BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

DANIELE GOUTHIER, MARTA SALVADOR

Modo simbolico, mondi possibili e matematica

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **9-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2006), n.1, p. 65–88.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2006_8_9A_1_65_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2006.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. IX-A, Aprile 2006, 65-88

Modo simbolico, mondi possibili e matematica

DANIELE GOUTHIER - MARTA SALVADOR

Introduzione.

Comunicare matematica a pubblici di non esperti presenta problemi aggiuntivi rispetto a quello che succede per altre parti del sapere scientifico: si tratta di problemi legati al linguaggio, in particolare al formalismo simbolico in cui si esprime il sapere matematico, [3], [11], [22].

Oggi che la comunicazione pubblica della matematica è in così rapida espansione e affermazione, [7], è rilevante analizzare le situazioni e i contesti nei quali questo accade, dal momento che si configurano come luoghi di confronto-scontro tra modalità e modelli di comunicazione diversi, ciascuno legato a un preciso linguaggio, oltre che a regole e norme più o meno tacite per utilizzare nel modo più efficace parole, segni, immagini, [11]. Nessun modello teorico formulato per la comunicazione tra esperti (si pensi alle teorie logico formali che ne hanno definito il funzionamento linguistico) oppure per la divulgazione e comunicazione pubblica (come alcuni schemi del *Public Understanding of Science*, [19], o più genericamente i modelli e gli strumenti utilizzati per l'analisi della comunicazione mediatica in senso lato) è pienamente ed efficacemente applicabile a simili luoghi, che si caratterizzano per un'estrema apertura e flessibilità in contrasto con il rigoroso formalismo della comunicazione tra esperti. Ciò da un lato rende queste situazioni gli snodi chiave di un processo sempre più evidente di apertura del mondo matematico verso la società nel suo complesso, ma dall'altro costituisce una sfida per chiunque tenti di analizzarne e modellizzarne, seppure parzialmente, le caratteristiche.

Una delle criticità che caratterizzano il rapporto tra matematica e pubblici è l'uso dei simboli. In letteratura questo tema è stato finora generalmente affrontato nell'ambito della didattica della matematica, con ricerche sui processi di acquisizione della sintassi algebrica da parte degli studenti [20] e sulle diverse modalità di generalizzazione simbolica e pre-simbolica messe in atto da questi ultimi nelle attività di soluzione di problemi e di dimostrazione [1].

Al di fuori della comunicazione tra esperti, è difficile cogliere quanto nei simboli il significante sia legato al significato, quanto stia *in relazione con* questo o piuttosto *al posto di* questo; quanto risuoni con altri contenuti e quanto abbia una valenza convenzionale. Così il simbolo, nato per rendere universale il linguaggio tra i matematici, [15], [21], può trasformarsi in oggetto che fa velo alla comprensione e che getta sulla matematica un'aura di mistero impenetrabile: a prima vista, «*un enorme patrimonio di idee e immagini va perduto per questa mancanza di comunicazione tra le due culture*», [8], quella di chi usa linguaggio e simbolismo matematici in modo consapevole e quella di chi non lo fa.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}$$

Fig. 1. – La formula di Cauchy.

Nella comunicazione tra realtà diverse sono stimolati meccanismi di comprensione del simbolo basati sull'ibridazione tra modalità di interpretazione tipiche dei linguaggi specialistici e modelli d'uso propri delle lingue naturali, e più in generale è favorito il mescolamento di modi del comunicare caratteristici della vita comune (la narrazione, l'allusione, il rimando retorico) con altri tipici del pensiero e della realtà della matematica (l'assunzione, la deduzione, l'implicazione, la dimostrazione). Bisogna quindi comprendere il cortocircuito che l'uso dei simboli introduce per vedere quanta della loro *irragionevole efficacia* nella comunicazione tra matematici, rimanga anche nella comunicazione ai pubblici. E quanto invece siano un ostacolo che porta a dissipare un enorme patrimonio d'idee.

Teorie come mondi possibili.

Uno dei meccanismi che generano il piacere offerto dai testi narrativi, e in particolare dai racconti "fantastici" o d'immaginazione, quali in particolare le favole, le fiabe e molta letteratura per ragazzi, è legato a una precisa attività cooperativa che coinvolge chi legge. Si tratta della comparazione tra il mondo di riferimento del lettore (la realtà, per così dire) e il mondo narrativo creato dal testo, il cosiddetto "mondo possibile" del racconto, [5].

L'analisi testuale prende a prestito la nozione di mondo possibile dalla logica modale; e tale nozione identifica una costruzione culturale in cui un insieme di *individui*, forniti di certe *proprietà*, realizza una serie di azioni, dando vita a un corso di eventi.

> «*Cosa accade quando delineo un mondo fantastico, come quello di una fiaba? Raccontando la storia di Cappuccetto Rosso ammobilio il mio mondo narrativo con un limitato numero di individui (la bambina, la nonna, il cacciatore, il lupo, due capanne, un bosco, un fucile, un canestro) forniti di un numero limitato di proprietà. Alcune delle assegnazioni di proprietà a individui seguono le stesse regole del mondo della mia esperienza (per esempio anche il bosco della fiaba è fatto di alberi), alcune altre assegnazioni valgono solo per quel mondo: per esempio in questa fiaba i lupi hanno la proprietà di parlare, le nonne e le nipotine di sopravvivere all'ingurgitazione da parte di lupi*», ([5], p. 129).

La fiaba di Cappuccetto Rosso disegna dunque una serie di personaggi e proprietà che in parte si sovrappongono, in parte sono diversi da quelli del nostro mondo di riferimento. Riconoscere e accettare le differenze tra la realtà e il mondo possibile della narrazione è uno dei meccanismi, delle attività interpretative, su cui si basa il piacere del testo ma, prima ancora, il suo funzionamento.

La matematica ricorre all'uso di mondi possibili nei propri contesti d'azione. Vale a dire che in un contesto fissato, ci sono concetti che si basano sull'esperienza di riferimento del lettore e altri che sono spe-

Fig. 2 e 3. – Proprietà reali e proprietà possibili del lupo (tratte da Enciclopedia delle fiabe d'oro, Dami Editore, Milano, 1986, per gentile concessione dell'Editore).

cifici di quell'ambito matematico. Pedemonte e Robotti affermano che «*il teorema esiste perché c'è una teoria matematica di referenza, cioè un insieme di regole di deduzione e di principi comunemente ammessi, necessari per costruire una* dimostrazione», ([16], p. 16), e l'accento va sull'avverbio *comunemente*, perché senza quell'esperienza *comune* di riferimento, il teorema per il lettore non sarebbe *possibile*. Anche qui, come in un testo narrativo, è implicita la richiesta che il lettore si approcci ai secondi facendo leva sulla propria conoscenza dei primi, ma anche che attribuisca a entrambi la stessa dignità di appartenere a quel mondo possibile.

