
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

SANDRO CAPARRINI

Le origini del calcolo vettoriale nella geometria e nella meccanica

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 9-A—La
Matematica nella Società e nella Cultura (2006), n.2 (Fascicolo
dedicato alle tesi di dottorato), p. 227–230.*

Unione Matematica Italiana

http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2006_8_9A_2_227_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Le origini del calcolo vettoriale nella geometria e nella meccanica

SANDRO CAPARRINI

1. – Introduzione.

Secondo la tesi comunemente accettata dagli storici della matematica [1], il punto di partenza nello sviluppo del calcolo vettoriale elementare sarebbe stato l'interpretazione geometrica dei numeri complessi, scoperta da diversi autori nei primi anni dell'Ottocento. Da qui presero spunto W. R. Hamilton e H. Grassmann, attorno al 1845, per creare rispettivamente la teoria dei quaternioni e la *Ausdehnungslehre*. Queste teorie furono in seguito semplificate da J.W. Gibbs e O. Heaviside, attorno al 1880, per adattare alle necessità della fisica matematica; in tal modo nacque il calcolo vettoriale moderno.

Un simile schema, per quanto sostanzialmente corretto, trascura l'influenza della geometria e della meccanica. Si perdono così molte connessioni logiche importanti, e in particolare si oscura l'origine delle principali operazioni tra vettori. La somma di vettori non è infatti altro che il parallelogramma delle forze, il prodotto scalare è l'operazione che descrive una proiezione di segmenti in geometria e il lavoro di una forza in meccanica, il prodotto esterno è una superficie piana rappresentata da un vettore ortogonale in geometria e il momento di una forza in meccanica, il prodotto misto è un volume orientato. Per capire come nacque il calcolo vettoriale è dunque necessario risalire alla meccanica della seconda metà del Settecento.

2. – I vettori in meccanica (1759-1834).

Esistono in sostanza quattro grandezze vettoriali nella meccanica elementare: la forza, lo spostamento, la velocità angolare e il momento di una forza. La rappresentazione vettoriale degli spostamenti, com'è noto, risale al periodo ellenistico, quella delle forze alla fine del Seicento. La rappresentazione vettoriale della velocità angolare fu invece scoperta da P. Frisi nel 1759 ed esposta in diverse sue opere. Lo stesso risultato fu ottenuto contemporaneamente da un altro italiano, T. Perelli, che tuttavia non lo pubblicò.

L. Euler scoprì nel 1780 che il momento di una forza rispetto a un asse poteva essere rappresentato da un segmento orientato. Il suo lavoro, però, fu conosciuto solo

molti anni dopo. Indipendentemente da Euler, nel 1798 P. S. de Laplace dimostrò l'esistenza del cosiddetto *plan invariable* di un sistema meccanico isolato, che in termini moderni è un piano perpendicolare al vettore momento angolare totale del sistema. I risultati di Euler e Laplace furono collegati da G.C.F.R. de Prony nella *Mécanique philosophique* (1800).

Nei suoi *Eléments de Statique* (1803) L. Poinsot creò il concetto di *coppia di forze* per rappresentare i momenti. Una coppia è formata da due forze uguali e parallele ma di verso opposto; introducendo un segmento orientato perpendicolare al piano della coppia e di lunghezza proporzionale al prodotto fra l'intensità delle forze e la distanza fra le loro direzioni, le coppie si compongono con la legge del parallelogramma. In sostanza, Poinsot diede una trattazione completamente vettoriale della statica dei corpi rigidi. S.-D. Poisson, invece, nel 1808 rappresentò il momento di una forza con un triangolo avente per base la forza e per vertice il polo dei momenti.

Stimolato da questa successione di scoperte, nella seconda edizione della *Mécanique analytique* (1811) J.-L. Lagrange formulò esplicitamente la rappresentazione delle rotazioni infinitesime per mezzo di segmenti orientati, un risultato che nella prima edizione (1788) non era ancora chiaro. Il vettore velocità angolare comparve poco tempo dopo anche in un libro di J.-F. Français sulla rotazione dei corpi rigidi.

In due lavori di J.P.M. Binet, pubblicati nel 1815 e nel 1823, si trovano rispettivamente la formulazione vettoriale della legge dei momenti e la definizione vettoriale della velocità areolare. Nel secondo lavoro si trova anche il teorema secondo cui la legge dei momenti per i sistemi di punti materiali deriva dalla prima e dalla seconda legge della dinamica, un risultato di cui C. Truesdell nel 1964 e B.L. van der Waerden nel 1983 avevano cercato invano l'origine [2].

La teoria moderna dei momenti di vettori si deve a A.-L. Cauchy, che la formulò in una serie di cinque lavori successivi nel 1826. Cauchy in sostanza unì le superficie piane di Poisson ai vettori perpendicolari di Poinsot. L'esistenza di diverse teorie dei momenti causò nel 1827 una polemica tra Poinsot e Cauchy e una tra Poinsot e Poisson, in cui Poinsot contestò l'originalità della teoria dei momenti di Cauchy e Poisson mise in dubbio la priorità di Poinsot nell'uso della rappresentazione vettoriale dei momenti.

Nel 1834 Poinsot pubblicò la sua celebre teoria vettoriale del moto di un corpo rigido con un punto fisso, unendo di fatto i diversi risultati ottenuti fino a quel momento riguardo ai vettori in meccanica. Dimostrò inoltre che una coppia di velocità angolari non è altro che una traslazione. La similitudine tra forze e velocità da un lato e coppie e velocità angolari dall'altro indusse M. Chasles a formulare un vago principio di dualità tra rotazioni e traslazioni, in un'appendice dello *Aperçu historique* (1837); per quanto il principio sia discutibile, è un segno del riconoscimento che questi problemi meccanici portavano in realtà a questioni di geometria pura. Per una trattazione dettagliata si veda [3].

