in ρ –almeno per ρ abbastanza piccolo– di cui LEVI-CIVITA determinò i termini dello sviluppo in serie di MAC LAURIN fino al quint'ordine. Come prima illustrazione dei risultati ottenuti, LEVI-CIVITA considerò il semplice caso limite in cui anche il corpo J non coinvolto nell'urto ha massa μ nulla e dunque non esercita alcuna influenza: si tratta pertanto del problema dei due corpi studiato nel sistema sinodico. Grazie alla relazione caratteristica per gli urti egli determinò l'equazione polare delle traiettorie di eiezione-collisione, che cioè «nascono e muoiono in S»: in un sistema inerziale si ridurrebbero a segmenti di retta percorsi due volte, nel sistema sinodico sono curve chiuse. Questo risultato, applicato al problema ristretto dei tre corpi vero e proprio, porta a concludere che, almeno per $\mu \ll 1$, le traiettorie singolari sulle quali l'integrale di JACOBI ha valore $C > 1$ continuano ad essere curve chiuse.

L'analisi di LEVI-CIVITA, limitata al problema ristretto dei tre corpi, venne poco dopo estesa al problema completo da BISCONCINI [Bis05]. Il lavoro, a parte maggiori difficoltà tecniche, ripercorre la strada tracciata da LEVI-CIVITA, con una importante differenza che ne limita l'effettiva portata. Infatti, Se P_0 e P_1 sono i corpi che ad un dato istante entrano in collisione, per ottenere le condizioni di urto BISCONCINI fu costretto ad introdurre un'ipotesi aggiuntiva

«Abbiamo ipotizzato che, nei pressi di P_0, la velocità angolare di P_0P_1 nel moto relativo rispetto a P_0 resti finita» (p. 50 di [Bis05])

Questo assunto verrà *dimostrato* da SUNDMAN [Su12] che è al corrente degli sviluppi ottenuti da LEVI-CIVITA e BISCONCINI: per un'analisi approfondita dei rapporti tra l'opera di SUNDMAN e la scuola italiana si veda l'articolo di DELL'AGLIO [DA93].

La breve nota [Ar18] di ARMELLINI è imperniata sull'analisi di un problema che l'autore enuncia in questi termini:

«Nella presente Nota noi ci proponiamo di risolvere il seguente problema. Date le coordinate e le velocità iniziali di tre corpi che si attirano secondo la legge di NEWTON e supposto che il momento della quantità di moto del sistema sia diverso da zero, ricercare se tra i corpi stessi avrà luogo qualche urto. In caso di risposta affermativa determinare l'istante in cui accadrà il primo urto» (p. 87 di [Ar18])

L'ipotesi tecnica sul valore del momento della quantità di moto serve a scongiurare la presenza di collisioni triple. Infatti, un teorema dovuto a SUNDMAN – ma già noto a WEIERSTRASS nel caso di tre corpi – afferma che condizione necessaria affinché vi sia una collisione simultanea di *tutti* gli N corpi ad un dato istante è che il momento della quantità di moto del sistema sia nullo.

Per risolvere il problema, ARMELLINI si servì della funzione ausiliaria

$$S(t) := \int_0^t \frac{1}{(r_{12}r_{23}r_{13})^2}\,\mathrm{d}u\,,$$

dove $r_{ij}(t)$ è la distanza tra i corpi i e j all'istante t. La funzione S è non negativa, crescente e diverge in caso di urto. Quest'ultima proprietà è conseguenza di un teorema di SUNDMAN secondo cui, in caso di collisione tra i corpi i e j, deve essere $r_{ij}(t) = O((t-t_0)^{2/3})$, quando $t \to t_0$, istante di collisione. La nuova variabile

$$T(t) = \frac{S(t)}{1 + S(t)}$$

soddisfa $\dot{T}(t) > 0$ finché non c'è collisione e ciò consente di sviluppare t e le coordinate dei punti in serie di potenze di T, con coefficienti legati alle condizioni iniziali:

$$t = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \gamma_{nk} \lambda_k T^k. \tag{3}$$

A questo punto ARMELLINI mostrò che due soli scenari erano possibili: o la serie (3) converge ad un valore finito $A > 0$ per $T \to 1$ ed allora la collisione avviene all'istante $t = A$, oppure (3) diverge e nessun urto può verificarsi.

Strettamente collegata al problema delle collisioni è la regolarizzazione delle equazioni del problema dei tre corpi, tema su cui LEVI-CIVITA tornò a più riprese. Il primo sviluppo organico delle idee sulla regolarizzazione è contenuto in [LC06a], dove l'attenzione è rivolta ancora al problema ristretto, *piano* e circolare. La procedura poggia su opportuni cambiamenti della variabile indipendente (tempo) e di quelle dipendenti, volti a riscrivere le equazioni di moto senza singolarità, conservando la forma canonica. Per il problema ristretto LEVI-CIVITA partì dalle equazioni canoniche

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial F}{\partial p}, & \dot{y} = \dfrac{\partial F}{\partial q} \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial F}{\partial x}, & \dot{q} = -\dfrac{\partial F}{\partial y}, \end{cases} \tag{4}$$

dove p e q sono le componenti della velocità assoluta di P rispetto ad un sistema di assi invariabili centrato in S (Figura 2) ed F è l'integrale di JACOBI definito da

$$F := \frac{1}{2}[(p + y)^2 + (q - x)^2] - \left[\frac{1 - \mu}{r} + \frac{r^2}{2} + \mu V\right]$$

dove $V := \dfrac{1}{\Delta} - x$, con Δ distanza di P da J (Figura 2). Attraverso opportune trasformazioni LEVI-CIVITA eliminò le singolarità di (4) dovute alle collisioni di P con S, ottenendo pertanto una regolarizzazione *locale*, che non opera sulla parte di V che diventa singolare al momento di una collisione tra P e J. Regolarizzazioni *globali*, che operano su entrambi i tipi di collisioni binarie sono state introdotte, tra gli altri, da THIELE [Th95] e BURRAU [Bu06], da BIRKHOFF [Bir15] e LEMAÎTRE [Le55]: per una discussione dettagliata si può consultare il Capitolo 3 di [Sz67]. La prima tappa della regolarizzazione consiste nel ricorso al formalismo complesso, ponendo

$$\begin{aligned} x + \imath y &= (\xi + \imath\eta)^2 \\ p - \imath q &= \frac{\tilde{\omega} - \imath\chi}{2(\xi + \imath\eta)}. \end{aligned} \tag{5}$$

In questo modo, definito $\rho^2 := \xi^2 + \eta^2$, le equazioni di moto diventano

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \dfrac{\partial F_1}{\partial \tilde{\omega}}, & \dot{\eta} = \dfrac{\partial F_1}{\partial \chi} \\ \dot{\tilde{\omega}} = -\dfrac{\partial F_1}{\partial \xi}, & \dot{\chi} = -\dfrac{\partial F_1}{\partial \eta}, \end{cases} \tag{6}$$

con

$$F_1 = \frac{1}{8\rho^2}[(\tilde{\omega} + 2\eta\rho^2)^2 + (\chi - 2\rho^2\xi)^2] - \left[\frac{1-\mu}{\rho^2} + \frac{\rho^4}{2} + \mu V\right].$$