Prendiamo l'esempio elementare dei gruppi modulari: in questi, ci sono fatti che seguono le stesse regole del mondo di riferimento del lettore (uno zero funge da elemento neutro, l'addizione è quella ovvia ecc.), e ce ne sono che si comportano secondo proprietà inaspettate (esistono divisori dello zero, è possibile che tutti i numeri siano potenze di un numero dato ecc.). Una situazione non dissimile si ha anche nella definizione di molti spazi, operatori, categorie, funtori e quant'altro. E il lettore non esperto, di caso in caso, deve capire cosa si comporta nel modo solito e cosa segue l'accezione propria del mondo possibile, vale a dire l'accezione simbolica; cosa cioè può essere guardato col «senso comune» e cosa è vincolato da criteri che regolano la logica di quel ben determinato mondo possibile.

Più in generale, questo è quanto accade nella formulazione di ogni teoria (matematica e no): si delinea un mondo per mezzo di assiomi e postulati e lo si popola di un certo numero di individui animati da un numero limitato di proprietà. Contribuire alla costruzione di tutto questo significa per l'appunto far parte della comunità degli esperti di quella teoria.

> «*Le ricerche sperimentali hanno mostrato che l'accesso alla dimostrazione a partire da un processo di costruzione di una congettura è più accessibile allo studente piuttosto che un insegnamento fondato sull'apprendimento di dimostrazioni estranee al soggetto*», ([16], p. 13).

I non esperti invece se la trovano davanti agli occhi come se fosse un oggetto definito, concluso. Ed è questo che, nella migliore delle ipotesi, li porta a guardarla con sguardo duplice (un occhio al proprio mondo di riferimento, l'altro al mondo della teoria) e, di conseguenza, a cercare di conciliare l'esperienza con le affermazioni della teoria.

L'incapacità di distinguere tra i due mondi può costituire un ostacolo insuperabile: pensiamo alle geometrie non euclidee che vengono confrontate costantemente con la nostra esperienza euclidea e che pertanto risultano inaspettate e generano stupore. Com'è possibile che un triangolo abbia tre angoli retti? E che per un punto non passi alcuna retta parallela? È possibile solo se capiamo che i lupi parlano e che nonne e bambine sopravvivono all'ingurgitazione da parte di lupi ovvero che non vale il quinto postulato di Euclide e che i triangoli hanno lati che sono segmenti di curve minime (non sempre rettilinee com'è nella nostra esperienza). E che tutto ciò accade *nello stesso momento in cui* tutto il resto si comporta secondo la nostra esperienza, vale a dire secondo gli altri postulati.

Naturalmente, il concetto di mondo possibile interviene tanto bene sul piano concettuale di formulazione delle teorie, quanto su quello simbolico di utilizzo dei segni. Le idee, i concetti e le condizioni possono essere animati da proprietà più o meno aderenti al nostro mondo di riferimento, più o meno «fantastici», ma lo stesso può accadere ai simboli matematici che possono essere utilizzati in analogia a quello che succede in altri contesti di riferimento ma con un contenuto semantico specifico di quella determinata accezione d'uso. Così, la famiglia $=$, $\cong$, $\approx$, $\equiv$, $\Leftrightarrow$, $:=$, $\leftrightarrow$, $\sim$, si sviluppa per analogia ma nel rispetto di un modello logico che appare chiaro caso per caso, con i suoi criteri, le sue regole e le sua modalità d'uso.

Guardando all'utilizzo dei segni come a un mondo possibile, la situazione è forse più straniante, dal momento che i simboli si riferiscono a un piano più astratto, meno legato all'esperienza. Così, tornando ai gruppi modulari, l'espressione

$$3 + 11 = 0 \qquad \mathrm{mod}\, 7$$

anche quando è chiara e nota da un punto di vista razionale, conoscitivo, induce il lettore non esperto a sostare un attimo per rendersi conto di come sono usati i segni «$+$» e «$=$».

Il segno matematico, parola senza immagini.

L'uso dei simboli in matematica, e ancora di più la scelta di un sistema di notazione universalmente intelligibile, è un'acquisizione molto recente, e non è mai riuscito a soppiantare l'utilizzo del linguaggio ordinario per l'argomentazione e la spiegazione del ragionamento associato a teoremi e dimostrazioni. In realtà la notazione simbolica che oggi siamo abituati ad associare alla matematica è il frutto di un lungo e complesso processo di negoziazione tra sistemi espressivi concorrenti e la stessa idea di utilizzare una notazione specifica, diversa dal linguaggio comune, è stata al centro di un acceso dibattito tra i matematici fino a poco più di un secolo fa.

La disputa vedeva opposte due fazioni, che lo storico Florian Cajori chiama dei «retori» e dei «simbolisti». I primi sostenevano l'inutilità dell'uso dei simboli e basavano le loro argomentazioni, per esempio in geometria, solamente sul linguaggio verbale. I secondi invece insistevano nell'uso di ideogrammi e pittogrammi di varia natura, fino a escludere quasi completamente la scrittura ordinaria. Il confronto tra le due posizioni, iniziato in epoca greca, è continuato fino al secolo scorso, con illustri pensatori schierati ora dall'una, ora dall'altra parte. L'apparente vittoria della notazione simbolica non ha eliminato l'uso del linguaggio naturale nelle argomentazioni e dimostrazioni, come neppure ha ridotto il ricorso a esso nelle fasi più creative dell'attività matematica, quando è necessario comunicare concetti nuovi, in corso di elaborazione.

I matematici antichi, soprattutto in geometria, non si esprimono usando simboli, ma argomentano a parole i propri teoremi accompagnandosi con l'uso di diagrammi. Questa modalità di dimostrazione si afferma in modo netto in età ellenistica: gli *Elementi* di Euclide rappresentano anche sotto il profilo delle scelte linguistiche, una tappa fondamentale del cammino evolutivo della matematica greca. In Euclide il ragionamento algebrico è rivestito di forma geometrica; similmente, anche la maggior parte dei testi matematici dell'Ellenismo è caratterizzata da un «*complicato modo geometrico di esprimersi e dal rifiuto della notazione algebrica*», [2].

