Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Simona Bonvicini

1-fattorizzazioni e gruppi di automorfismi

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **9-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2006), n.2 (Fascicolo dedicato alle tesi di dottorato), p. 211–214.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2006_8_9A_2_211_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2006.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. IX-A, Agosto 2006, 211-214

1-fattorizzazioni e gruppi di automorfismi

SIMONA BONVICINI

Sia $K_n = (V, E)$ il grafo completo di ordine n. Si dice 1-*fattore* di K_n un sottoinsieme di E che partiziona l'insieme dei vertici. Un 1-fattore si può rappresentare anche come involuzione priva di punti fissi sull'insieme dei vertici.

Si dice 1-*fattorizzazione* di K_n un insieme di $(n-1)$ 1-fattori che partiziona l'insieme degli spigoli.

Sia $\mathcal{F}$ una 1-fattorizzazione di K_n. Un automorfismo di $\mathcal{F}$ è un elemento di Sym(V) che muta $\mathcal{F}$ in sè globalmente. Gli automorfismi di $\mathcal{F}$ formano un gruppo detto il *gruppo totale degli automorfismi* di $\mathcal{F}$ e indicato con $Aut\mathcal{F}$. La dicitura "un gruppo di automorfismi" di $\mathcal{F}$ indicherà un qualunque sottogruppo di $Aut\mathcal{F}$. Se $Aut\mathcal{F}$ è banale, si dice che $\mathcal{F}$ è *rigida* .

Per ogni intero positivo pari n, si può costruire una 1-fattorizzazione di K_n utilizzando il gruppo ciclico Z_{n-1} delle rotazioni del poligono regolare avente $(n-1)$ vertici. Tale costruzione è nota come costruzione di Lucas e la 1-fattorizzazione che cosí si ottiene viene indicata con GK_n.

Provare l'esistenza di una 1-fattorizzazione di K_n, per ogni n pari, risulta pertanto facile. Il problema si complica quando si tratta di stabilire il numero di 1-fattorizzazioni a due a due non isomorfe di K_n. Infatti, sia $f(n)$ il numero di 1-fattorizzazioni non isomorfe di K_n, si puó dimostrare che $f(n)$ diverge al crescere di n. Il valore di questo limite mette in luce il fatto che è praticamente impossibile stabilire quante sono, a meno di isomorfismi, le 1-fattorizzazioni del grafo completo K_n. Tuttavia, se si richiede che la 1-fattorizzazione di K_n soddisfi particolari condizioni, si possono ottenere risultati di classificazione. Tali condizioni possono riguardare la natura del sottografo di K_n che si ottiene dall'unione di due o più 1-fattori distinti. Ad esempio, si dice che una 1-fattorizzazione $\mathcal{F}$ di K_n è *perfetta* se l'unione di due 1-fattori distinti di $\mathcal{F}$ è un ciclo Hamiltoniano. Esistono famiglie infinite di 1-fattorizzazioni perfette di K_n, quando $n = 2p$ o $n = p + 1$, dove p è un numero primo. Esistono esempi anche quando $n \neq 2p, p + 1$, ma rimane un problema aperto stabilire per quali valori di n esistono 1-fattorizzazioni perfette di K_n. Le 1-fattorizzazioni perfette non sono le uniche ad essere studiate in quest'ambito. Si parla infatti anche di 1-fattorizzazioni *uniformi*, *quasi perfette*, *sequenzialmente uniformi* e *sequenzialmente perfette*.

Altre condizioni che si possono richiedere sulla 1-fattorizzazione possono riguardare le proprietà di simmetria. Per proprietà di simmetria si intendono proprietà riguardanti gli automorfismi della 1-fattorizzazione $\mathcal{F}$ in questione. Attraverso un gruppo G di automorfismi si cerca di conoscere $\mathcal{F}$, sfruttando il fatto che G agisce su tre insiemi: l'insieme dei vertici, l'insieme degli spigoli e l'insieme degli 1-fattori. In altre parole, si può richiedere che l'azione di G su uno di questi tre insiemi sia di un certo tipo, ad esempio più volte transitiva sui vertici, e vedere se esistono 1-fattorizzazioni di K_n che possiedono un gruppo di automorfismi con tali proprietà. Inoltre, in un articolo non pubblicato di Cameron, è stato dimostrato che all'aumentare del numero di vertici quasi tutte le 1-fattorizzazioni di K_n sono rigide. Ciò rende plausibili i tentativi di classificazione delle 1-fattorizzazioni con qualche proprietà di simmetria.

In questa tesi si studiano le 1-fattorizzazioni $\mathcal{F}$ del grafo completo considerando l'azione sui vertici degli automorfismi di $\mathcal{F}$.

