Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Meri Lisi

Problemi inversi in astrofisica

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **9-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2006), n.2 (Fascicolo dedicato alle tesi di dottorato), p. 247–250.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2006_8_9A_2_247_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2006.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. IX-A, Agosto 2006, 247-250

Problemi inversi in astrofisica

MERI LISI

1. – Introduzione.

I problemi inversi hanno un ruolo rilevante nella valutazione di quelle quantità fisiche che non possono essere ottenute tramite misurazioni dirette. Possiamo dire che la risoluzione di un problema inverso consiste nel determinare le cause sconosciute, basandosi sull'osservazione dei loro effetti. Questo a differenza del corrispondente problema diretto, la cui soluzione consiste invece nel trovare gli effetti, a partire dalla completa descrizione delle loro cause. Semplificando, i problemi inversi possono essere descritti come problemi dove la risposta è nota, ma non la domanda, o dove i risultati sono conosciuti, ma non le cause che li hanno generati.

Problemi inversi vengono studiati nell'ambito di molte delle scienze applicate, come geofisica, ottica, meccanica quantistica, astronomia, *medical imaging* ed altre. Per esempio, in geofisica, si cercano di determinare la locazione, il profilo e/o alcuni parametri (come la conduttività) delle anomalie geologiche all'interno della Terra, attraverso misurazioni effettuate al livello della sua superficie; nel contesto del *medical imaging*, si hanno studi nell'ambito della tomografia.

Nel formulare matematicamente questo tipo di problemi, ci si trova a dover determinare uno o più coefficienti all'interno di una equazione differenziale (o sistema di equazioni differenziali), avendo solo una parziale conoscenza di certe soluzioni particolari dell'equazione stessa (o del sistema di equazioni).

Inoltre, mentre il problema diretto risulta ben-posto (cioè tale che esiste una ed una sola soluzione, dipendente in maniera continua dai dati), il problema inverso è di solito mal-posto, prima di tutto perché può presentare più di una soluzione.

In questa tesi vengono analizzati alcuni problemi inversi nell'ambito della teoria del trasporto di particelle attraverso un dato mezzo di diffusione, in particolare nel caso del mezzo interstellare. La ricerca in questo campo è abbastanza all'inizio, anche se non se ne naconde la sua importanza, dovuta, per esempio, al fatto che ci sono molte quantità fisiche (come dimensione, coefficiente di scattering e caratteristiche di una sorgente di una nebulosa nello spazio intergalattico) che non sono semplici da determinare per mezzo di misure dirette. In particolare, i problemi analizzati in questa tesi partono dalla conoscenza della quantità di luce emessa dalla nube.

Il mezzo interstellare è composto in gran parte di gas (sopratutto idrogeno), con una densità media pari a circa 10^6 atomi per metro cubo, certamente non distribuito uniformemente, ma concentrato in grandi nubi (dette anche nebulose o nebule), le cui dimensioni sono dell'ordine di 10 anni luce, cioè tra 10^{-1} e 10 parsec, dove un parsec è circa

$3 \cdot 10^{13}$ chilometri, [4]. Si noti che il diametro del sistema solare è dell'ordine di 10^{-4} parsec!

La densità delle particelle all'interno di una nube è compresa fra 10^3 e 10^6 particelle$/cm^3$ (quella dell'atmosfera terrestre, al livello del mare, è approssimativamente 10^{19} particelle$/cm^3$, mentre nel vuoto intergalattico possiamo trovare 10^0 particelle$/cm^3$). Una nebulosa è dunque rarefatta, ma non così tanto rispetto al vuoto interstellare.

Le nubi interstellari possono essere classificate in nebulose oscure, ad emissione e a riflessione. Le prime sono ammassi che risultano opachi alla vista, a causa dei granuli di polvere presenti al loro interno (per esempio, la *Horsehead Nebula* (B 33)). Le seconde sono costituite da gas ad alta temperatura, che energizzato dalla luce ultravioletta proveniente da una o più stelle all'interno, fa emettere loro della radiazione (come la *Orion Nebula* (M 42)). Infine, le nebulose a riflessione sono nubi di polvere che riflettono la luce di stelle vicine (per esempio, le *Pleiadi* (M 45)).

Nella tesi viene studiato il trasporto di fotoni in una nube omogenea, che occupa una regione convessa dello spazio interstellare, con una sorgente di fotoni q al suo interno (si considera sia il caso unidimensionale che quello tridimesionale). Riportiamo alcuni risultati ottenuti ipotizzando il fenomeno del trasporto unidimensionale, cioè assumendo la densità del numero di fotoni U dipendente dalla variabile spaziale x, dal coseno μ dell'angolo che la luce forma con l'asse orizzontale, e dal tempo t.