Anche negli scritti matematici pre-moderni, le espressioni simboliche sono rare, vengono integrate nel testo verbale e sono pensate per una lettura «a parole», come parti di una frase completa in linguaggio naturale. Ogni matematico sceglie o elabora in modo originale le notazioni che preferisce. I simboli utilizzati spesso nascono per abbreviazione di parole o frasi in latino, in greco o in altre lingue europee. Viene meno, cioè, quell'ipotetica immutabilità del linguaggio simbolico della matematica, strumento di certezza con la tendenza a rimanere invariato nel tempo, come le verità che esprime. La storia, al contrario, dimostra che anche la notazione matematica, come tutte le forme linguistiche «vive», ha subito nel tempo trasformazioni e cambiamenti. In tale processo evolutivo la convivenza tra sistemi espressivi diversi, spesso con un minimo grado di intersoggettività (cioè di condivisione tra individui differenti), ha rappresentato la norma anche in tempi relativamente recenti.

Fino a tutto l'Ottocento non esisteva, infatti, ancora alcun universalismo nella notazione simbolica in matematica. L'unitarietà del *corpus mathematicus*, anche in termini di linguaggio, divenne un obiettivo solo con l'inizio del XX secolo, [21]. L'adozione di un simbolismo universale ha permesso a matematici di tempi e luoghi diversi di comprendersi più facilmente e ha sicuramente avuto un ruolo fondamentale nell'avanzamento della disciplina. Dal punto di vista della comunicazione verso i pubblici di non esperti l'adozione di una notazione simbolica estesa e universale, ha enfatizzato, tuttavia, l'astrattezza del linguaggio matematico agli occhi del neofita, contribuendo ad aumentare la distanza tra l'esperto, in grado di leggere simboli e formule, e l'estraneo alla disciplina. La notazione astratta, generica e universale accresce l'alone di mistero e crea nella mente del profano l'idea di un sapere immutabile, privo di errori grazie alla precisione e univocità del suo linguaggio esoterico, e quindi *perfetto*.

$$a,b,c,d\varepsilon\mathrm{q} \;.\; x\varepsilon\mathrm{q} \;.\; a+bx \mathrel{-\!=} 0 \;.\supset.$$
$$\mathrm{D}[(c+dx)/(a+bx) \mid x,\ \mathrm{q}-\iota-a/b]x = (ad-bc)/(a+bx)^2$$
$$x\varepsilon\mathrm{q} \;.\supset.\; \mathrm{D}[x/\surd(1+x^2) \mid x,\ \mathrm{q}]x = (1+x^2)\uparrow(-3/2)$$
$$x\varepsilon\mathrm{q} \;.\supset.\; \mathrm{D}[\mathrm{e}^x\,(x-1) \mid x,\ \mathrm{q}]x = x\mathrm{e}^x$$
$$x\varepsilon\mathrm{q} \;.\supset.\; \mathrm{D}[\mathrm{e}^x\,(x^2-2x+2) \mid x,\ \mathrm{q}]x = x^2\mathrm{e}^x$$
$$x\varepsilon\mathrm{q} \;.\supset.\; \mathrm{D}[(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})/2 \mid x.\ \mathrm{q}]x = (\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})/2$$

Fig. 4. – Il linguaggio simbolico enfatizza l'astrattezza (tratta da G. Peano, *Formulario Mathematico*, Cremonesi, Roma 1960, p. 283, *fac-simile dell'edizione originale*).

La riflessione sulla notazione matematica, spesso associata all'idea di una lingua perfetta, completamente univoca e perfettamente referenziale, attuata all'inizio del Novecento dai pensatori del cosiddetto «circolo di Vienna», e in particolare da Ludwig Wittgenstein nel suo *Tractatus logico-filosoficus* del 1921, si è tendenzialmente mossa sui binari del modello strutturalista saussuriano, identificando nel legame convenzionale tra significato ed espressione simbolica la principale caratteristica del segno matematico.

Tuttavia lo stesso Wittgenstein e con lui numerosi filosofi del linguaggio successivi (solo per citare i casi più noti, Austin e Searle) hanno poi richiamato l'attenzione sull'importanza del contesto d'uso del segno nella sua comprensione, riportando l'attenzione sul ruolo di un terzo attore del processo di comunicazione, l'interprete.

Diversi autori in ambito linguistico, logico e filosofico hanno individuato l'esistenza di tre diverse entità componenti il segno. Ciascuno dei componenti è stato chiamato con nomi diversi dai diversi pensatori che si sono nel tempo occupati del problema.

Tra gli autori più influenti, per l'importanza che la loro opera ha avuto sulla logica moderna, vanno ricordati Frege e Peirce. Il primo parla di Zeichen, Sinn, Bedeutung [9], il secondo rispettivamente di rappresentante, rappresentato, interpretante [17]. Senza entrare nel merito dei legami tra i tre componenti, complessi e di non sempre facile interpretazione filosofica sia in un autore che nell'altro, è importante sottolineare come entrambe le concezioni sdoppino il concetto di significato in una dimensione oggettiva (il riferimento, la realtà, per Frege) e una dimensione cognitiva (per Peirce). Semplificando, secondo queste visioni del segno, il rapporto tra significante e significato è sempre mediato da un processo interpretativo, dalla creazione di rappresentazioni intermedie dell'oggetto a cui ci si riferisce.

Particolarmente interessante sotto questo profilo è il processo interpretativo messo in atto da un lettore non esperto di fronte a un'espressione simbolica: il segno matematico non può far altro che richiamare alla mente l'insieme degli interpretanti (siano essi immagini, grafi, parole ecc.) che nel suo personale patrimonio di conoscenza sembrano definire meglio il concetto a cui il simbolo vuole riferirsi. Quest'insieme d'interpretanti solo raramente si basa su concetti e immagini appartenenti al contesto matematico pertinente per quel simbolo. Molto spesso fa riferimento a significati e usi che il termine ha in situazioni matematiche diverse. Anche al livello dei simboli, cioè, permane l'influenza del mondo di riferimento sul mondo possibile e sulle proprietà caratteristiche che questo fornisce (che, è meglio sottolinearlo esplicitamente, in molti casi non è la cosiddetta realtà ma piuttosto un contesto matematico differente che è stato precedentemente conosciuto e assimilato).