Eliminando ora il tempo a vantaggio della variabile ausiliaria τ tale che

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\rho^2},$$

è possibile riscrivere le equazioni nella forma canonica e *regolare* in S

$$\begin{cases} \xi' = \dfrac{\partial H}{\partial \tilde{\omega}}, & \eta' = \dfrac{\partial H}{\partial \chi} \\ \tilde{\omega}' = -\dfrac{\partial H}{\partial \xi}, & \chi' = -\dfrac{\partial H}{\partial \eta}, \end{cases} \tag{7}$$

dove ora l'apice indica la derivazione rispetto a τ e la funzione H è data da

$$H = \frac{1}{8}[(\tilde{\omega} + 2\eta\rho^2)^2 + (\chi - 2\rho^2\xi)^2] - \left[1 - \mu - C\rho^2 + \frac{\rho^6}{2} + \mu\rho^2 V\right],$$

con C costante del moto. Le soluzioni di (4) corrispondono ad $H = 0$. In [LC06a] LEVI-CIVITA utilizzò le equazioni regolarizzate per caratterizzare le soluzioni lungo le quali P entra in un intorno $\mathcal{D}$ della massa primaria S, esprimendo la minima distanza δ di P da S in termini dello stato di moto di P ad un dato istante.

Il lavoro di SUNDMAN [Su12] fornì a LEVI-CIVITA l'occasione di occuparsi nuovamente della regolarizzazione, quasi dieci anni dopo [LC06a].

«[SUNDMAN scoprì che] (nel caso generale, in cui il momento della quantità di moto è diverso da zero) il moto è prolungabile analiticamente al di là di un urto, non ostante le singolarità delle equazioni differenziali. Questo risultato rivela il carattere inessenziale (dal punto di vista matematico) della detta singolarità, e induce a domandarsi se non sia possibile di farla scomparire con mezzi diretti: intendo rimanendo nell'ambito dei sistemi dinamici, con opportuni cambiamenti di variabile indipendente e di funzioni incognite» (p. 477 di [LC15b])

LEVI-CIVITA si proponeva in [LC15b] di estendere al problema *piano* non ristretto i risultati ottenuti in [LC06a].

«In modo preciso si constaterà che si possono scegliere i parametri determinativi dello stato di moto e la variabile indipendente, per guisa che le equazioni differenziali del problema offrano comportamento regolare anche per posizioni coincidenti di due dei tre corpi (rimanendo esclusa l'eventualità di una collisione generale, tostochè si supponga che non si annulli la costante delle aree): beninteso, senza perdere la forma canonica, né la regolarità per ogni altro stato di moto» (p. 478 di [LC15b])

Lo scopo venne raggiunto introducendo le variabili $(\xi_\upsilon, \eta_\upsilon)$ legate alle coordinate cartesiane (x_υ, y_υ) $(\upsilon = 1, 2, 3)$ dei tre corpi dalle relazioni

$$x_\upsilon + \imath y_\upsilon = (\xi_\upsilon + \imath\eta_\upsilon)^2$$

e simultaneamente introducendo una nuova variabile indipendente τ legata al tempo t dalla relazione

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = U$$

ove U è il potenziale newtoniano complessivo. Le equazioni risultanti sono regolari per tutti gli urti binari possibili.

Ora, in un sistema di riferimento con origine nel centro di massa O dei tre corpi, solo quattro delle sei variabili (ξ_v, η_v) o delle (x_v, y_v) sono indipendenti. Ottenuta la regolarizzazione, LEVI-CIVITA si propose di introdurre delle ulteriori coordinate lagrangiane (q_1, q_2, q_3, q_4) che, conservando i benefici della regolarizzazione, conferissero una forma più simmetrica alle equazioni di moto:

«Riservo ad una prossima comunicazione la introduzione effettiva di convenienti q e la deduzione delle corrispondenti equazioni del moto, sotto una forma simmetrica, in tutto analoga, dal punto di vista analitico, a quella che si presenta nei problemi classici della dinamica dei solidi» (p. 493 di [LC15b])

LEVI-CIVITA non ridusse ulteriormente il numero di coordinate sfruttando la conservazione del momento della quantità di moto ma, con un nuovo approccio, in [LC15b] egli associò ai tre corpi un sistema olonomo ausiliario individuato da una coordinata lagrangiana q e da tre versori ortogonali $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ e $\boldsymbol{\gamma}$ che rappresentano l'orientazione di una terna solidale ad un corpo rigido fittizio. Più precisamente q^2 rappresenta il semiperimetro del triangolo dei tre corpi, le componenti di $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$ rispetto ad una terna fissa centrata in O sono legate alle coordinate (ξ_v, η_v) dalle relazioni $\xi_v = q\alpha_v$ e $\eta_v = q\beta_v$; infine, $\boldsymbol{\gamma} := \boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta}$. Ora, in [LC15c], per una classe di sistemi che ammettevano una descrizione ausiliaria in termini di un numero finito di coordinate lagrangiane $(q_1, ...q_n)$ e di un corpo rigido associato $\mathcal{C}$, LEVI-CIVITA aveva scritto le equazioni di moto in una forma mista, euleriana-lagrangiana. Precisamente, alle equazioni lagrangiane relative alle q_i venivano aggiunte le equazioni di EULERO per il corpo rigido ausiliario $\mathcal{C}$. Applicando questi risultati al problema dei tre corpi, LEVI-CIVITA ottenne varî tipi di equazioni regolarizzate le cui variabili avevano un chiaro significato geometrico, come spiegato in dettaglio nelle note lincee [LC15d] e [LC15e]. A chiusura di questo ciclo di note, LEVI-CIVITA mostrò in [LC15f] il legame tra la regolarizzazione del problema piano completo e quella del problema ristretto, quando una delle masse tende a zero.

Se LEVI-CIVITA aveva portato la regolarizzazione del problema piano ad un livello di notevole generalità, egli non era ancora riuscito ad estendere le tecniche di regolarizzazione al problema dei tre corpi nello spazio. In [LC15b], esprimeva un moderato ottimismo circa la possibilità di venire a capo del problema

«La restrizione che si tratti di moto piano sembra concettualmente irrilevante, e si è tratti a presumere che analoga regolarizzazione possa raggiungersi anche per il problema generale. Ho incontrato finora qualche difficoltà nella costruzione delle trasformazioni regolarizzanti; ma non dispero di superarla con studio ulteriore» (p. 478 di [LC15b])

La fiducia di LEVI-CIVITA faceva leva sui risultati di SUNDMAN che aveva sì ottenuto una regolarizzazione, ma a prezzo dell'introduzione di variabili ausiliarie che rendevano il risultato inadatto alle applicazioni. D'altra parte, i vani tentativi di forzare il problema con trasformazioni analoghe a quelle usate nel caso piano spinsero LEVI-CIVITA ad esplorare una via nuova

«In questa fiducia, dopo aver infruttuosamente saggiato parecchie trasformazioni di coordinate, pensai di ricorrere ad uno spediente di calcolo alquanto più penetrante, cioè ad una trasformazione canonica di contatto (anziché semplicemente puntuale), la quale abbia carattere regolarizzante per il problema elementare dei due corpi. Mostrerò prossimamente come essa conduca alla desiderata regolarizzazione canonica del problema dei tre corpi» (pp. 573-574 di [LC16a])

