Bollettino
Unione Matematica Italiana
Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Alessandro Calamai

Teoria del grado topologico per una classe di perturbazioni non compatte di applicazioni di Fredholm

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **9-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2006), n.2 (Fascicolo dedicato alle tesi di dottorato), p. 223–226.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2006_8_9A_2_223_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2006.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. IX-A, Agosto 2006, 223-226

Teoria del grado topologico per una classe di perturbazioni non compatte di applicazioni di Fredholm

ALESSANDRO CALAMAI

La teoria del grado topologico rientra nel campo più vasto dei metodi topologici in analisi non lineare. Il grado è principalmente uno strumento utile nello studio di equazioni che coinvolgono applicazioni tra spazi di Banach (o varietà) di dimensione finita o infinita.

Il lavoro svolto nella tesi ha avuto come obiettivo quello di approfondire ed estendere alcuni risultati recenti di teoria del grado. Prima di esporre sinteticamente i risultati ottenuti premettiamo alcuni degli aspetti principali di tale teoria, partendo da un punto di vista elementare. Dato $y \in \boldsymbol{R}^n$, consideriamo l'equazione

$$f(x) = y, \quad x \in U \tag{1}$$

dove f è un'applicazione continua a valori in $\boldsymbol{R}^n$ il cui dominio contiene l'aperto U di $\boldsymbol{R}^n$. Diciamo che la terna (f, U, y) è *ammissibile* per il grado topologico in $\boldsymbol{R}^n$, solitamente chiamato *grado di Brouwer*, se l'insieme $f^{-1}(y) \cap U$ è compatto. Ad ogni terna ammissibile (f, U, y) è possibile associare un intero, $\deg(f, U, y)$, che ci permette di ricavare informazioni sull'equazione (1): ad esempio sull'esistenza di soluzioni e su come le eventuali soluzioni sono distribuite in U. Il grado può quindi essere pensato come una funzione a valori interi definita nella classe delle terne ammissibili. Elenchiamone alcune proprietà:

- *(Normalizzazione)* Sia I l'identità in $\boldsymbol{R}^n$. Allora

$$\deg(I, \boldsymbol{R}^n, 0) = 1.$$

- *(Additività)* Data una terna ammissibile (f, U, y) e due sottoinsiemi aperti disgiunti U_1, U_2 di U, supponiamo che $f^{-1}(y) \cap U \subseteq U_1 \cup U_2$. Allora

$$\deg(f, U, y) = \deg(f, U_1, y) + \deg(f, U_2, y).$$

- *(Esistenza)* Se (f, U, y) è ammissibile e $\deg(f, U, y) \neq 0$, allora l'equazione $f(x) = y$ ammette almeno una soluzione in U.
- *(Invarianza per omotopia)* Date due terne ammissibili (f, U, y) e (g, U, z), un cammino continuo $\gamma : [0,1] \to \boldsymbol{R}^n$ tra y e z e un'omotopia continua $H : U \times [0,1] \to \boldsymbol{R}^n$ tra f e g, supponiamo che l'insieme $\{(x, \lambda) \in U \times [0,1] : H(x, \lambda) = \gamma(\lambda)\}$ sia compatto. Allora

$$\deg(f, U, y) = \deg(g, U, z).$$

Le proprietà di normalizzazione, additività e invarianza per omotopia vengono dette *proprietà fondamentali* del grado. Da esse è possibile ricavare una formula esplicita per calcolare il grado delle terne che appartengono a un'opportuna sottoclasse di terne ammissibili. Più precisamente, se (f, U, y) è una *terna regolare* (cioè f è differenziabile in ogni punto $x \in f^{-1}(y) \cap U$ con $f'(x)$ invertibile), allora vale

$$\deg(f, U, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y) \cap U} \operatorname{sign}(\det f'(x)). \tag{2}$$

La prima estensione della teoria del grado topologico agli spazi di Banach di dimensione infinita risale ad un famoso lavoro di Leray e Schauder (1934) per la classe dei *campi vettoriali localmente compatti* (cioè perturbazioni localmente compatte dell'identità). Successivamente, intorno al 1970, Nussbaum ha esteso il grado di Leray-Schauder ad una classe più ampia di perturbazioni dell'identità in uno spazio di Banach, considerando applicazioni α-contrattive e α-addensanti (*α-condensing*). Tali classi di applicazioni, che contengono quelle compatte, sono definite in termini della misura di non compattezza α, nozione introdotta da Kuratowski intorno al 1930. Più precisamente, Nussbaum in [5] ha definito un grado topologico per perturbazioni localmente α-addensanti dell'identità, o anche *campi vettoriali (localmente) α-addensanti*.