La notazione per la derivata ordinaria della funzione f, sia nella forma $\mathrm{D}f$ che in quella $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$, rimanda a (o meglio è richiamata da) quei molti casi, concettualmente analoghi, che hanno bisogno di nuovi simboli, per l'introduzione dei quali si è fatto evidente riferimento a uno dei simboli di derivazione. Così la derivata parziale è $\partial f/\partial x$, ma il segno ∂ compare anche nella notazione della frontiera ∂A di una regione A del piano o dello spazio. Con altrettanta analogia si usano, per la funzione f, i simboli che indicano il differenziale δf, il codifferenziale $\mathrm{d}f$, e il laplaciano Δf. C'è un'area semantica che racchiude la derivata, ordinaria o parziale, il differenziale e il codifferenziale, e nella quale si trovano anche il laplaciano e il concetto di frontiera, così come quello di bordo e di cobordo, e in quest'area è permesso immaginare che alcune proprietà rimangano invariate, per analogia, e che il passaggio da un concetto all'altro sia fatto nel rispetto di quest'invarianza.

Tutto questo è noto ed evidente per l'esperto, ma è un patrimonio che va perduto nella comunicazione pubblica. L'emittente del messaggio (matematico in questo caso) deve pertanto fare molta attenzione a non dare per scontata una univocità di significato che quasi mai esiste per il principiante, che può trovare enormi ambiguità nel linguaggio tipico della disciplina. Possiamo dire, con le parole di Sheila Tobias, che

> «*anche se si ritiene che la matematica abbia un linguaggio più preciso di quello dell'uso quotidiano (ecco perché usa i simboli), i suoi termini non sono mai completamente liberi dalle connotazioni che noi diamo alle parole, e questi sedimenti di significato possono essere d'intralcio. La stessa ambiguità ricorre a proposito dei simboli. [...] Tra l'altro anche se il linguaggio matematico è univoco, non esiste modo di accedervi se non attraverso la lingua parlata, le cui parole sono cariche di contenuti e associazioni*», ([22], p. 50).

Per chi deve imparare o non ha una qualche conoscenza matematica, il problema è l'individuazione di un punto di riferimento per quelle «parole senza immagini» che gli vengono presentate sotto forma di simboli. E così i simboli mostrano, senza enunciarli, legami concettuali forti: come la derivata $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$ descrive il variare della funzione f, così la frontiera ∂A rappresenta come «varia» la regione A. Per il non esperto, c'è l'impossibilità di cogliere questo legame se non gli viene mostrato esplicitamente, perché è un legame, del tutto estraneo al suo mondo di riferimento, che caratterizza quel ben specificato mondo possibile. Questi è come se si muovesse senza punti di riferimento, travolto da un'irragionevole (per lui) quantità di gradi di libertà.

I punti di riferimento si trovano di solito nel linguaggio comune, ma non sono privi di ambiguità, anzi spesso evocano immagini ingannevoli.

Quando una maestra elementare dice ai bambini che non possono sottrarre 8 da 5, i bambini prendono questa indicazione alla lettera, perché *sottrarre* numeri (naturali) significa esattamente la stessa cosa che *sottrarre* oggetti da un mucchio nel linguaggio comune: togliere una parte dal tutto. In seguito, però, con l'introduzione dei numeri negativi, ci si aspetta da loro che facciano un tipo di calcolo, che mantiene in sé l'idea della sottrazione, ma che si discosta dall'accezione comune del verbo sottrarre (c'è di nuovo un lupo che parla). Una volta che hanno imparato ad associare il segno «−» alla sottrazione, è necessario disimparare il vecchio significato di «−» o, più precisamente, imparare il suo significato quando viene applicato a un altro genere di numeri. Il segno «−» (ma anche il «+») cambia significato. In un contesto d'uso più ampio, lo stesso simbolo acquisisce un significato più esteso e, da operazione, diventa parte costitutiva di un numero. La comprensione del nuovo significato (comunque compreso in una stessa area semantica) è resa possibile da una certa dose d'ambiguità.

> «*Un'intelligenza che resta perplessa di fronte all'ambiguità — effettiva o sentita come tale non ha importanza — di solito è considerata un'intelligenza forte, non debole. Questo punto è importante, perché i matematici sostengono invece che a essere impreciso è sempre l'allievo, non la materia o il modo di insegnarla*», ([22], p. 52).

Oppure il linguaggio o il modo di usarlo, come si vede anche nel caso di un'altra parola, apparentemente innocua, come «moltiplicazione». Usato in contesti diversi (dalla Bibbia in poi) con il significato di «aumento», il termine cambia improvvisamente senso quando è riferito alle frazioni (ma anche ai numeri reali, a quelli complessi, e altrove alle funzioni e agli operatori; agli insiemi e agli spazi; e così via) e può creare confusione e spaesamento.

Icone, indici, simboli.

Abbiamo già accennato al fatto che nella tradizione matematica e logica, il termine «simbolo» sia stato generalmente associato a espressioni legate al loro contenuto da un rapporto convenzionale e arbitrario. Questa visione, la cui affermazione e diffusione si deve in gran parte al *Tractatus logico-filosoficus* di Wittgenstein, identifica nel linguaggio matematico lo specchio di una lingua perfettamente denotativa, priva di ambiguità semantiche e quindi completamente controllabile nella trasparenza del duplice rapporto realtà-pensiero pensiero-linguaggio: l'integrale «*è*» una somma e così il percorso da $\sum$ a $\int$ è il percorso che muove da un caso particolare a una generalità più estesa. L'addizione di due termini diventa sommatoria di finiti termini, questa evolve in serie e quindi in integrale. Pertanto il simbolo $\int$ rispecchia senza ambiguità la proprietà additiva dell'area come misura: se aggiungo nuovi pezzi alla regione che misuro, devo sommare le rispettive aree all'area di questa.

In ambito semiotico si è soliti considerare il *simbolo* come una delle possibili tipologie di segno esistenti. Questa classificazione viene fatta risalire al pensiero di Peirce. La parte finale del saggio *Grammatica speculativa*, scritto tra il 1893 e il 1910, tratta di quella che l'autore americano considera «*la più fondamentale suddivisione dei segni*», che include tre tipologie — *icona*, *indice* e *simbolo* — sulla base del tipo di relazione esistente tra il segno stesso e il suo oggetto [1].