Il netto cambiamento di rotta operato da LEVI-CIVITA si delineò nelle due brevi note [LC16a] e [LC16b], il cui contenuto venne ripreso nel corposo lavoro [LC20] dove, su invito di MITTAG-LEFFLER, editore capo degli *Acta Mathematica*, egli fornì un'esposizione dettagliata della regolarizzazione tridimensionale. Qui LEVI-CIVITA considerò il moto di un punto P di massa unitaria che descrive un'orbita *parabolica* in un campo centrale newtoniano. Seguendo il metodo di JACOBI, LEVI-CIVITA individuò una trasformazione canonica che applicava la sestupla di coordinate $(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3)$ formata dalle componenti del vettore posizione e della velocità di P in un nuovo insieme di coordinate

$(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3)$, dove le ξ_i sono costanti mentre le $\bar{\omega}_i$ sono funzioni affini del tempo. Il significato fisico delle nuove variabili è chiarito non appena viene trovata, tramite separazione di variabili, la funzione caratteristica della trasformazione canonica. Infatti il vettore $\boldsymbol{\xi}$, di componenti (ξ_1, ξ_2, ξ_3), ha per direzione l'asse della parabola descritta da P e per modulo il doppio della costante di attrazione newtoniana verso il centro fisso. Il vettore $\bar{\boldsymbol{\omega}}$, di componenti $(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3)$, è legato al momento angolare costante $\boldsymbol{c}$ dalla relazione $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{\xi} \wedge \bar{\boldsymbol{\omega}}$. In forma esplicita, la trasformazione canonica è

$$\begin{cases} x_i = \bar{\omega}^2 \xi_i - 2\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \bar{\omega}_i \xi_i\right) \bar{\omega}_i \\ p_i = \dfrac{\bar{\omega}_i}{\bar{\omega}^2}\,, \end{cases}$$

dove $\bar{\omega} = |\bar{\boldsymbol{\omega}}|$. Come notò LEVI-CIVITA, la trasformazione è birazionale e regolare per i valori finiti degli argomenti che non annullano il trinomio $\bar{\omega}^2$, né $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$. La varietà tridimensionale Γ formata dalle sestuple che hanno $\bar{\omega}_i = 0$, ma almeno una delle ξ_i non nulla, è certamente singolare per la trasformazione ma non divide in componenti connesse distinte il dominio di dimensione sei in cui la trasformazione è olomorfa. È dunque possibile far tendere verso Γ una sestupla $(\xi_i, \bar{\omega}_i)$ seguendo una curva *regolare*. In questo modo i rapporti $\dfrac{\bar{\omega}_i}{\bar{\omega}}$ sono i coseni direttori della tangente alla traiettoria di avvicinamento a Γ ed hanno limiti γ_i non tutti nulli, dovendo verificare la relazione $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$. Grazie a questa osservazione, LEVI-CIVITA poté concludere che

«Al tendere verso Γ, le coordinate x_i, la distanza r, ed i prodotti rp_i, $r(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)$ si comportano come funzioni regolari di ξ_i e $\bar{\omega}_i$ e tendono a zero» (p. 247 di [LC20])

Il raccordo con la regolarizzazione del problema dei tre corpi richiese l'impiego della forma canonica di POINCARÉ delle equazioni di moto, così da associare ai moti su una varietà di energia costante le soluzioni di un sistema canonico con hamiltoniana nulla. A questo punto, il cambiamento di variabile indipendente «alla SUNDMAN» $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{1}{r}$ e l'uso della trasformazione ottenuta per il moto parabolico permettevano di regolarizzare le equazioni di moto in corrispondenza di un urto binario, assumendo le coordinate di un corpo P rispetto al corpo di riferimento O come x_i e le componenti della quantità di moto assoluta di P come p_i. La trasformazione non toccava le analoghe quantità (x'_i, p'_i) del terzo corpo P', non coinvolto nella collisione. Come ultimo contributo di questo importante lavoro, LEVI-CIVITA riuscì a simmetrizzare le equazioni di moto che risultavano così regolarizzate per tutti i possibili urti binarî. Esclusa la possibilità di collisioni totali, lo spazio delle configurazioni del problema è suddiviso in quattro regioni $S_0, ..., S_3$ così caratterizzate: in S_0 le distanze mutue tra i corpi non scendono mai al di sotto di una quantità positiva fissata, mentre in S_i ci sono urti binari. In ciascuna regione il sistema si comporta in modo regolare –al più in virtù della trasformazione canonica trovata– e dunque in ognuna di esse la hamiltoniana è una funzione regolare di dodici variabili. Restava aperto il problema di determinare esplicitamente le variabili regolarizzanti *in tutte* le regioni $S_0, ..., S_3$:

«Ma si vorrebbe disporre di una scelta più espressiva per tali parametri. Mi limito a segnalare il problema. Un'idea della sua natura e delle risorse formali a cui occorrerà verosimilmente far ricorso si può avere confrontando il caso particolare del problema piano. In questo caso, il problema in questione è stato in effetti trattato con tutti gli sviluppi necessari» (p. 263 di [LC20]).

L'impossibilità di estendere le tecniche di regolarizzazione usate in due dimensioni al problema tridimensionale è dovuta al formalismo complesso ampiamente utilizzato da LEVI-CIVITA. Il problema della regolarizzazione in tre dimensioni sarà affrontato mezzo secolo più tardi da KUSTAANHEIMO e STIEFEL [KS65] che, con l'uso degli spinori, riusciranno ad estendere l'elegante procedura introdotta da LEVI-CIVITA per la regolarizzazione dei moti piani, senza fare riferimento a [LC20]. Una chiara esposizione del metodo di KUSTAANHEIMO e STIEFEL si trova nel testo [SS71].

A conclusione di questa sezione, non è superfluo ricordare quale fosse l'atteggiamento di LEVI-CIVITA nei riguardi del problema delle collisioni in meccanica celeste. Riferendosi alla descrizione degli urti nel problema dei tre corpi, egli affermava

«Ma, quando anche si avesse una collisione, non sarebbe possibile ancora trarne conseguenze astronomiche. In effetti, i corpi celesti non sono punti materiali ed è possibile descriverli come tali solo quando le loro dimensioni sono trascurabili rispetto alle distanze mutue, cioè (assegnate le dimensioni ed il grado di approssimazione) finché tali distanze non scendono sotto un certo limite ε. Solo a questa condizione i risultati matematici sono accettabili» (p. 420 di [LC06a])

Nello stesso spirito, LEVI-CIVITA giudicava favorevolmente i risultati di ARMELLINI [Ar15] che aveva considerato il problema del prolungamento della soluzione dopo un urto assimilando i corpi non già a punti materiali, ma a sfere omogenee di ugual raggio r, perfettamente elastiche. Indicate con C_1, C_2 e C_3 le traiettorie dei centri delle sfere e con K_1, K_2 e K_3 le traiettorie dei corrispondenti punti materiali esaminati da SUNDMAN, egli mostrò che $\lim_{r\to 0} C_i = K_i$ $(i = 1, 2, 3)$ e poté così interpretare il prolungamento della soluzione adottato da SUNDMAN come caso limite di un urto elastico tra sfere.

Se il richiamo alla natura matematica del problema rimane valido, è interessante riprodurre alcuni passi sul tema delle singolarità in meccanica celeste tratte da testi scritti più di mezzo secolo dopo, in piena era di esplorazioni spaziali, che attestano la rinnovata attenzione verso efficaci tecniche di regolarizzazione.