Una diversa estensione a dimensione infinita del grado di Brouwer riguarda le applicazioni *(non lineari) di Fredholm di indice zero* tra spazi di Banach e cioè applicazioni $f : \Omega \to F$ di classe C^1, definite in un sottoinsieme aperto Ω di uno spazio di Banach E a valori in uno spazio di Banach F, tali che il differenziale di Fréchet, $f'(x)$, è un operatore (lineare) di Fredholm di indice zero per ogni $x \in \Omega$.

Uno dei vantaggi di considerare le applicazioni di Fredholm – rispetto ai campi vettoriali – è dovuto al fatto che tali applicazioni operano in generale tra due spazi diversi. Tuttavia, in questo ambito sorge una notevole difficoltà: mentre per spazi (o varietà) di dimensione finita il concetto di orientabilità è naturale, per quelli di dimensione infinita non esiste alcuna nozione naturale di orientazione. Notiamo ad esempio che non è chiaro come estendere la formula (\refformula-0) in questo contesto.

Una prima definizione di grado per le applicazioni di Fredholm di indice zero tra spazi di Banach è stata data indipendentemente da Caccioppoli (1936) e Smale (1965). In realtà, a causa del problema dell'orientazione accennato sopra, essi definirono un grado modulo 2 (ossia non orientato). Osserviamo che, anche se questi autori adottarono approcci indipendenti e notevolmente diversi, le classi di applicazioni considerate da Leray-Schauder e Nussbaum da una parte e da Caccioppoli e Smale dall'altra hanno intersezione non vuota. Infatti se k è un'applicazione di classe C^1 dallo spazio di Banach E in sé ed è compatta (o localmente α-addensante), allora $I - k$ è Fredholm di indice zero.

Molti autori hanno affrontato il problema dell'orientazione e della definizione di un grado orientato per le applicazioni di Fredholm di indice zero tra spazi di Banach;

citamo tra gli altri i lavori di Elworthy e Tromba (1970), Mawhin (1972), Fitzpatrick, Pejsachowicz e Rabier (1990), Zvyagin e Ratiner (1992). Recentemente, Benevieri e Furi in [1] hanno definito una teoria del grado a valori interi per le applicazioni di Fredholm basata sul grado di Brouwer per applicazioni tra varietà orientate di dimensione finita. Il loro approccio si fonda su un concetto puramente algebrico di orientabilità per operatori di Fredholm tra spazi vettoriali reali e su un metodo di riduzione a dimensione finita. Successivamente gli stessi autori in [2] hanno esteso sia il concetto di orientabilità che la definizione del grado alla classe delle applicazioni *quasi-Fredholm*, ossia perturbazioni localmente compatte di applicazioni di Fredholm di indice zero tra spazi di Banach. In questo modo Benevieri e Furi hanno esteso completamente il grado di Leray-Schauder.

Lo scopo principale di questa tesi è stato quello di costruire una teoria del grado topologico che comprendesse sia il grado per applicazioni quasi-Fredholm sia il grado di Nussbaum per campi vettoriali α-addensanti.

Questo nuovo concetto di grado è definito per una classe particolare di perturbazioni non compatte delle applicazioni (non lineari) di Fredholm di indice zero tra spazi di Banach, chiamate *applicazioni α-Fredholm*. La definizione di tali applicazioni è basata su due numeri, $\alpha_p(f)$ e $\omega_p(f)$, introdotti in [3], che sono gli analoghi locali – o meglio puntuali – dei numeri $\alpha(f)$ e $\omega(f)$ considerati, ad esempio, in [4]. Questi numeri sono associati a un'applicazione f definita in un aperto Ω di uno spazio di Banach E a valori nello spazio di Banach F, mentre p è un punto fissato in Ω. I numeri $\alpha_p(f)$ e $\omega_p(f)$ – come $\alpha(f)$ e $\omega(f)$ – sono definiti in termini della misura di non compattezza α di Kuratowski. Alcune proprietà interessanti di $\alpha_p(f)$ e $\omega_p(f)$ sono state studiate in questa tesi. In particolare, se k è localmente compatta, allora $\alpha_p(k) = 0$ per ogni $p \in \Omega$ e se g è di Fredholm, allora $\omega_p(g) > 0$ per ogni $p \in \Omega$.