> *«[...] vi sono tre tipi di rappresentazioni:*
> *I) le rappresentazioni la cui relazione con i loro oggetti consiste semplicemente nel fatto che rappresentazioni e oggetti hanno in comune qualche qualità, e queste rappresentazioni possono essere chiamate somiglianze [o icone — nda];*
> *II) le rappresentazioni la cui relazione con i loro oggetti consiste in una corrispondenza di fatto, e queste rappresentazioni possono essere chiamate indici o segni;*
> *III) le rappresentazioni che hanno per base della relazione con i*

[1] Considerato uno dei padri della semiotica e della logica moderna, Peirce pubblicò numerosi articoli e saggi, ma nessun libro. All'interno della sua vasta ed eterogenea opera si ritrovano numerose definizioni di indice, icona, simbolo. Il riferimento principale per le tesi sostenute in questo articolo sono i *Collected Papers* [17], collezione postuma in otto volumi di tutti i suoi scritti.

loro oggetti un carattere imputato, rappresentazioni che sono segni generali, e possono essere dette simboli», ([17], p. 30).

Le icone sono segni nei quali il significato assomiglia, possiede dei tratti di somiglianza con ciò che il segno indica. La sagoma di una mucca in un segnale stradale o il disegno della mucca fatto da un bambino sono icone della mucca. «*Un'icona è un segno che si riferisce all'oggetto che essa denota semplicemente in virtù di caratteri suoi propri, e che essa possiede nello stesso identico modo sia che un tale oggetto esista effettivamente, sia che non esista. [...] Una cosa qualsiasi, sia essa qualità, o individuo esistente, o legge, è un'icona di qualcosa, nella misura in cui è simile a quella cosa ed è usata come segno di essa*», ([17], p. 140). Sono icone l'integrale, l'insieme vuoto e i segni che contraddistinguono gli angoli, $B\hat{A}C$. Ma anche ∞, π e $\sum$ perché richiamano rispettivamente il gesto ripetitivo con cui lo si traccia, la lettera iniziale della parola greca perimetro e quella della parola somma(toria).

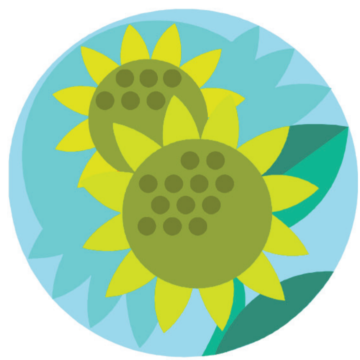

Fig. 5 e 6. – Una foto, un disegno sono 'icone', immagini che ricordano immediatamente il girasole, *immagini degli autori*.

Una banderuola o una manica a vento che indicano ai piloti di aereo la direzione del vento sono segni strettamente, fisicamente correlati a quello che indicano. È il vento, soffiando in una determinata direzione, a far orientare nello stesso senso la banderuola o la manica a vento. Siamo dunque in presenza di indici. «*Un indice è un segno che si ri-*

ferisce all'oggetto che esso denota in virtù del fatto che è realmente determinato da quell'oggetto [...] non è la pura somiglianza al suo oggetto che lo rende segno, ma è l'effettiva modificazione subita da parte dell'oggetto che lo rende tale», ([17], p. 140). Sono indici i pedici che numerano gli elementi di una successione, le frecce che rappresentano una mappa, lo 0 (come segno lasciato da un ciottolo sulla sabbia quando lo togliamo per indicare un'assenza, uno zero), e il simbolo di due rette parallele // o perpendicolari ⊥.

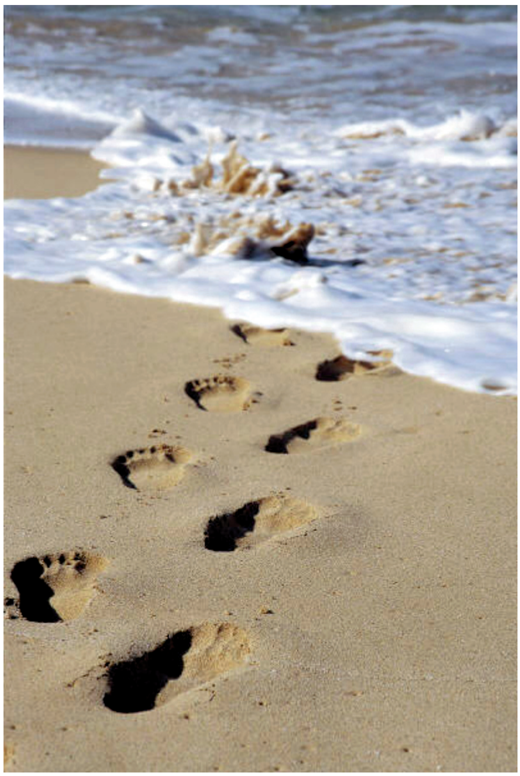

Fig. 7. – L'impronta è un «indice» del passaggio di una persona, *immagine degli autori*.

Infine i simboli. Si tratta per Peirce di segni in cui non esiste alcun rapporto visibile tra il significante e ciò che il segno indica. «*Un simbolo è un segno che si riferisce all'oggetto che denota in virtù di una legge, di solito un'associazione di idee generali, che opera in modo che* *il simbolo sia interpretato come riferentesi a quell'oggetto»*, ([17], p. 140). Sono simboli le cifre in rapporto ai numeri che rappresentano, le lettere in rapporto ai suoni, le parole in rapporto alle cose. Ma anche i segni «+», «−», «×», «:» e i connettivi logici.

Tra i numerosi esempi che Peirce inserisce per chiarire ai lettori le caratteristiche delle classi su indicate, sono citate esplicitamente le formule algebriche, inserite tra i segni a prevalente contenuto iconico. Si tratta di una classificazione in contrasto con la visione comune che tende a interpretare la natura del simbolo matematico come puramente o prevalentemente convenzionale. Visione questa che è figlia del Wittgenstein del *Tractatus* che, come abbiamo detto, vedeva nel linguaggio matematico lo specchio di una lingua perfettamente denotativa, priva di ambiguità semantiche e quindi completamente controllabile. Per la sua perfezione il linguaggio matematico, così inteso, veniva addirittura usato da Wittgenstein come modello per l'analisi della lingua nel suo complesso, ma, come scrive Tullio De Mauro, «*il Trattato logico-filosofico è l'ultima grande opera scientifica nella quale si sia cercato di sostenere che la lingua è un calcolo, che le frasi sono come operazioni aritmetiche con i loro simboli funzionali (le proposizioni, le congiunzioni, ecc.) e i loro numeri (le parole)*», [4].

