Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Elena Barbieri

Sulla topologia di alcune classi di 3-varietà

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **9-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2006), n.2 (Fascicolo dedicato alle tesi di dottorato), p. 199–202.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2006_8_9A_2_199_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2006.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. IX-A, Agosto 2006, 199-202

Sulla topologia di alcune classi di 3-varietà

ELENA BARBIERI

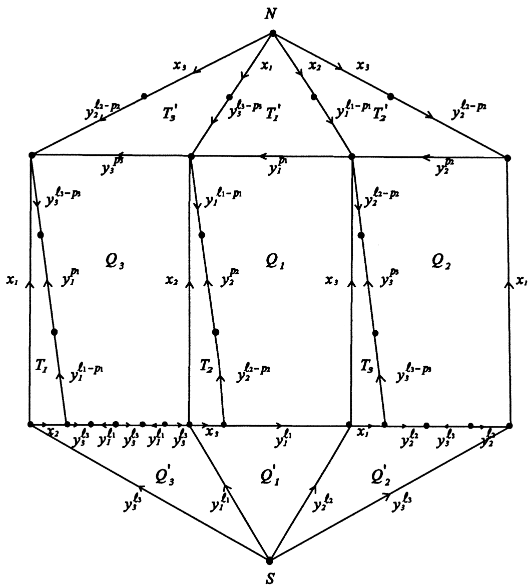
L'argomento della tesi riguarda la topologia e la geometria di varie classi di varietà chiuse ed orientabili di dimensione 3. Lo studio e la classificazione di queste varietà viene affrontato mediante tecniche di Teoria Combinatoria dei Gruppi e di Topologia Algebrica e Geometrica. Alcuni problemi che si presentano in modo naturale in questo ambito sono i seguenti: costruzione esplicita di classi notevoli di 3-varietà mediante chirurgia di Dehn su link con coefficienti oppure mediante identificazione a coppie delle facce sul bordo di 3-celle triangolate; classificazione delle strutture topologica e geometrica di queste varietà e determinazione dei loro principali invarianti algebrici e combinatori; rappresentazione di queste varietà come rivestimenti ramificati di nodi o link. La prima famiglia di 3-varietà, introdotta nella tesi, dipende da 3n parametri interi. Queste varietà ammettono spine codificate da certe presentazioni finite e bilanciate del gruppo fondamentale. Questa proprietà consegue da una costruzione esplicita di schemi poliedrali che rappresentano le varietà suddette come spazi quoziente. Si ottengono poi risultati riguardanti la rappresentazione di queste varietà come spazi di rivestimento e si prova che molte di loro sono rivestimenti ciclici ramificati di spazi lenticolari. In questo caso, i gruppi fondamentali delle varietà sono definiti da presentazioni cicliche. Si studiano anche le proprietà algebriche delle estensioni split di questi gruppi e i loro legami con la topologia di certe orbifold (iperboliche) di dimensione 3. Questi risultati contengono, come casi particolari, quelli ottenuti da vari autori su alcune classi notevoli di 3-varietà quali, ad esempio, le varietà di Sieradski, le varietà di Fibonacci e loro generalizzazioni. Si costruisce poi una nuova classe di 3-varietà che contiene le varietà di Kim e Kostrikin. Si prova che questi spazi sono rivestimenti (non fortemente) ciclici di link torici e si mostra che molti di loro sono varietà fibrate iperellittiche. Come conseguenza di questi risultati, si ottiene la classificazione completa delle strutture topologica e geometrica delle varietà di Kim e Kostrikin. Infine si considerano famiglie di 3-varietà chiuse ed orientabili ottenute mediante chirurgia di Dehn con coefficienti razionali lungo le componenti di certi link periodici. Queste varietà sono una naturale generalizzazione delle varietà di Takahashi. Si ottengono presentazioni bilanciate del gruppo fondamentale e si applica l'algoritmo di Montesinos per rappresentare queste varietà come doppi rivestimenti ramificati della 3-sfera. In casi speciali si prova che queste varietà sono anche rivestimenti ramificati su varietà fibrate di Seifert. Infine si studia la loro struttura geometrica e si prova che esse contengono classi infinite di varietà iperboliche. Riportiamo qui soltanto alcuni dei risultati ottenuti in [1-4].

1. – Una generalizzazione delle varietà di Fibonacci.