«Spesso le sonde spaziali richiedono orbite che vanno da un corpo celeste ad un altro. Certamente, le orbite effettive non passano per i punti singolari. (...) Sotto l'aspetto concettuale e numerico (computazionale) gli aspetti legati alla singolarità del problema sono di capitale importanza. Sia la forza agente sul terzo corpo che la sua velocità crescono quando il corpo si approssima ad una delle primarie. L'ampiezza del passo di un'integrazione numerica deve diminuire sensibilmente in questa regione perché i risultati ottenuti siano affidabili. Gli aspetti fisici delle traiettorie spaziali richiedono parimenti una maggiore accuratezza in prossimità delle singolarità» (*cfr.* pp. 70-71 di [Sz67])

5. – Soluzioni periodiche: Il moto del nodo lunare.

A questo problema LEVI-CIVITA dedicò un'articolata memoria [LC11] sulla quale si innestarono i lavori di Eugenio Elia LEVI (1883-

1917) [L11], analista di Padova morto prematuramente al fronte durante la Prima Guerra Mondiale, di Libera TREVISANI (1890-1973) [Tre12], moglie di LEVI-CIVITA (7), e di Emma TRAPANI [Tra19]. Come richiamato nella Sezione 2 di [R05], con l'espressione *moto medio* si indica in meccanica celeste una velocità angolare efficace *costante*, *equivalente* ad una velocità angolare non uniforme. Così nel problema di KEPLER il moto medio di un pianeta attorno al Sole è la velocità angolare costante di un ipotetico moto uniforme con periodo pari a quello di rivoluzione.

Nella teoria lunare, l'orbita della Luna taglia il piano dell'eclittica lungo una retta, detta *linea dei nodi*, la cui posizione varia nel tempo. LEVI-CIVITA studiò in [LC11] l'esistenza del moto medio *asintotico* per la retta dei nodi lunari, come caso particolare della teoria dei moti asintotici per sistemi di due equazioni differenziali a coefficienti periodici.

«Tornando al contenuto di questa memoria, debbo aggiungere qualche parola sull'applicazione alla teoria della luna contenuta nell'ultimo capitolo. Non si troverà la soluzione di problemi nuovi, quanto un'esposizione didattica di fondamenti e sviluppi ben noti volta a dimostrare rigorosamente un risultato teorico che si può far risalire a NEWTON: l'esistenza di un moto medio *(asintotico)* del nodo lunare» (*cfr.* p. 209 di [LC11])

La critica rivolta da LEVI-CIVITA all'approccio classico al problema è metodologica. Il moto della Luna fuori dal piano (x, y) dell'eclittica veniva ricondotto ad un'equazione differenziale a coefficienti periodici del tipo

$$\ddot{z} + 2p(t)\dot{z} + q(t)z = 0 \tag{8}$$

dove un punto indica derivazione rispetto al tempo, $p(t)$ e $q(t)$ sono funzioni periodiche di opportuno periodo T e $z(t)$ è lo scostamento della Luna dal piano dell'eclittica. Così, le radici dell'equazione $z(t) = 0$

(7) Un breve profilo biografico della TREVISANI si trova in [Na99] che contiene anche brani estratti dal diario di un viaggio di lavoro effettuato al seguito del marito nel 1925 attraverso le principali città dell'Europa Centro-Orientale.

indicano i passaggi della Luna per la linea dei nodi. Sviluppando in serie trigonometrica la soluzione di (8), si osservava la presenza di un termine dominante, circostanza che consentiva di dedurre correttamente la presenza di un ben determinato numero di radici di $z(t) = 0$ all'interno di un periodo T. Questo risultato veniva utilizzato per stimare l'entità del moto medio asintotico del nodo lunare, «*presupponendo tuttavia l'esistenza di tale moto medio*» (p. 209 di [LC11]). LEVI-CIVITA sanò questo difetto logico applicando al problema la sua teoria generale di esistenza del moto medio asintotico per le soluzioni di sistemi di equazioni differenziali del tipo

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = & a_{11}x + a_{12}y \\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = & a_{21}x + a_{22}y\,, \end{cases} \tag{9}$$

dove i coefficienti a_{ij} sono funzioni periodiche del tempo. Se si interpretano x ed y come coordinate cartesiane piane di un punto P e si introduce l'anomalia ϑ di P, è lecito chiedersi quale sia l'evoluzione di $\vartheta(t)$ con riferimento particolare al comportamento asintotico. LEVI-CIVITA dimostrò che

$$\vartheta(t) = \omega t + \varepsilon(t)$$

dove $\varepsilon(t)$ è una funzione limitata del tempo ed ω è una costante legata agli esponenti caratteristici di (9). Dall'espressione di $\vartheta(t)$ è immediato concludere che

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\vartheta(t)}{t} = \omega\,,$$

per cui la velocità angolare di P tende ad un valore costante o, in termini equivalenti, P possiede moto medio asintotico. Dunque, l'anomalia ϑ corrispondente ad $(x(t), y(t))$ ammette un moto medio asintotico. Quando si considerano equazioni del tipo (8), i risultati sin qui illustrati possono essere applicati traducendo l'equazione del secondo ordine in un sistema del primo ordine in $z(t)$ ed $y(t) := \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$. Anziché parlare di moto medio nello spazio delle fasi $(z(t), \dot{z}(t))$, LEVI-CIVITA rilegge i risultati in termini di distribuzione degli zeri della soluzione $z(t)$ di (8). Con opportune trasformazioni infatti egli mostra che se il valor medio

$$\mu := \frac{1}{T}\int_0^T (q - p^2)\mathrm{d}t$$

è positivo, allora le soluzioni di (8) hanno le radici distribuite *quasi-uniformemente*, nel senso che il numero di radici comprese all'interno di un intervallo di ampiezza T tende ad un valore costante quando $t \to +\infty$.

Svolta la parte generale, LEVI-CIVITA ricorda gli elementi della teoria lunare di HILL, che studia il sistema Sole, Terra e Luna come un problema ristretto dei tre corpi, con il Sole e la Terra nel ruolo di masse primarie. Il moto della Luna viene descritto in due tempi. Dapprima si trova una soluzione particolare *periodica* per il problema piano, con periodo T pari al mese sinodico. In questa fase, ogni movimento lungo la direzione z ortogonale al piano (x, y) di moto delle primarie viene trascurato. Successivamente, il moto lungo z viene trattato con approccio perturbativo ed è ridotto alla soluzione dell'equazione

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = q(t)z(t) \tag{10}$$

dove $q(t)$ è una funzione periodica, di periodo T, che si può considerare come una funzione *nota* del tempo. L'equazione (10) rientra nella classe (8) ed è detta equazione di HILL, dal nome del matematico americano che la risolse servendosi del concetto di determinante infinito. Come già accennato, quando $z(t) = 0$ la Luna si trova sul piano dell'eclittica ed il comportamento delle radici di quest'equazione in funzione del tempo fornisce informazioni sul moto del nodo lunare. Per ottenere risultati circa l'andamento della longitudine $\vartheta(t)$ del nodo ascendente, LEVI-CIVITA scrisse l'equazione (10) come un sistema hamiltoniano in termini di nuove variabili (X, Y) in modo che le equazioni di HAMILTON corrispondenti, dopo opportune trasformazioni canoniche, avessero coefficienti periodici e l'anomalia associata al punto

(X, Y) fosse direttamente legata a ϑ. In questo modo LEVI-CIVITA riuscì a *dimostrare* l'esistenza del moto medio asintotico direttamente dalla teoria generale ricavata in precedenza, senza doverla assumere come ipotesi.