La visione di Peirce è molto diversa e anticipa per certi versi la svolta «cognitiva» che subì, per esempio, lo stesso pensiero di Wittgenstein nelle opere successive al *Tractatus*, e in particolare ne *Le ricerche filosofiche* (1953). Una svolta basata sul passaggio da una visione statica della natura del segno linguistico, ovvero da una teoria raffigurativa del significato (il segno come specchio di fatti, della realtà), alla considerazione degli aspetti interpretativi della comunicazione/comprensione linguistica e all'enfasi sul rapporto con l'interprete del segno (il significato come uso e non più come «traduzione» in base a un codice predefinito).

Nel quadro di una simile visione, Peirce sostiene, in riferimento alle formule algebriche, che

> «*particolarmente degne di nota sono le icone in cui la somiglianza è sorretta da regole convenzionali. Così, una formula algebrica è un'icona ed è resa tale dalle regole di commutazione,*

associazione e distribuzione dei simboli. Chiamare un'espressione algebrica icona può sembrare a prima vista una classificazione arbitraria; perché potrebbe altrettanto bene o ancora meglio essere considerata come un segno convenzionale composto. Ma non è così: perché una proprietà altamente distintiva dell'icona è che attraverso osservazione diretta di essa si possono scoprire riguardo al suo oggetto verità nuove oltre a quelle che sono sufficienti a determinare la costruzione dell'icona stessa. [...] Dato un segno convenzionale o comunque generale di un oggetto, per dedurre qualsiasi nuova verità oltre a quanto esso significa esplicitamente, è necessario, in tutti i casi, sostituire a questo segno un'icona». ([17], p. 157).

Da questo passo si può evincere come per Peirce un simbolo matematico sia dunque sì un segno legato al suo contenuto da una convenzione, da una legge, ma dietro la convenzione si nasconde nella maggior parte dei casi un legame iconico con l'oggetto rappresentato, che consente di intuirne alcune precise proprietà.

È interessante notare come l'attribuzione della formula matematica al gruppo delle icone sia perfettamente coerente con quello che Peirce chiama il «*primato del momento iconico nella costituzione del segno*», la convinzione cioè della prevalenza del legame iconico tra segno e oggetto nella comunicazione di idee e pensieri.

Se è vero, infatti, che un'idea può essere *individuata* per associazione costante e convenzionale con un simbolo, è altrettanto vero però che la stessa idea non può essere *comunicata* per mezzo di un simbolo. Un'idea nuova può essere comunicata solo valendosi di figure o metafore. L'esempio di Peirce è il seguente: si pensi di dover spiegare che cos'è un aeroplano a un indigeno delle foreste brasiliane che non ne abbia mai avuto esperienza, gli si dovrà dire che l'aeroplano è (come) un uccello metallico, facendo appello a elementi iconico-percettivi. Allo stesso modo, il matematico ricorre nelle sue argomentazioni all'uso dei casi particolari: il geometra differenziale che vuole parlare di varietà lisce disegna alla lavagna una superficie, perché questa fa appello in modo più immediato alla percezione della realtà. L'esempio è utile anche per comprendere meglio il modello cognitivo-interpretativo che

Peirce applica ai temi semiotici: per lui qualsiasi significato di qualsiasi simbolo si fonda, in ultima analisi, su catene di segni che si inanellano fra loro mediante relazioni di iconicità, basate su idee e segni già presenti nella mente del soggetto che li interpreta, così una superficie è presente nella mente del soggetto che deve interpretare l'idea di varietà.

Questo tipo di approccio è estremamente utile nell'analisi delle modificazioni linguistiche che intervengono nel passaggio dalla comunicazione formalizzata tra esperti alla comunicazione che coinvolge i pubblici di non esperti, in particolare nel caso della matematica, con il suo apparato notazionale astratto. Un'efficace comunicazione pubblica si fonda sull'emersione del momento iconico presente in ciascun simbolo, per quanto sopito rispetto al legame convenzionale prevalentemente considerato dagli esperti: è così che vengono vissute tutte le variazioni sul tema «+» quali, ad esempio, $\oplus$, $\otimes$, $\pm$, $\mp$, $\times$. Questa emersione deve necessariamente tenere conto del bagaglio di segni già parte del patrimonio culturale, sia individuale che intersoggettivo, del destinatario della comunicazione, in altri termini del suo immaginario. Oppure può, come già anticipato, contribuire alla creazione di un nuovo immaginario, utilizzando alcuni strumenti tipici della costruzione narrativa, in particolare la creazione di universi di significato coerenti e verosimili, cioè i *mondi possibili*.

È interessante notare, a questo punto, che l'attribuzione di una natura iconico-analogica al simbolo matematico, in opposizione a una visione puramente convezionalizzata, non è in realtà propria soltanto del neofita e neppure del solo Peirce. Sono spesso gli stessi matematici a riconoscere nei simboli che usano tratti di ambiguità semantica legati al valore iconico che sta alla base della loro origine. Citiamo un solo autorevole esempio relativo al caso del significato delle parole e della sua definizione, tratto da Heisenberg:

> «*Questa intrinseca incertezza del significato delle parole è stata naturalmente riconosciuta assai presto e ha portato alla necessità delle definizioni, o — come indica la parola /definizione/ — a stabilire dei limiti che determinino dove la parola può essere usata e dove no. Ma le definizioni possono venir date solo con*

l'aiuto di altri concetti e così in definitiva è necessario appoggiarsi ad alcuni che sono presi come sono, non analizzati e non definiti» ([14], p. 172).

Il fisico tedesco riconosce qui l'imprescindibile natura ambigua delle parole, ma dall'ultima frase sembra possibile ritenere che questa sua visione si estenda anche alle espressioni simboliche, dal momento che l'ambiguità è da far risalire, quale che sia la tipologia espressiva utilizzata, a un momento preciso della genesi linguistica, il momento della definizione.

Nel prendere atto di questa ambiguità, tra l'altro, Heisenberg utilizza argomentazioni molto simili a quelle usate da Peirce nel già citato esempio dell'aeroplano e dell'indigeno. Per poter spiegare che cosa sia un oggetto a un interlocutore che non ha mai visto alcun oggetto simile è inevitabile ricorrere a concetti e idee già presenti nella mente dell'interlocutore stesso, prendendoli così come sono, senza possibilità di un'ulteriore, primitiva definizione, ma lasciando al loro valore analogico, iconico, il ruolo primario di comunicare la nuova idea.

Anche alcuni autori contemporanei, in particolare Radford [20], riconoscono ad alcuni simboli matematici una natura più complessa di quella puramente convenzionale. Le sue ricerche si sono concentrate in particolare sulla natura semiotica di alcuni segni dell'algebra (come x o y) usati dagli studenti nelle loro prime espressioni algebriche. Secondo Radford tali segni hanno valenza di indici per chi li sta apprendendo.