Per ogni $n \geq 1, k_i \in \mathbb{Z}$, e interi coprimi p_i, ℓ_i $(p_i \geq 1)$, $i = 1, \ldots, n$, consideriamo la famiglia di gruppi finitamente generati $G_n(p_i, \ell_i, k_i)$ definiti dalle seguenti presentazioni bilanciate

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_n(p_i, \ell_i, k_i) = \langle x_1, , x_n, y_1, , y_n \ : \quad & x_i^{-1} x_{i+1} y_i^{\ell_i} y_{i-1}^{-\ell_{i-1}+p_{i-1}} = 1, \\ & (y_i^{\ell_i} y_{i+1}^{-\ell_{i+1}})^{k_i-1} y_i^{\ell_i} x_{i+2} = 1 \\ & \text{(indici mod } n)\rangle \end{aligned}$$

La presentazione $\mathcal{P}_n(p_i, \ell_i, k_i)$ è indotta dal seguente complesso poliedrale $\mathbb{P}_n(p_i, \ell_i, k_i)$ ($n = 3$, $k_1 = 2$, $k_2 = 3$, $k_3 = 4$):



TEOREMA 1.1. – *Per $n \geq 1$, $k_i \in \mathbb{Z}$, $k_i \geq 2$, m.c.d.$(p_i, \ell_i) = 1$, $1 \leq p_i < \ell_i$, il complesso poliedrale $\mathbb{P}_n(p_i, \ell_i, k_i)$ determina una 3-varietà chiusa ed orientabile $M_n(p_i, \ell_i, k_i)$ ottenuta come spazio quoziente per identificazione a coppie delle facce di bordo. Inoltre, $M_n(p_i, \ell_i, k_i)$ ammette una spina che corrisponde alla presentazione finita $\mathcal{P}_n(p_i, \ell_i, k_i)$.*

Se $p_i = p \geq 1$, $\ell_i = \ell \geq 1$, m.c.d.$(p, \ell) = 1$ e $k_i = k \geq 2$, denotiamo le varietà $M_n(p_i, \ell_i, k_i)$ brevemente con $M_n(k, \ell, p)$.

TEOREMA 1.2. – *Per ogni $n \geq 2$, $1 \leq p < \ell$, la varietà $M_n(k, \ell, p)$ è omeomorfa all'n-rivestimento ciclico dello spazio lenticolare $L(p, \ell)$ ramificato sopra un nodo (che è l'immagine dell'asse nord-sud del poliedro $\mathbb{P}_n(k, \ell, p)$ sotto la rotazione di un angolo di $2\pi/n$). Se $p = 1$, allora la varietà $M_n(k, \ell, p)$ è l'n-rivestimento ciclico della*

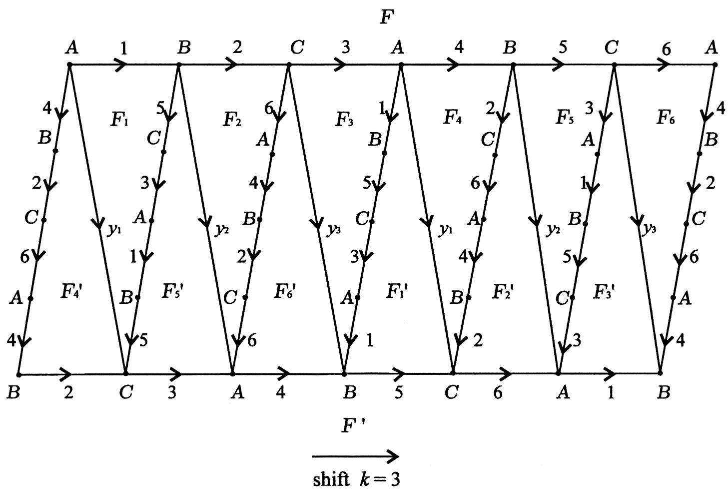
3-sfera ramificato sul nodo a 2-ponti $(4k\ell - 1)/2\ell$ (quindi è una varietà iperbolica per ogni $n \geq 3$).

2. – Varietà di Seifert iperellittiche.

Consideriamo i gruppi definiti dalle seguenti presentazioni:

$$G_n(k, \ell) = \langle a_1, \dots, a_n, b \ : \ b = a_i a_{i+k-1} a_{i+2(k-1)} a_{i+(\ell-1)(k-1)} \ (i = 1, \dots, n), \quad a_i a_{i+k} a_{i+2k} a_{i+k(n-1)} = 1 \ (i = 1, \dots, d) \rangle$$

dove $n \geq 2, \ell \geq 2, 1 \leq k \leq n-1, d = m.c.d(n, k)$. Queste presentazioni sono indotte dai complessi poliedrali $P_n(k, \ell)$ ($n = 6$, $k = 3$, $\ell = 5$):