A margine, ricordiamo che nell'introduzione a [LC11] LEVI-CIVITA aveva congetturato l'esistenza di un moto medio asintotico per le equazioni del tipo

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t} = \Theta(t, \vartheta)$$

con Θ funzione continua, limitata e periodica rispetto a t ed a ϑ. La congettura fu provata poco dopo da Eugenio Elia LEVI nella memoria [L11]. La determinazione *effettiva* del moto medio asintotico lunare richiede lo studio della soluzione particolare del problema piano da cui dipendono le proprietà della funzione $q(t)$ che figura in (10). Questo calcolo minuzioso venne svolto nei dettagli da Emma TRAPANI che ottenne in [Tra19] un valore accurato per ω attraverso uno studio dettagliato della teoria lunare di HILL.

Libera TREVISANI invece applicò in [Tre12] la teoria di LEVI-CIVITA allo studio del moto medio asintotico dei nodi nel problema completo dei tre corpi, supponendo che i corpi fossero sempre prossimi ad un piano fisso. Questa ipotesi permetteva di separare il problema in due parti,

«un problema piano ed un successivo problema obliquo che deve definire i piccoli spostamenti dei due corpi dal piano di riferimento. Quest'ultimo problema è analiticamente specificato da un sistema differenziale del quart'ordine, i coefficienti del quale, ove si supponga assegnata una soluzione Σ del problema piano, sono funzioni note del tempo. (...) Tutto ciò assume particolare interesse quando la soluzione piana assegnata Σ sia periodica. Allora infatti, applicando il teorema generale dimostrato dal LEVI-CIVITA, si rende manifesto che i nodi delle orbite osculatrici (nel piano invariabile) sono effettivamente dotati di moto medio asintotico» (p.1090 di [Tre12])

Il piano fisso di riferimento può essere sia il piano invariabile (*cfr.* §3), sia un piano prossimo ad esso. Nella parte tecnica di [Tre12], la TREVISANI studiò le proiezioni delle equazioni di moto per due masse

P_1 e P_2 rispetto alla terza massa P_0 nella direzione ortogonale al piano di riferimento. Grazie alla conservazione del momento della quantità di moto e ad una serie di trasformazioni canoniche, le equazioni si potevano esprimere sotto una forma adatta all'applicazione delle tecniche di LEVI-CIVITA, dimostrando così l'esistenza del moto medio asintotico dei nodi delle orbite osculatrici rispetto al piano fisso. Per calcolare il valore del moto medio occorrevano però informazioni dettagliate sulla soluzione piana di riferimento. Le soluzioni analitiche conosciute per il problema dei tre corpi erano quelle trovate da EULER e LAGRANGE. Nelle soluzioni euleriane, i tre corpi si muovono lungo coniche omofocali in modo tale da essere *sempre* allineati lungo una retta mobile che ruota attorno al centro di massa dei tre corpi con velocità angolare costante. Nelle soluzioni lagrangiane i corpi si muovono ancora lungo coniche omofocali ma restano sempre ai vertici di un triangolo equilatero che ruota attorno al centro di massa dei tre corpi con velocità angolare costante. È interessante ricordare che LEVI-CIVITA [LC06b] dedusse tutte queste soluzioni particolari come moti stazionari, generalizzando la nozione di moto stazionario introdotta da ROUTH [Rou84].

La TREVISANI considerò una delle soluzioni rettilinee euleriane come soluzione Σ di riferimento, considerando per semplicità solo corpi P_1 e P_2 di ugual massa m che descrivono orbite circolari concentriche attorno a P_0. In questo caso particolare, detta n la velocità angolare costante di rotazione della retta su cui giacciono i tre corpi nella soluzione euleriana, è possibile ricavare esplicitamente il moto medio asintotico ω dei nodi

$$\omega = n\left\{1 - \frac{\sqrt{1+2m}}{\sqrt{1+\dfrac{m}{4}}}\right\},$$

che ha lo stesso valore per P_1 e P_2, grazie all'uguaglianza delle loro masse.

Infine, ricordiamo come LEVI-CIVITA si servì della teoria generale presentata in [LC11] e degli elementi isoenergetici (*cfr.* §2) per ottenere in [LC13] una elegante proprietà qualitativa delle soluzioni prossime a quella triangolare di LAGRANGE. Infatti, egli dimostrò che il moto medio asintotico della linea dei nodi era pari al doppio della velocità angolare con cui ruota il triangolo dei corpi.

6. – Le soluzioni di Pavanini.

Oltre alle soluzioni di EULER-LAGRANGE, altre soluzioni periodiche per il problema ristretto dei tre corpi erano note –non in forma chiusa – all'inizio del '900. Esse erano suddivise in tre famiglie, come ricordato da PAVANINI in [Pav07]:

1) «Soluzioni *piane* (di HILL e CHARLIER) che hanno luogo vicino alle posizioni di equilibrio relativo di P rispetto ai due centri mobili S, J. Queste soluzioni esistono per qualsiasi valore delle masse di S e J.

2) Soluzioni vicine alle posizioni singolari S, J.

3) Soluzioni messe in luce da POINCARÉ, che hanno un grado di regolarità di molto superiore alle precedenti, ma di cui si può rigorosamente dimostrare l'esistenza solo per valori abbastanza piccoli di una delle due masse finite (ad esempio quella di J) rispetto all'altra» (*cfr.* p. 179 di [Pav07])

Sempre nell'introduzione del lavoro [Pav07], che costituisce una interessante applicazione delle tecniche analitiche introdotte da POINCARÉ, PAVANINI chiariva il suo obiettivo

«Argomento della presente Memoria è invece di provare l'esistenza di una categoria di soluzioni periodiche, bene distinta (per quanto meno ampia e meno importante) da quelle studiate fino ad oggi. Mi propongo cioè di mostrare che hanno luogo soluzioni periodiche non piane nell'ipotesi che le due masse finite di S e J differiscano poco fra loro» (*cfr.* p. 180 di [Pav07])

Per raggiungere lo scopo, PAVANINI dapprima considerò una configurazione semplice in cui le primarie S_1 ed S_2 hanno ugual massa (normalizzata) pari ad $\frac{1}{2}$, mentre P si trova all'istante $t = t_0$ sull'asse x_3 passante per il centro di massa delle primarie, con velocità pure diretta lungo l'asse x_3 (Figura 3). Nella soluzione $\phi(t)$ corrispondente, P oscilla periodicamente lungo l'asse x_3 quando la sua energia E, opportunamente riscalata, ha valori nell'intervallo $]-2,0[$: l'estremo inferiore corrisponde alla configurazione di equilibrio stabile in cui P coincide