È importante a questo punto sottolineare come per Peirce nessun segno sia solamente e pienamente indice, icona o simbolo, dal momento che la sua natura partecipa sempre contemporaneamente di tutte queste proprietà, di cui una risulta prevalente. Il contesto d'uso del segno viene ad assumere pertanto un ruolo fondamentale nell'attribuzione a questo o a quel segno di una valenza prevalente o dell'altra.

Il modo simbolico.

Alla nozione peirciana di simbolo in quanto classe si affianca nella nostra cultura un insieme di accezioni e usi diversi del termine, che sfocia di fatto nella non definizione di cosa sia un simbolo. Eco utilizza la nozione di «*modo simbolico*» per aggirare il problema della definizione di simbolo. La sua argomentazione centrale di fonda sull'idea che, se non è possibile identificare la natura del simbolo in quanto segno in se stessa, esiste tuttavia la possibilità di individuare un *modo di usare* i segni, quale che sia la loro tipologia, che si può definire «simbolico», [6].

Nell'interpretazione di un segno secondo modalità simboliche si possono distinguere alcuni tratti caratteristici, in particolare:

- *presunzione di analogicità.* Esiste almeno una proprietà del sistema di espressione simbolica che rimandi direttamente a un tratto caratteristico dell'oggetto/concetto rappresentato;
- *fondamentale vaghezza di significato.* Non è possibile prescrivere una retta interpretazione del simbolo: ciascuno reagisce al segno riempiendone il senso con le proprietà che più gli aggradano all'interno di un determinato campo semantico di riferimento.

Il modo simbolico è dunque un atteggiamento produttivo/interpretativo in base al quale un lettore/interprete decide di assegnare a un determinato segno (sia esso una parola, un'immagine, un oggetto, un emblema, una formula) un insieme relativamente vago di significati all'interno di una determinata area semantica, assumendo nel contempo che il segno in questione presenti alcuni tratti (ma potrebbe trattarsi anche di uno soltanto) di analogia con l'area semantica di riferimento. Una espressione, per quanto dotata di proprietà precise che in qualche modo si vogliono simili alle proprietà del contenuto veicolato, rinvia a questo contenuto come a una nebulosa di proprietà possibili. È quello che succede della variegata gamma di parentesi che compare nella matematica a indicare espressioni che vanno raggruppate e isolate, operatori su due elementi, prodotti, accoppiamenti, insiemi, ordinati o meno, e quant'altro.

Ed è quanto succede con l'uso del segno «+» nella relazione di Grassmann che descrive la dimensione del sottospazio $E + F$ somma dei due sottospazio E ed F

$$\dim (E+F) = \dim E + \dim F - \dim (E \cap F).$$

Il lettore è portato a individuare un *modo simbolico* nell'uso del segno «+» che racchiude nella stessa area semantica la somma di due numeri interi — le dimensioni — e la somma di due sottospazi.

Nella definizione di questo modello, Eco si rifà ad alcune argomentazioni che Hegel utilizza nell'*Estetica* per affrontare i problemi del simbolo: il simbolo è un segno, ma del segno non ha l'arbitrarietà della correlazione tra significante e significato, dal momento che si fonda su un legame analogico *insufficiente*. Esiste cioè nel simbolo una sproporzione tra simboleggiante e simboleggiato. Il simboleggiante esprime una delle qualità del simboleggiato, ma contiene altre determinazioni che non hanno nulla a che fare con ciò a cui questa forma rimanda. A causa di questa sproporzione esso è fondamentalmente ambiguo: «*simbolo in generale è un'esistenza esterna che è immediatamente presente o data all'intuizione, ma che non deve essere presa in base a lei stessa, così come immediatamente si presenta, bensì in un senso più ampio e più universale*» ([13], p. 344). Per Hegel dunque il simbolo è una forma legata per analogia a un significato, senza essere in grado, tuttavia, di esprimerlo completamente. Lasciandosi ispirare da questi presupposti, Eco sostiene che ci sono sistemi di segni in cui l'espressione viene correlata (sia dall'emittente sia da una decisione del destinatario) a una *nebulosa di contenuto,* vale a dire a una serie di proprietà che si riferiscono a campi diversi e difficilmente strutturabili di una data enciclopedia culturale (per enciclopedia si intende l'insieme dei domini semantici di una data cultura), così che ciascuno può reagire di fronte all'espressione riempiendola delle proprietà che più gli aggradano, senza che alcuna regola semantica possa prescrivere le modalità della retta interpretazione. Questo tipo di uso dei segni rappresenta una sorta di nucleo duro di significato comune alle diverse accezioni del termine *simbolo*.

> *Il modo simbolico è dunque un procedimento non necessariamente di produzione ma comunque e sempre di uso del testo, che può essere applicato ad ogni testo e a ogni tipo di segno, attraverso una decisione pragmatica ('voglio interpretare simbolicamente') che produce a livello semantico una nuova funzione*

segnica, associando ad espressioni già dotate di contenuto codificato nuove porzioni di contenuto, quanto più possibile indeterminate e decise dal destinatario» ([6], p. 253).

A una definizione simile, di fatto basata su un atteggiamento semantico-pragmatico, era arrivato anche Raymond Firth in *Symbols Public and Private*, sostenendo che, nell'interpretazione di un simbolo, le condizioni della sua presentazione sono tali da lasciare uno spazio molto maggiore di giudizio all'interprete rispetto ai segni regolati da un codice comune a emittente e ricevente: «*un modo di distinguere all'ingresso tra segnale e simbolo può consistere nel classificare come simboli tutte le presentazioni in cui si riscontri una più accentuata mancanza di aderenza — anche forse intenzionalmente — nelle attribuzioni di produttore e interprete*» ([9], p. 55).

E qui s'intravedono lo scarto che c'è nella comunicazione pubblica della matematica, il confronto-scontro tra modalità e modelli di comunicazione diversi ciascuno legato a un preciso linguaggio, la sfida per chiunque tenti di analizzare le caratteristiche del processo di apertura del mondo matematico verso la società nel suo complesso.

Conclusioni.

Quando si parla di uso dei simboli nella comunicazione pubblica della matematica si affronta un problema linguistico articolato ed è importante tenere a mente che la questione coinvolge diverse dimensioni che si intersecano, e che pertanto deve essere guardata da differenti punti di vista.