Si dice che una 1-fattorizzazione di K_n ha "molta simmetria" se possiede un gruppo di automorfismi più volte transitivo sui vertici, ovvero almeno 2-transitivo. Le 1-fattorizzazioni 2-transitive, cioè 1-fattorizzazioni con un gruppo di automorfismi 2-transitivo sui vertici, sono state completamente classificate in [3].

La condizione di 2-transitività sui vertici si può indebolire, richiedendo che la 1-fattorizzazioni di K_n ammetta un gruppo di automorfismi primitivo sui vertici. Tali 1-fattorizzazioni si dicono per l'appunto *primitive*.

Ogni 1-fattorizzazione 2-transitiva risulta anche primitiva. Ci si chiede pertanto se esistono esempi di 1-fattorizzazioni primitive non 2-transitive. In [1] si costruisce una famiglia infinita di 1-fattorizzazioni di K_n primitive, non 2-transitive, quando $n = 2^t$, per $t \geq 4$. La costruzione è di tipo geometrico e si base sul concetto di traslazione mista, che verrà introdotto qui di seguito.

Sia $F = GF(2)$ e $V = F^r$, lo spazio vettoriale r-dimesionale sul campo F. Sia W un iperpiano di V e $\overline{W} = V \setminus W$ l'iperpiano complementare di W in V. Siano w_1, w_2 vettori linearmente indipendenti in W.

Una *traslazione mista* è una permutazione involutoria $m : V \longrightarrow V$ tale che $m(x) = x + w_1$, se $x \in W$, altrimenti $m(x) = x + w_2$.

Si definisce *traslazione mista complementare*, la permutazione involutoria $\overline{m} : V \longrightarrow V$ tale che $\overline{m}(x) = x + w_2$ se $x \in W$, altrimenti $\overline{m}(x) = x + w_1$.

Poiché m e $\overline{m}$ dipendono dalla scelta di W, w_1 e w_2, si pone $m = m_{W,w_1,w_2}$ e $\overline{m} = \overline{m}_{W,w_1,w_2}$.

Una traslazione mista è una involuzione priva di punti fissi su V, pertanto può rappresentare un 1-fattore del grafo completo K_V, ovvero del grafo completo che ha come vertici gli elementi dello spazio vettoriale V.

Sia r un intero positivo tale che $r \geq 4$ e $r \neq 6$. Sia G l'insieme delle applicazioni $g : V \longrightarrow V$ tali che $g(x) = bx + c$, con $c \in V$, mentre $b \in B$, dove B è un sottogruppo del gruppo moltiplicativo $GF(2^r)^*$ tale che $|B|$ divide $2^r - 1$, ma $|B|$ non divide $2^m - 1$, per ogni $m < r$. Si dice che $|B| = d$ è un divisore 2-primitivo. Il lemma di Zsigmondy assicura l'esistenza di un tale divisore per ogni $r \neq 6$.

È possibile dimostrare che G è un sottogruppo di $AGL(V)$, transitivo su V. Non solo, G è anche primitivo su V e lascia invariato il parallelismo affine di $AG(V)$, che è dato dall'insieme delle traslazioni non nulle di V, ovvero dall'insieme $T \setminus \{id_V\} =$

$\{t_a : x \mapsto x + a, a \in V \setminus \{0\}\}$. Si può inoltre dimostrare che G ripartisce $T \setminus \{id_V\}$ in orbite di lunghezza d.

Dalle orbite di G su T si costruisce una 1-fattorizzazione $\mathcal{F}'$ primitva, non 2-transitiva, di K_V come segue: si fissa un iperpiano W di V, si scelgono due vettori linearmente indipendenti di W, w_1 e w_2, tali che le traslazioni corrispondenti, cioè t_{w_1} e t_{w_2}, appartengano a G-orbite distinte, quindi si costruisce la traslazione mista $m = m_{W,w_1,w_2}$. Posto $O_{w_i} = Orb_G(t_{w_i})$, per $i = 1, 2$, e $O_m = Orb_G(m)$, si ha che $\mathcal{F}' = O_m \cup (T \setminus (\{id_V\} \cup O_{w_1} \cup O_{w_2}))$.

Resta un problema aperto stabilire se esistono o meno 1-fattorizzazioni primitive di K_n quando il numero di vertici è diverso da una potenza di 2. Gli unici esempi che si conoscono in questo caso sono quelli 2-transitivi per $n = 6, 12$ e 28.

Nella tesi si studiano anche 1-fattorizzazioni strettamente transitive di K_n, ovvero 1-fattorizzazioni con un gruppo di automorfismi strettamente transitivo sui vertici.