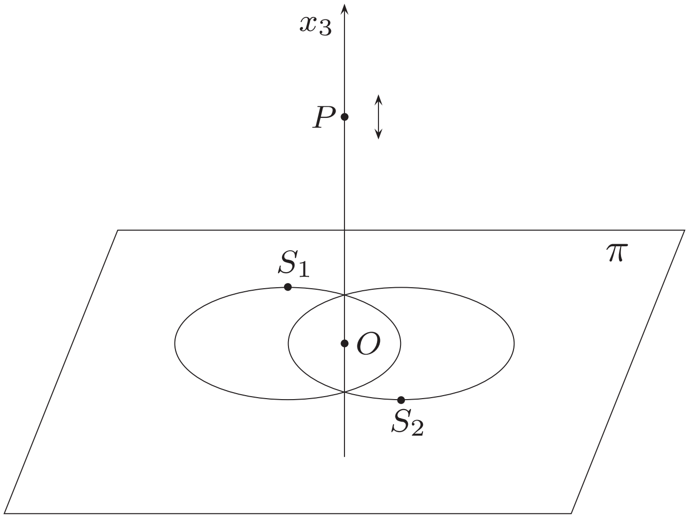

Fig. 3. – Geometria della soluzione di PAVANINI.

con il centro di massa delle primarie, quello superiore ad un moto con elongazione infinita. Utilizzando le proprietà delle funzioni ellittiche, PAVANINI poté dimostrare che il periodo T delle soluzioni periodiche tendeva al valore non nullo

$$T = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \,,$$

quando $E \to -2^+$. Questa soluzione fu ritrovata indipendentemente da MAC MILLAN [Mac11] che venne a conoscenza dell'articolo di PAVANINI su segnalazione di LOVETT. La novità apportata da MAC MILLAN riguarda lo studio dello sviluppo in serie di FOURIER della soluzione.

Il risultato di PAVANINI è anche notevole perché fornì un nuovo esempio di soluzione analitica del problema ristretto dei tre corpi dopo quelle, note da più di un secolo, di EULER e LAGRANGE. Grazie alla soluzione esplicita $\phi(t)$, nella seconda parte di [Pav07] PAVANINI mostrò l'esistenza di una classe di soluzioni periodiche quando le primarie hanno masse $\frac{1}{2} - \varepsilon$ ed $\frac{1}{2} + \varepsilon$, rispettivamente. Sfruttando la dipendenza continua della soluzione dai dati iniziali ed applicando le tecniche di POINCARÉ (*cfr.* Cap. 3 di [Poi92], Vol. I) egli dapprima mostrò l'esistenza di una soluzione Σ_0 del problema ristretto *vicina* alla soluzione $\phi(t)$ appena trovata, sempre per $\varepsilon = 0$. Se (x_1, x_2, x_3) ed (y_1, y_2, y_3) indicano rispettivamente le componenti delle coordinate e della velocità di P sulla soluzione Σ_0, all'istante $t = 0$ deve essere

$$\begin{array}{lll} x_1(0) = \beta_1 & x_2(0) = \beta_2 & x_3(0) = \beta_3 + \phi(0) \\ y_1(0) = \beta_4 & y_2(0) = \beta_5 & y_3(0) = \phi'(0) + \beta_6\,, \end{array}$$

dove le costanti β_i sono sufficientemente piccole. Al variare del tempo, Σ_0 ammette la rappresentazione

$$x_i(\beta_j, t) = \xi_i(\beta_j, t) + R_i(\beta_j, t) \quad (i = 1, 2) \quad x_3(t) = \phi(t) + \xi_3(\beta_j, t) + R_3(\beta_j, t)$$

$$y_i(\beta_j, t) = \eta_i(\beta_j, t) \quad (i = 4, 5) \quad y_3(t) = \phi'(t) + \eta_6(\beta_j, t) + R_6(\beta_j, t) \quad (j = 1, ..., 6)$$

in cui le funzioni $\xi_i(\beta_j, t)$ e le $\eta_i(\beta_j, t)$ contengono potenze di grado 1 delle β_j, mentre le funzioni R_i contengono potenze di grado superiore delle β_j. La soluzione Σ del problema per $\varepsilon \neq 0$ che tende a Σ_0 quando $\varepsilon \to 0$ è rappresentabile nella forma

$$x_i = x_i(\varepsilon, \beta_1, \beta_2, \beta_3, t) \quad y_i = y_i(\varepsilon, \beta_4, \beta_5, \beta_6, t)$$

ed è periodica, con periodo $T + \tau$, quando

$$\begin{array}{ll} x_i(\varepsilon, \beta_1, \beta_2, \beta_3, T + \tau) - x_i(\varepsilon, \beta_1, \beta_2, \beta_3, 0) = 0 & \\ y_i(\varepsilon, \beta_4, \beta_5, \beta_6, T + \tau) - y_i(\varepsilon, \beta_4, \beta_5, \beta_6, 0) = 0 & (i = 1, 2, 3), \end{array} \tag{11}$$

con $\tau \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$. Nella parte più delicata di [Pav07] PAVANINI dimostrò la risolubilità del sistema (11) in termini di τ e β_j, almeno quando $\varepsilon \ll 1$, deducendo da ciò l'esistenza di una famiglia doppiamente infinita di soluzioni periodiche. La difficoltà del problema rispetto ai casi esposti da POINCARÉ nei *Méthodes Nouvelles* è di tipo tecnico:

«Nelle classiche ricerche di POINCARÉ si presenta la circostanza favorevole che si sa integrare il sistema di equazioni differenziali per $\varepsilon = 0$, cosicché, trovato che per questo valore di ε esistono delle soluzioni periodiche, la dimostrazione dell'esistenza di tali soluzioni anche per ε diverso da 0, non richiede che una semplice verifica materiale. Nel mio caso invece le equazioni del moto non sono integrabili per $\varepsilon = 0$, e quindi per raggiungere il mio scopo devo ricorrere a speciali artifici» (p. 181 di [Pav07])

Le soluzioni di PAVANINI destarono l'interesse immediato di LOVETT che nella breve nota [L08] applicò alla lettera il procedimento di PAVANINI ad un caso particolare del problema dei *quattro* corpi. Nella soluzione di riferimento, tre corpi P_1, P_2 e P_3 di ugual massa $\frac{1}{3}$ descrivono la configurazione triangolare di LAGRANGE mentre il corpo di massa trascurabile si muove lungo la retta passante per il centro di massa di P_1, P_2 e P_3, ortogonale al loro piano di moto. Questa soluzione particolare è perturbata per ottenere una famiglia di soluzioni periodiche quando P_1, P_2 e P_3 hanno masse $\dfrac{1}{3}+\mu$, $\dfrac{1}{3}$ ed $\dfrac{1}{3}-\mu$, rispettivamente.

Si può ricordare in questa sede che la generalizzazione della geometria del problema di PAVANINI al caso in cui le primarie si muovano lungo ellissi anziché circonferenze ha dato origine al cosiddetto problema di SITNIKOV ed ha permesso di mostrare una congettura di CHAZY sull'esistenza di moti oscillatori nel problema dei tre corpi: a tal proposito si veda [BP96], Capp. 3-4.

7. – Conclusioni.

La scuola fisico-matematica italiana ha giocato un ruolo di spicco nella ricerca sul problema dei tre corpi proprio negli anni in cui avvenivano mutamenti sostanziali nell'approccio al problema. Attraverso i suoi elementi migliori la scuola italiana è stata attenta a vagliare criticamente la letteratura contemporanea, affrontando i temi di primo piano e diventando punto di riferimento per ricercatori di altri paesi. Anche se da una lettura più approfondita ci si rende ovviamente conto che i vari contributi non possiedono tutti lo stesso grado di originalità resta però l'impressione, suffragata dai risultati, di una scuola all'avanguardia, consapevole della propria importanza nel panorama scientifico dell'epoca.