C'è il profilo della costruzione discorsivo/narrativa, che ci porta al tema dei mondi possibili, siano questi usati per interpretare il piano concettuale di formulazione delle teorie o quello simbolico di utilizzo dei segni. C'è quello delle più tradizionali classificazioni semiotiche, che evidenzia la difficoltà di attribuirgli uno statuto indipendente dal contesto d'uso, dal momento che è inevitabile ricorrere a idee già presenti nella mente dell'interlocutore, lasciando al loro valore analogico e iconico il ruolo primario di comunicare una nuova idea. C'è ovviamente quello dell'analisi della sua genesi storica, che porta a relativizzarne la presunta perfezione.

Date queste dimensioni, quello che serve è trovare di volta in volta soluzioni empiriche di comunicazione che possano rispondere alle esigenze dei mezzi, degli strumenti e dei contesti, che concorrono alla comunicazione stessa. In questo modo *coloro che parlano di matematica* possono essere (o meglio sentirsi) liberi di adottare pratiche interpersonali, che facciano da collante della comunità da loro formata, producendo fiducia e condivisione, e spingendo gli individui a mettersi in rete.

È importante che, nel caso specifico dei simboli, *coloro che parlano di matematica* imparino quale ruolo questi devono ricoprire nell'esprimere il sapere matematico. È importante che capiscano che il segno lega il significante al significato e sta in relazione con quest'ultimo; e che usando i simboli e, soprattutto, introducendone di nuovi, si attiva un gioco di richiami che fa risuonare un contenuto con un altro. Non è altrettanto importante che i simboli vengano usati correttamente (questo verrà), ma che si colga il meccanismo del *mondo possibile* che ci sta dietro, col suo *mixage* di aderenze e differenze dal mondo di riferimento, o piuttosto che si capisca il *modo simbolico* di usare i segni, ricorrendo all'analogia e accettando una certa vaghezza di significato. Anche a costo, in prima battuta, di avere qualche deformazione nella comprensione dei simboli stessi.

La ragione di questa deformazione — che spesso stride all'orecchio del matematico — risiede tutta nella fondamentale differenza degli attori che caratterizzano da una parte la ricerca e dall'altra la sua comunicazione pubblica. La prima ha, infatti, bisogno di fornire strumenti linguistici immediatamente riutilizzabili da tutti i membri di una comunità ristretta, affinché si possa passare il più rapidamente possibile all'elaborazione di nuova conoscenza. Nella seconda, invece, non vi è l'esigenza di rendere qualcuno abile nella produzione di progressive piattaforme di sapere mutuate da ciò che questi sta apprendendo. Addirittura, è frequente che la comunicazione pubblica non coinvolga nessun attore esperto ma che preveda scambi di conoscenze, opinioni e credenze, tra persone o gruppi che non si pongono il problema di imparare o di far imparare, ma piuttosto quello di decidere, e di capire su quali basi decidere. Ecco allora che il ricorso a un linguaggio figurato, vale a dire *ambiguo* è spesso una scelta inevitabile per comunicare efficacemente. E tutta l'attenzione non può andare se non all'identificazione di soluzioni empiriche di comunicazione e alla selezione di idonee pratiche interpersonali.

BIBLIOGRAFIA

[1] F. ARZARELLO, Inside and outside: Spaces, times and language in proof production, in Nakahara T. & Koyama M. (Eds), *Proceedings of the 24th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp.23-38), Hiroshima University, Japan, 2000.

[2] F. CAJORI, *A History of Mathematical Notations*, The Open court publishing company, Chicago, 1928.

[3] R. R. COCKING - J. P. MESTRE, *Linguistic and cultural influences on learning mathematics*, Lawrence Erlbaum, Hillsdale, NJ, 1988.

[4] T. DE MAURO, *Guida all'uso delle parole*, Editori Riuniti, Roma, 2003.

[5] U. ECO, *Lector in fabula. La cooperazione interpretativa nei testi narrativi*, Bompiani, Milano, 1979.

[6] U. ECO, *Semiotica e filosofia del linguaggio,* Einaudi, Torino, 1984.

[7] M. EMMER, *Matematica e cultura: la via maestra della divulgazione*, Bollettino UMI, serie VIII, **VII-A** (2004), 249-273

[8] M. FABBRICHESI, *Pensare in formule*, Bollati Boringhieri, Torino, 2004.

[9] R. FIRTH, *I simboli e le mode,* Laterza, Bari, 1977.

[10] G. FREGE (a c. di C. Penco e E. Picardi), *Senso, funzione e concetto*, Laterza (Bari, 2001).

[11] D. GOUTHIER, *Termini e linguaggio per comunicare matematica*, JCOM 1 (2) (2002), http://jcom.sissa.it/

[12] D. GOUTHIER, *Il linguaggio nella matematica*, Pedagogika.it, VIII (5), Milano, 2004.

[13] G. W. F. HEGEL, *Estetica*, Einaudi, Torino, 1976.

[14] W. HEISENBERG, *Fisica e filosofia*, il Saggiatore (Milano, 1961).

[15] H. KENNEDY, *Peano. Storia di un matematico*, Boringhieri, Torino, 1983.

[16] B. PEDEMONTE — E. ROBOTTI, *Aspetti linguistici della dimostrazione*, Notiziario UMI, **XXXI** (10) (2004), 12-32

[17] C. S. PEIRCE, *Collected papers*, Harvard University Press, MA, 1931-1958.

[18] C. S. PEIRCE, *Philosophical writings,* Dover, New York, 1955.

[19] N. PITRELLI, *La crisi del «Public Understanding of Science» in Gran Bretagna*, JCOM 3 (1) (2003), http://jcom.sissa.it/

[20] L. RADFORD, Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Student's Types of Generalization in *Mathematical Thinking and Learning*, **5**(1) (2003), 37-70, Lawrence Erlbaum Associates Inc.
[21] C. S. ROERO, *I matematici e la lingua internazionale*, Bollettino UMI, serie VIII, **II-A** (1999), 159-182
[22] S. TOBIAS, *Come vincere la paura della matematica*, Longanesi, Milano, 1994.
[23] E. YACKEL - K. MCCLAIN, *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms*, Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, NJ, 2000.

Daniele Gouthier, ICS - Innovazioni nella comunicazione della scienza, SISSA, Trieste, e-mail: gouthier@sissa.it
Marta Salvador, Eidon Ricerca Sviluppo Documentazione, Udine, e-mail: marta.salvador@eidon.it