Considerando la nebula limitata da due superfici $x = a(t)$ e $x = b(t)$ e fissando un sistema di riferimento solidale con il moto della nube (è conveniente fissare la superficie a sinistra, cioè $a(t) = 0$), abbiamo che $x = b(t)$ si muove con velocità $\dot{b}(t)$, dove $b(t)$ è una funzione reale continua in $t \in [0, +\infty)$, tale che $|\dot{b}(t)| \leq \sup_{t \geq 0} |\dot{b}(t)| < \infty$. L'equazione del trasporto di fotoni nello spazio interstellare risulta, [5]:

$$(1) \qquad U_t = -c\mu U_x - c[\hat{\sigma} + (\sigma - \hat{\sigma})\hat{\chi}]\, U + c[\hat{\sigma_s} + (\sigma_s - \hat{\sigma_s})\hat{\chi}] \int_{-1}^{+1} kU d\mu' + q\hat{\chi},$$

per ogni $x \in (-\infty, +\infty), \mu \in (-1, 1), t \in (0, +\infty)$, dove U_t e U_x sono rispettivamente la derivata parziale di U rispetto a t e quella rispetto a x; $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}(x, t)$ e $\hat{\sigma}_s = \hat{\sigma}_s(x, t)$ sono le sezioni d'urto totale e di scattering della luce con le particelle fuori dalla nube ($\hat{\sigma} > \hat{\sigma}_s > 0$), mentre $\sigma = \sigma(x, t)$ e $\sigma_s = \sigma_s(x, t)$ quelle all'interno della nube ($\sigma > \sigma_s, \sigma > \hat{\sigma}$ e $\sigma_s > \hat{\sigma}_s$); $\hat{\chi} = \hat{\chi}(x, t)$ è una versione mollificata della funzione caratteristica χ dell'intervallo $[0, b(t)]$ (per non avere problemi di derivabilità in $x = 0$ e $x = b$) e q è una sorgente di fotoni. Il nucleo di scattering $k = k(\mu, \mu')$ è una funzione positiva C^∞ a supporto compatto rispetto a ciascuna variabile e tale che:

$$(2) \qquad k(\mu, \mu') = k(\mu', \mu), \ \int_{-1}^{+1} k(\mu, \mu') d\mu = 1, \ \left| \frac{\partial^r}{\partial^r_\mu} k(\mu, \mu') \right| \leq \frac{\bar{k}}{2}, \ \forall r \in \mathbb{N}_0,$$

dove $\bar{k}$ è una opportuna costante positiva. In particolare, σ_s è scelto tale che $\bar{k}\sigma_s < \sigma$.

La condizione iniziale per la (1) è data da $U(x, \mu, 0) = U_0(x, \mu)$, con U_0 assegnata.

Considerando lo spazio di Banach $X = L^1(\mathbb{R} \times (-1, 1))$, con la norma usuale, definendo opportuni operatori, è possibile riscrivere la (1) nella versione astratta:

$$\frac{d}{dt}U(t) = (S - c\sigma I + c\sigma_s J)\,U(t) + Q(t), \quad \forall t > 0, \tag{3}$$

dove $Sf = -cf_x$, con $D(S) = \{f \in X : Sf \in X\}$, è l'operatore di streaming, $Jf = \int_{-1}^{+1} kfd\mu'$ con $D(J) = X$, I l'operatore identità e dove abbiamo usato la notazione $\sigma = \hat{\sigma} + (\sigma - \hat{\sigma})\hat{\chi}, \sigma_s = \hat{\sigma_s} + (\sigma_s - \hat{\sigma_s})\hat{\chi}$ e $Q(t) = q\hat{\chi}$.

2. – Quattro problemi inversi.

Dopo aver studiato l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema diretto tramite la teoria dei semigruppi, sono stati analizzati quattro problemi inversi, ipotizzando di conoscere la quantità di luce emessa dalla nube (misurata da Terra tramite uno strumento astronomico): calcolare la dimensione $b(t)$ della nube; studiare la sezione d'urto totale σ all'interno della nebulosa; valutare una sorgente q (modellizzata da una funzione continua) all'interno della nube; identificare la posizione x_0 di una sorgente puntiforme (cioè localizzata in un punto specifico) dentro la nebulosa. Al fine di studiare i primi tre casi è stato dimostrato che, [2]:

TEOREMA 1. – *L'operatore lineare* $(S - c\sigma I)$ *è il generatore di un semigruppo fortemente continuo* $\{Z(t), t \geq 0\}$ *tale che* $\|Z(t)\|_X \leq e^{-c\sigma t}$, *per ogni* $t \geq 0$.

In ognuno di questi problemi inversi, al fine di semplificare lo studio, visto le considerazioni fisiche inerenti il moto di una qualsiasi nube, è stata usata la cosiddetta equazione quasi-statica, associata alla (3). Poiché ogni nebulosa si muove molto lentamente nel tempo, il numero di fotoni al suo interno può essere considerato praticamente costante. Si dice che $u(t) = u(\cdot, \cdot, t)$ è l'approssimazione quasi-statica della soluzione $U(t) = U(\cdot, \cdot, t)$ del problema dato se soddisfa la seguente equazione:

$$0 = (S - c\sigma I + c\sigma_s J)\,U(t) + Q(t), \quad \forall t > 0, \tag{4}$$

dove t può essere considerato come un "parametro".