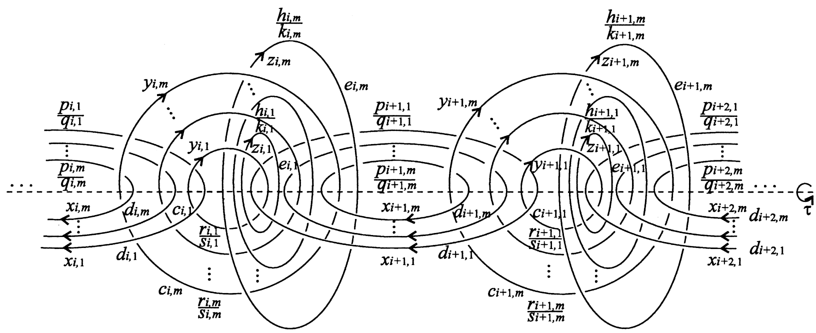
Il complesso poliedrale $P_n(k, \ell)$ determina una 3-varietà chiusa e orientabile $M_n(k, \ell)$ ottenuta come spazio quoziente per identificazione a coppie delle facce di bordo. Inoltre, $M_n(k, \ell)$ ammette una spina che corrisponde alla presentazione finita $G_n(k, \ell)$. Sia $H_n(k, \ell)$ il gruppo di estensione di $G_n(k, \ell)$ mediante l'automorfismo ciclico ρ definito da $\rho(a_i) = a_{i+1}$ e $\rho(b) = b$. Allora $H_n(k, \ell)$ risulta isomorfo al gruppo fondamentale dell'orbifold $\mathcal{O}(T(2\ell, 2), n, n/d)$ che ha come spazio topologico associato la 3-sfera e insieme singolare il link torico $T(2\ell, 2)$ con indici di ramificazione n e n/d sulle sue componenti, dove $d = m.c.d.(n, k)$.

TEOREMA 2.1. – *La 3-varietà $M_n(k, \ell)$ è omeomorfa all'n-rivestimento ciclico della 3-sfera ramificato sul link torico $T(2\ell, 2)$ con indici di ramificazione n e n/d sulle sue componenti, dove $d = m.c.d.(n, k)$. Se n e k sono coprimi, allora $M_n(k, \ell)$ sono anche ℓ-rivestimenti ramificati degli spazi lenticolari $L(n, k)$ (in particolare, $M_n(k, 2)$ sono esempi di varietà di Seifert $L(n, k)$-iperellittiche).*

TEOREMA 2.2. – *Le varietà $M_n(k, \ell)$, $m.c.d.(n, k) = 1$, sono $2n$-rivestimenti ciclici della 3-sfera ramificati sul link a 2-ponti $\boldsymbol{b}(4\ell, 2\ell - 1)$ con indici di ramificazione 2* *ed n. In particolare, le varietà $M_n(k,2)$ sono rivestimenti ciclici della 3-sfera ramificati sul link di Whitehead con indici di ramificazione* 2 *ed* n.

3. – Varietà ottenute per chirurgia di Dehn.

Per ogni coppia di interi positivi n e m, consideriamo il link orientato $L_{n,m}$ con $3mn$ componenti nella 3-sfera orientata $\mathbb{S}^3$ illustrato in figura:



Questo link $L_{n,m}$ è n-periodico poichè ha una simmetria ciclica di ordine n che permuta le famiglie dei cerchi. Consideriamo le 3-varietà chiuse ed orientabili $M_{n,m} = M_{n,m}(p_{i,j}/q_{i,j}; r_{i,j}/s_{i,j}; h_{i,j}/k_{i,j})$ ottenute per chirurgia di Dehn su $\mathbb{S}^3$ lungo il link $L_{n,m}$ con coefficienti di chirurgia $p_{i,j}/q_{i,j}$, $r_{i,j}/s_{i,j}$ and $h_{i,j}/k_{i,j}$, $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$. Questi spazi includono famiglie ben note di 3-varietà (molte delle quali con struttura iperbolica), come ad esempio le *varietà di Fibonacci*, le *varietà di Fibonacci generalizzate* e le *varietà di Fibonacci frazionarie*. Le 3-varietà $M_{n,m}$ sono state rappresentate come rivestimenti ramificati ed è stata determinata una presentazione geometrica del loro gruppo fondamentale. In particolare, si prova che $M_{n,m}$ è omeomorfa al doppio rivestimento della 3-sfera ramificato sopra un ben preciso link costruito mediante tangle razionali.

BIBLIOGRAFIA

[1] BARBIERI E., CAVICCHIOLI A. e SPAGGIARI F., *Seifert hyperelliptic manifolds*, Intern. J. Pure Applied Math., **6** (2003), 317-342.

[2] BARBIERI E., CAVICCHIOLI A. e SPAGGIARI F., *Dehn surgeries on periodic links*, Math. Nachr., **279** (2006), 477-489.

[3] BARBIERI E. e SPAGGIARI F., *On branched coverings of lens spaces*, Proceed. Edinburgh Math. Soc., **47** (2004), 271-288.

[4] BARBIERI E. e SPAGGIARI F., *Periodic links and manifolds*, JP Journal of Geometry and Topology, **4** (2004), 35-52.

Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata "G. Vitali"
Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia
e-mail: barbieri.elena@unimo.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Modena) - Ciclo XVII
Direttore di ricerca: Prof. Alberto Cavicchioli, Università di Modena e Reggio Emilia