3. – I vettori in geometria (1775-1878).

In un famoso lavoro di geometria analitica del 1775 Lagrange rappresentò una piramide triangolare per mezzo di tre segmenti OA, OB e OC, e fornì le espressioni analitiche per il prodotto scalare e il prodotto misto. Quest'ultimo compare anche nella seconda edizione della *Mécanique analytique* (1811).

L. Carnot, nella *Géométrie de position* (1803) studiò in modo generale la teoria dei poligoni e dei poliedri proiettandone gli elementi rispettivamente su rette e piani. Poiché un poligono chiuso è l'immagine geometrica di una somma di vettori, in tal modo ottenne diverse proprietà vettoriali. Per i poliedri ottenne risultati formalmente identici, segno che una superficie può essere rappresentata da un vettore perpendicolare. Risultati in parte simili, nello stesso periodo, si devono a S. Lhuillier.

Con un semplice ragionamento fisico, J.D. Gergonne mostrò nel 1818 che le superficie potevano essere rappresentate da segmenti perpendicolari. Si consideri un fluido qualsiasi racchiuso in un contenitore in assenza di peso, e si isoli idealmente una porzione di fluido avente la stessa forma del poliedro. A priori è ovvio che questo poliedro deve essere in equilibrio sotto l'azione delle forze di pressione, le quali non sono altro che vettori perpendicolari alle facce e proporzionali alle loro aree. La somma vettoriale di queste forze è dunque zero, per cui il poliedro può essere rappresentato dal poligono chiuso delle forze.

Diversi matematici dei primi anni dell'Ottocento lavorarono su questi argomenti. La teoria dei momenti di Poisson introdusse di fatto l'operazione puramente geometrica di composizione di superficie piane. Nel 1811 J.N.P. Hachette scoprì in geometria analitica quelle che oggi vengono dette *basi reciproche*; inoltre, nel *Traité des surfaces du second degré* (1813), trattò parallelamente la proiezione dei segmenti orientati e delle superficie piane, evidenziano la sostanziale identità. Binet, in un suo lavoro del 1813, generalizzò ad assi non ortogonali la teoria di Lagrange, arrivando così a ottenere le espressioni per i prodotti scalare e misto per sistemi di assi qualsiasi. Nel 1825 J.C.F. Sturm diede una trattazione analitica generale della poligonometria. G.G. de Coriolis e Cauchy, usarono il concetto di momento come un surrogato del prodotto esterno, rispettivamente nel 1835 e nel 1844. Cauchy nel 1841 studiò anche l'invarianza delle principali espressioni vettoriali rispetto alle rotazioni degli assi di riferimento. B. de Saint-Venant nel 1845 introdusse i tre versori caratteristici di una curva tridimensionale e, grazie ad essi, ottenne decine di relazioni notevoli in geometria differenziale.

In seguito a questa messe di risultati, cominciarono ad apparire i primi esempi di calcolo vettoriale vero e proprio. In una lunga memoria del 1820 l'italiano G. Giorgini diede una trattazione sistematica, rigorosa e puramente analitica della teoria delle proiezioni di segmenti e superficie. Poiché fece uso di assi cartesiani non ortogonali, dovette introdurre due diversi tipi di proiezioni, che oggi sono dette componenti *contravarianti* e *covarianti* di un vettore, Trovò inoltre diverse relazioni caratteristiche del calcolo tensoriale, quali ad esempio il legame tra i due tipi di componenti

Nel 1830 Chasles prese spunto dalla meccanica di Poincot per creare un primo, rozzo esempio di calcolo vettoriale. Il coronamento di queste ricerche si deve a D. Chelini, il quale a partire dal 1838 creò un calcolo vettoriale simile a quello di Chasles ma in cui si teneva conto dei risultati rigorosi di Giorgini, di cui fece uso per semplificare varie teorie geometriche. Sono interessanti le sue trattazioni di geometria differenziale delle curve e delle superficie: definì il triedro fondamentale di una curva contemporaneamente a Saint-Venant e dimostrò per mezzo dei vettori i teoremi di Euler e Meusnier.

Grazie allo schema storico sopra delineato si capisce quale sia stata l'origine delle teorie vettoriali di A.F. Möbius, H. Grassmann, Saint-Venant e M. O'Brien: questi autori partirono dai metodi vettoriali ideati all'inizio dell'Ottocento per risolvere problemi specifici in meccanica e in geometria. Si capisce anche quali siano state le reazioni della maggior parte dei matematici al calcolo vettoriale di Gibbs e Heaviside: lo considerarono una notazione ingegnosa per esprimere risultati ben noti.

BIBLIOGRAFIA

- [1] M. J. CROWE, *A History of Vector Analysis: the Evolution of the Idea of a Vectorial System*, Notre Dame, Indiana, University of Notre Dame Press (1967).
- [2] S. CAPARRINI, *The Discovery of the Vector Representation of Moments and Angular Velocity*, *Archive for History of Exact Sciences*, **56** (2002), 151-181.
- [3] S. CAPARRINI, *On the History of the Principle of Moment of Momentum*, *Sciences et techniques en perspective*, **3** (1999), 47-56.

Dipartimento di Matematica, Università di Torino
e-mail: caparrini@libero.it

Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Torino Università) – Ciclo XVI
Direttori di ricerca: Prof. Livia Giacardi, Università di Torino
Prof. Patricia Radelet-De Grave, Università di Louvain