Le applicazioni α-Fredholm sono del tipo $f = g - k$, dove g è Fredholm di indice zero e la perturbazione k verifica una disuguaglianza locale espressa in termini di $\alpha_p(k)$ e $\omega_p(g)$ e analoga a quella soddisfatta dalle applicazioni localmente α-contrattive e α-addensanti. Sostanzialmente si richiede che la perturbazione non compatta k verifichi un'opportuna proprietà di "compattezza relativa" rispetto all'applicazione di Fredholm g.

Il nostro obiettivo di estendere il grado delle applicazioni quasi-Fredholm è stato raggiunto in due passi. Per prima cosa abbiamo definito il grado per la classe dei *campi di Fredholm α-contrattivi* (che contiene i campi vettoriali α-contrattivi), e poi abbiamo esteso questa definizione alla classe più generale dei *campi di Fredholm α-addensanti* (che contiene i campi vettoriali α-addensanti). Osserviamo che i campi di Fredholm α-contrattivi sono α-addensanti.

La nostra costruzione del grado si basa su una estensione naturale del concetto di orientazione (vedi [1] e [2]) alle applicazioni α-Fredholm. Più precisamente, consideriamo la classe delle terne della forma (g, U, k), dove g è Fredholm di indice zero, $f = g - k$ è un'applicazione α-Fredholm e U è un sottoinsieme aperto del dominio di f. Diciamo che la terna (g, U, k) è *ammissibile* se valgono le seguenti proprietà:

- g è orientata;
- l'insieme delle soluzioni $S = \{x \in U : g(x) = k(x)\}$ è compatto.

La definizione del grado per la classe delle terne ammissibili (nel nostro senso) si basa su una riduzione al grado per le applicazioni quasi-Fredholm. Tale riduzione è ottenuta con tecniche simili a quelle usate da Nussbaum nella sua costruzione del grado per campi vettoriali α-addensanti.

Nella tesi abbiamo dimostrato che il grado ottenuto per i campi di Fredholm α-contrattivi e α-addensanti verifica le proprietà fondamentali e altre che da esse derivano. Inoltre abbiamo confrontato i risultati ottenuti con quelli degli autori sopra citati (vedi [2] e [5]). Abbiamo mostrato prima che il grado per i campi di Fredholm α-contrattivi estende sia il grado per applicazioni quasi-Fredholm sia il grado di Nussbaum per i campi vettoriali α-contrattivi, e successivamente che il grado per i campi di Fredholm α-addensanti estende il grado di Nussbaum per i campi vettoriali α-addensanti. Infine abbiamo fornito un'applicazione del nostro grado a un problema di biforcazione per un'equazione differenziale ordinaria con condizioni di periodicità al bordo.

Concludiamo osservando che la tesi contiene anche alcuni risultati su un problema legato al grado topologico: l'invarianza del dominio. Più precisamente, il *teorema di invarianza del dominio* fornisce condizioni che assicurano che un'applicazione f – ad esempio tra spazi di Banach – mandi aperti in aperti (sia cioè aperta). Nella tesi abbiamo dimostrato che il teorema di invarianza del dominio vale per una classe particolare di perturbazioni non compatte delle applicazioni (non lineari) di Fredholm di indice zero tra spazi di Banach. Questo risultato ne generalizza uno recente (Benevieri, Furi e Pera 2000) per le applicazioni di Fredholm tra spazi di Banach e uno ottenuto da Nussbaum (1972) per i campi vettoriali α-contrattivi.

BIBLIOGRAFIA

[1] Pierluigi Benevieri e Massimo Furi, *A simple notion of orientability for Fredholm maps of index zero between Banach manifolds and degree theory*, Ann. Sci. Math. Québec, **22** (1998), 131-148.

[2] Pierluigi Benevieri e Massimo Furi, *Degree for locally compact perturbations of Fredholm maps in Banach spaces*, Abstract and Applied Analysis, to appear.

[3] Alessandro Calamai, *The invariance of domain theorem for compact perturbations of nonlinear Fredholm maps of index zero*, Nonlinear Funct. Anal. Appl. , **9** (2004), 185-194.

[4] Massimo Furi, Mario Martelli e Alfonso Vignoli, *Contributions to spectral theory for nonlinear operators in Banach spaces*, Ann. Mat. Pura Appl. , **118** (1978), 229-294.

[5] Roger D. Nussbaum, *Degree theory for local condensing maps*, J. Math. Anal. Appl. , **37** (1972), 741-766.

Dipartimento di Scienze Matematiche, Università Politecnica delle Marche
e-mail: calamai@dipmat.univpm.it, calamai@math.unifi.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Firenze) - Ciclo XVII
Direttore di ricerca: Prof. Massimo Furi, Università di Firenze.