Ringraziamenti. – Come già fatto in [R05], voglio ringraziare il Prof. Eugenio REGAZZINI che ha incoraggiato la stesura del lavoro, il Dott. Claudio GNOLI ed il sig. Piero CIACCIA per la disponibilità mostrata nell'assecondare le mie esigenze di consultazione bibliografica.

BIBLIOGRAFIA

[Al22] E. ALMANSI, *Sopra i moti ellittici perturbati*, Rend. Acc. Lincei $\mathbf{31}_1$, Serie V (1922_1), 277-282.

[Ar15] G. ARMELLINI, *Estensione della soluzione del Sundman dal caso di corpi ideali, al caso di sferette elastiche omogenee*, Rend. Acc. Lincei $\mathbf{24}_1$, serie V (1915), 184-190.

[Ar18] G. ARMELLINI, *Ricerche sopra la previsione dell'urto nel problema dei tre corpi*, Rend. Acc. Lincei **27** (1918), 87-91.

[B-G97] J. BARROW-GREEN, *Poincaré and the Three Body Problem*, American Mathematical Society, Providence (1997).

[Ber54] J. BERTRAND, *Mémoire sur l'intégration des équations differentielles de la mécanique*, Journ. Math. **19** (1854), 88-111.

[Bir15] G.D. BIRKHOFF, *The restricted problem of three bodies*, Rend. Circ. Mat. Palermo **39** (1915), 265-336.

[Bis05] G. BISCONCINI, *Sur le problème des trois corps*, Acta Math. **30** (1905), 49-91.

[BP96] G. BOCCALETTI - G. PUCACCO, *Theory of Orbits I. Integrable Systems and Non-perturbative Methods*, Springer, Berlin (1996).

[Bou56] E. BOUR, *Mémoire sur le problème des trois corps*, Jour. École Polytechnique **21** (1856), 35-58.

[Bri68] F. BRIOSCHI, *Sur une transformation des équations différentielles du problème des trois corps*, Comptes R. des séances Acad. Sc. **66** (1868), 710-714.

[Br87] E.H. BRUNS, *Über die integrale des vielkörper-problems*, Acta Math. **11** (1887), 25-96.

[Bu06] C. BURRAU, *Über einige aussicht genommene berechnung, betreffend einen spezialfall des dreikörperproblems*, Virteljahrsschrift Astron. Ges. **41** (1906), 261.

[Del67] C.E. DELAUNAY, *Théorie du Mouvement de la Lune*, Mallet-Bachelier, Paris (1860-1867).

[DA93] L. DELL'AGLIO, *Tradizioni di ricerca nella meccanica celeste classica: il problema dei tre corpi in Levi-Civita e Sundman*, Physis **30** (1993), 105-144.

[DH96] F. DIACU - P. HOLMES, *Celestial Encounters*, Princeton University Press, Princeton (1996).

[Ger91] J. GERVER, *The existence of pseudocollisions in the plane*, J. Diff. Eq. **89** (1991), 1-68.

[Jac42] C.G.J. JACOBI, *Sur l'élimination des nuds dans le problème des trois corps*, Comp. Rend. Acad. Sci. Paris **15** (1842), 236-255. In C.G.J. Jacobi *Gesammelte Werke vol. IV*, Reimer, Berlin (1886), 295-314.

[JT00] E. JULLIARD-TOSEL, *Bruns' theorem: the proof and some generalizations*, Cel. Mech. Dyn. Astr. **76** (2000), 241-281.

[KS65] P. KUSTAANHEIMO - E. STIEFEL, *Perturabation theory of Kepler motion based on spinor regularization*, J. Reine Angew. Math. **218** (1965), 204-219.

[Lag72] J.-L. LAGRANGE, *Essai sur le problème des trois corps.* Prix de l'Académie Royale des Sciences de Paris: Tome **IX** (1772). In J.-L. Lagrange *Œuvres vol. VI*, Gauthier-Villars, Paris (1869), 229-324.

[Le55] G. LEMAÎTRE, *Regularization of the three-body problem*, Vistas in Astronomy **1** (1955), 207-215.

[L11] E.E. LEVI, *Sur les équations differentielles périodiques*, Comptes R. Acad. Sci. **153** (1911), 799-802. In E.E. LEVI, *Opere Matematiche vol. I*, Cremonese, Roma (1959), 225-228.

[LC03a] T. LEVI-CIVITA, *Condition du choc dans le problème restreint des trois corps*, Comptes Rendus Acad. Sc. Paris **135** (1903), 221-223. In T. LEVI-CIVITA, *Opere Matematiche vol. II*, Zanichelli, Bologna (1956), 275-277.

[LC03b] T. LEVI-CIVITA, *Traiettorie singolari ed urti nel problema ristretto dei tre corpi*, Ann. Mat. **9**, serie III (1903), 1-32. In T. LEVI-CIVITA, *Opere Matematiche vol. II*, Zanichelli, Bologna (1956), 279-308.

[LC06a] T. LEVI-CIVITA, *Sur la résolution qualitative du problème des trois corps*, Acta Math. **30** (1906), 305-327. In T. LEVI-CIVITA, *Opere Matematiche vol. II*, Zanichelli, Bologna (1956), 419-439.

[LC06b] T. LEVI-CIVITA, *Sur la recherche des solutions particulières des systèmes différentiels et sur le mouvements stationnaires*, Prac. Mat.-Fiz. **17** (1906), 1-40. In T. LEVI-CIVITA, *Opere Matematiche vol. II*, Zanichelli, Bologna (1956), 465-501.

[LC11] T. LEVI-CIVITA, *Sur les équations linéaires à coefficients périodiques et sur le moyen mouvement du nœud lunaire*, Ann. Ec. Norm. Sup. **28**, Serie 3 (1911), 325-376. In T. LEVI-CIVITA, *Opere Matematiche vol. III*, Zanichelli, Bologna (1956), 205-252.

[LC13] T. LEVI-CIVITA, *Nuovo sistema canonico di elementi ellittici*, Ann. Mat. **20**, Serie III (1913), 1-17. In T. LEVI-CIVITA, *Opere Matematiche vol. III*, Zanichelli, Bologna (1956), 341-356.

[LC15a] T. LEVI-CIVITA, *Sulla riduzione del problema dei tre corpi*, Atti R. Ist. Ven. **74** (1914-1915), 907-939. In T. LEVI-CIVITA, *Opere Matematiche vol. III*, Zanichelli, Bologna (1956), 437-466.

[LC15b] T. LEVI-CIVITA, *Sulla regolarizzazione del problema piano dei tre corpi*, Rend. Acc. Lincei $\mathbf{24}_2$, Serie V (1915_2), 61-75. In T. LEVI-CIVITA, *Opere Matematiche vol. III*, Zanichelli, Bologna (1956), 477-493.

[LC15c] T. LEVI-CIVITA, *Forma mista di equazioni del moto che conviene ad una particolare categoria di sistemi meccanici*, Rend. Acc. Lincei $\mathbf{24}_2$, Serie V

(1915_2), 235-448. In T. LEVI-CIVITA, *Opere Matematiche vol. III*, Zanichelli, Bologna (1956), 495-509.