I primi gruppi ad essere considerati sono stati quelli ciclici: Hartman e Rosa hanno dimostrato che per ogni $n \neq 2^t$, $t \geq 3$, esiste sempre una 1-fattorizzazione ciclica di K_n, vale a dire una 1-fattorizzazione che ammette un n-ciclo come automorfismo, [4]. Si può affermare che per ogni n pari esiste sempre una 1-fattorizzazione strettamente transitiva di K_n, poiché per n diverso da una potenza di 2 esiste una 1-fattorizzazione ciclica, mentre per $n = 2^t$, t intero positivo, otteniamo una 1-fattorizzazione strettamente transitiva considerando il parallelismo affine dello spazio $AG(t, 2)$, per la quale il gruppo che realizza la stretta 1-transitività è abeliano elementare.

Dato un gruppo G strettamente transitivo sui vertici di K_n, è possibile identificare gli elementi di G con i vertici di K_n. Questo consente di studiare la stretta transitività della 1-fattorizzazione all'interno del gruppo, utilizzando la nozione di starter, [2]. Lo starter permette di costruire una 1-fattorizzazione che ammette un gruppo G come gruppo di automorfismi strettamente transitivo sui vertici, una volta note le orbite del gruppo. Più precisamente, per costruire una G-orbita di 1-fattori è sufficiente conoscere alcuni degli spigoli che stanno nell'1-fattore rappresentante dell'orbita.

Nella matematica combinatoria abbastanza frequenti sono i metodi di duplicazione: si tenta di costruire una struttura con certe proprietà, partendo da una struttura più piccola che gode di quelle proprietà. Nella tesi tale metodo viene applicato agli starter: dato un gruppo G con un sottogruppo H di indice 2 avente uno starter, si dà una condizione sufficiente affinché G ammetta uno starter contenente quello di H.

Se G è un gruppo ciclico di ordine 2^t, $t \geq 3$, è impossibile costruire uno starter per G. Questo segue dal risultato in [4], ma può essere dimostrato anche attraverso la definizione di starter data in [2]. Ci si chiede se esistono altri gruppi, oltre ai 2-gruppi ciclici, per i quali è impossibile costruire uno starter. Nella tesi si presenta una condizione sufficiente che aggiunge un ulteriore elemento di conferma ai risultati che suggeriscono il fatto che i 2-gruppi ciclici siano gli unici a non ammettere uno starter.

Tale condizione si basa sul sottogruppo di Frattini di un gruppo G e da essa si ricava che ogni 2-gruppo non ciclico con sottogruppo di Frattini abeliano elementare ammette uno starter.

Altro argomento affrontato nella tesi è quello delle 1-fattorizzazioni *live* di K_n. In questo caso ogni 1-fattore viene considerato come permutazione sull'insieme dei vertici.

Si dice che una 1-fattorizzazione $\mathcal{F}$ di K_n è live se per ogni $g \in \mathcal{F}$ si ha che $g^{-1}fg \in \mathcal{F}$, per ogni $f \in \mathcal{F}$. Tale terminologia è stata adottata per la prima volta da Cameron, il quale ha anche osservato che il parallelismo affine di $AG(d, 2)$, $d \geq 2$, è una 1-fattorizzazione live. Ci si chiede pertanto se esistano altri esempi.

Utilizzando la nozione di traslazione mista, si possono costruire famiglie infinite di 1-fattorizzazioni live di K_n, quando $n = 2^t$, $t \geq 3$, [1]. Ad esempio, l'insieme dato da $\{m_{W,w_1,w_2}, \overline{m}_{W,w_1,w_2}\} \cup \{t_a : x \mapsto x + a, a \in V \setminus \{0, w_1, w_2\}\}$ è una traslazione mista di K_V.

Rimane un problema aperto stabilire se esistano o meno esempi di 1-fattorizzazioni live quando il numero di vertici è diverso da una potenza di 2.

BIBLIOGRAFIA

[1] Bonisoli A. e Bonvicini S., *Primitive one-factorizations and the geometry of mixed translations*. Discrete Math., to appear.

[2] Buratti M., *Abelian 1-factorization of the complete graph*. European J. Combin. 22 (2001), 291-295.

[3] Cameron P.J. e Korchmáros G., *One-factorizations of complete graphs with a doubly transitive automorphism group*. Bull. London. Math. Soc., **25** (1993), 1-6.

[4] Hartman A. e Rosa A., *Cyclic one-factorizations of the complete grah*. European J. Combin., 6 (1985), 45-48.

Dipartimento di Matematica, Università di Modena e Reggio Emilia
e-mail: bonvicini.simona@unimore.it
Dottorato in: Matematica (sede amministrativa: Modena)- Ciclo XVIII
Direttore di ricerca: Prof. Arrigo Bonisoli, Università di Modena e Reggio Emilia