[LC15d] T. LEVI-CIVITA, *Sul problema piano dei tre corpi I. Caratteristiche cinetiche del sistema regolarizzante; forza viva e quadrica reciproca*, Rend. Acc. Lincei **24**$_2$, Serie V (1915_2), 422-433. In T. LEVI-CIVITA, *Opere Matematiche vol. III*, Zanichelli, Bologna (1956), 511-525.

[LC15e] T. LEVI-CIVITA, *Sul problema piano dei tre corpi II. Forme esplicite (mista e canoniche) delle equazioni regolarizzate*, Rend. Acc. Lincei **24**$_2$, Serie V (1915_2), 485-501. In T. LEVI-CIVITA, *Opere Matematiche vol. III*, Zanichelli, Bologna (1956), 526-544.

[LC15f] T. LEVI-CIVITA, *Sul problema piano dei tre corpi III. Caso limite in cui una delle masse è infinitesima*, Rend. Acc. Lincei **24**$_2$, Serie V (1915_2), 553-569. In T. LEVI-CIVITA, *Opere Matematiche vol. III*, Zanichelli, Bologna (1956), 545-564.

[LC16a] T. LEVI-CIVITA, *Sopra due trasformazioni canoniche desunte dal moto parabolico*, Rend. Acc. Lincei **25**$_1$, Serie V (1916_1), 446-458. In T. LEVI-CIVITA, *Opere Matematiche vol. III*, Zanichelli, Bologna (1956), 574-587.

[LC16b] T. LEVI-CIVITA, *Sur la régularisation du problème des trois corps*, Comptes Rendus Acad. Sc. Paris **162** (1916), 1-4. In T. LEVI-CIVITA, *Opere Matematiche vol. III*, Zanichelli, Bologna (1956), 589-593.

[LC20] T. LEVI-CIVITA, *Sur la régularisation du problème des trois corps*, Acta Math. **42** (1920), 99-144. In T. LEVI-CIVITA, *Opere Matematiche vol. IV*, Zanichelli, Bologna (1956), 217-264.

[Lie75] S. LIE, *Begrüdung einer invariante-theorie der berührungs-transformationen*, Math. Ann. **8** (1875), 215-302.

[L08] E.O. LOVETT, *On a class of periodic solutions in the problem of four bodies*, Ann. Mat. **30**, Serie III (1908), 327-333.

[Mac11] W.D. MAC MILLAN, *An integrable case in the restricted problem of three bodies*, Astron. Journ. **27** (1911), 11-13.

[Mac13] W.D. MAC MILLAN, *On Poincaré correction to Bruns' theorem*, Bull. Amer. Math. Soc. **19** (1913), 349-355.

[Mar14] R. MARCOLONGO, *Le recenti ricerche di K. Sundman sul problema matematico dei tre corpi*, Giorn. Matem. **5**, serie II (1914), 171-186.

[Mar19] R. MARCOLONGO, *Il Problema dei Tre Corpi. Da Newton (1686) ai Nostri Giorni*, Hoepli, Milano (1919).

[Mou14] F. R. MOULTON, *An Introduction to Celestial Mechanics*, 2nd Revised Edition. Mac Millan, New York (1914).

[Na99] P. NASTASI, *Dalla parte delle mogli. Appunti di viaggio di Libera Trevisani Levi-Civita (1890-1973)*, Lettera Matematica Pristem **31** (1999), 51-54.

[Pa97] P.P. PAINLEVÉ, *Leçons sur la théorie analytique des équations differentielles*, Hermann, Paris (1897).

[Pa98] P.P. PAINLEVÉ, *Mémoire sur les intégrales premières du problème des n corps*, Bull. Astr. **15** (1898), 81-113.

[Pav07] G. PAVANINI, *Sopra una nuova categoria di soluzioni periodiche nel problema dei tre corpi*, Ann. Mat. **13**, Serie III (1907), 179-202.

[Piz15] P. PIZZETTI, *Generalizzazione di alcune formule di Sundman*, Giorn. Matem. **6**, serie 3, (1915), 276-283.

[Poi90] H. POINCARÉ, *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*, Acta Math. **13** (1890), 1-270.

[Poi92] H. POINCARÉ, *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, Gauthier-Villars, Paris. Tome I (1892). Tome II (1893). Tome III (1899).

[Poi96] Poincaré, H., *Sur une forme nouvelle des équations du problème des trois corps*, Comp. Rend. **123** (1896), 1031-1035.

[Poi05] H. POINCARÉ, *Leçons de Mécanique Céleste*, Gauthier-Villars, Paris. Tome I: Théorie générale des perturbations planetaires (1905).

[Poi07] H. POINCARÉ, *Leçons de Mécanique Céleste*, Gauthier-Villars, Paris. Tome II, I^re Partie: Développment de la fonction perturbatrice (1907).

[R17] M. RONCHI, *Sulla riduzione esplicita del problema dei tre corpi*, Atti R. Ist. Ven. **76** (1916-1917), 1221-1235.

[R05] R. ROSSO, *Sui contributi della scuola italiana alla meccanica celeste tra '800 e '900: Varianti su un tema di Kepler*, Boll. U.M.I. sez. A, La Matematica nella Società e nella Cultura, Serie VIII, Vol. 8-A, Agosto 2005, 313-346.

[Rou84] E.J. ROUTH, *The Advanced part of a Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies. Part 2.* Mac Millan, London (1884).

[Sia71] F. SIACCI, *Intorno ad alcune trasformazioni delle equazioni differenziali del problema dei tre corpi*, Rend. R. Accad. Sc. Torino **6** (1871), 440-454.

[SS71] E.L. STIEFEL - G. SCHEIFELE, *Linear and Regular Celestial Mechanics*, Springer, Heidelberg (1977).

[Su12] K.F. SUNDMAN, *Mémoire sur le problème des trois corps*, Acta Math. **36** (1912), 105-179.

[Sz67] V. SZEBEHELY, *Theory of Orbits. The restricted Problem of the Three Bodies*, Academic Press, New York (1967).

[Th95] T.N. THIELE, *Recherches numériques concernant des solutions périodiques d'un cas spécial du problème des trois corps*, Astron. Nach. **138** (1895), 1-10.

[Tiss89] F. TISSERAND, *Traité de Mécanique Céleste*, vol. I Gauthier-Villars, Paris (1889).

[Tra19] E. TRAPANI, *Calcolo del moto medio asintotico della longitudine del nodo lunare*, Rend. Acc. Napoli **25** (1919), 49-69.

[Tre12] L. TREVISANI, *Sul moto medio dei nodi nel problema dei tre corpi*, Atti R. Ist. Ven. $\mathbf{71}_2$ (1911-1912), 1089-1137.

[Whit04] E.T. WHITTAKER, *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, Cambridge University Press, Cambridge (1904).

[Win41] A. WINTNER, *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics*, Princeton University Press, Princeton (1941).

[Xia92] Z. XIA, *The existence of noncollision singularities in the N-body problem*, Ann. Math. **135** (1992), 411-468.

Riccardo Rosso, Dipartimento di Matematica,
Istituto Nazionale di Fisica della Materia,
Università di Pavia, via Ferrata 1, 27100 Pavia
email: riccardo.rosso@unipv.it