Il caso che ha creato più difficoltà è stato lo studio del problema con una sorgente localizzata in un punto x_0. Essa è stata considerata indipendente dal tempo e modellizzata come $Q(t) = Q_\delta = q_0\delta(x - x_0)\hat{\chi}$, dove δ è il funzionale delta di Dirac del punto x_0 e $q_0 > 0$ è la luce totale emessa dalla sorgente. Definendo l'operatore $Tf = [c\sigma I - (S + c\sigma_s J)]f$ con $D(T) = D(S)$, la (4) può essere riscritta come:

$$Tu(t) = Q_\delta, \quad \forall t > 0, \tag{5}$$

che non può essere studiata in X, poiché $\delta(x - x_0)$ non appartiene allo spazio X.

Al fine di risolvere il problema, è stato utilizzato il cosiddetto "metodo dell'aggiunto".

L'idea è stata quella di considerare le variabili fisiche in gioco non come funzioni, ma come funzionali, che assegnano un valore a ciascuna funzione appartenente ad un insieme di "funzioni test". Lo spazio X è stato dunque "immerso" (in maniera continua) in un opportuno spazio di distribuzioni $\widetilde{X}$ (spazio localmente convesso):

$$X = L^1(\mathbb{R} \times (-1, 1)) \subset \tilde{X} = \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times (-1, 1)), \tag{6}$$

dove $\mathcal{D}'$ è lo spazio di tutti funzionali lineari e continui sullo spazio di funzioni test:

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}\times(-1,1)) = \bigcup_{m=1}^{+\infty} \mathcal{D}_{K_m}(\mathbb{R}\times(-1,1)), \tag{7}$$

dove $\{K_m\}_{m=1}^{+\infty}$ è una successione di sottoinsiemi compatti di $\mathbb{R}\times(-1,1)$ tale che $K_1 \subset K_2 \subset \ldots$ e $\mathbb{R}\times(-1,1) = \bigcup_{m=1}^{+\infty} K_m$. In particolare, si è considerato $\mathcal{D}_{K_m} = \{\phi \in C^\infty(\mathbb{R}\times(-1,1)) : \operatorname{supp}\phi \subset K_m\}$, con la famiglia di seminorme $\Gamma = \{p_{m,a}; m \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{N}_0^2\}$, tale che $p_{m,a}(\phi) = \sup_{(x,\mu)\in K_m} |(\partial^a\phi)(x,\mu)|, \phi \in \mathcal{D}_{K_m}$, con $\partial^a = \partial_1^{a_1}\partial_2^{a_2}\cdots\partial_n^{a_n} (\partial_i \equiv \partial/\partial x_i)$. Si ricordi che $\mathcal{D}$ è uno spazio di Frechet, [3].

Possiamo allora estendere l'operatore T all'operatore $\widetilde{T}$ definito sullo spazio $\widetilde{X}$, così che la (5) diviene $\widetilde{T}u = Q_\delta$, dove le soluzioni sono viste in $\mathcal{D}'$, a cui δ appartiene.

Affinché $\widetilde{T}$ "sia in accordo" con T, deve valere che $\langle \tilde{T}\tilde{f}, \phi\rangle = \langle \widetilde{T}f, \phi\rangle;, \forall\phi \in \mathcal{D}$.

Da ciò si dimostra che $\langle \tilde{T}\tilde{f}, \phi\rangle = \langle \tilde{f}, T^*\phi\rangle, \forall\tilde{f} \in \mathcal{D}', \phi \in \mathcal{D}$, dove $T* : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$,

$$T^*\varphi(x,\mu) = c\sigma\varphi(x,\mu) - c\mu\frac{\partial\varphi(x,\mu)}{\partial x} - c\sigma_s \int_{-1}^{+1} k(\mu,\mu')\varphi(x,\mu')d\mu', \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}. \tag{8}$$

Dunque, $\tilde{T}$ è l'operatore aggiunto di T^*, cioè $\tilde{T} = (T^*)'$, [1]. Inoltre, è possibile dimostrare che $\tilde{T}$ è un automorfismo di $\mathcal{D}$ in se stesso. Infine, $(\tilde{T})^{-1} = ((T^*)^{-1})'$.

TEOREMA 2. – *L'equazione $\widetilde{T}u = Q_\delta$ ha un'unica soluzione $u = [((T^*)^{-1})' Q_\delta]$ in $\mathcal{D}$.*

Anche in questo caso, è stato dunque possibile studiare il problema inverso.

In ciascuno dei quattro casi, dopo aver dimostrato l'invertibilità dell'operatore considerato, è stato utilizzato un semplice metodo di bisezione al fine di stimare la quantità cercata.

BIBLIOGRAFIA

[1] BARROS NETO J., *An Introduction to the Theory of Distributions*, Marcel Dekker, New York (1973).

[2] BELLENI MORANTE A. C. e MCBRIDE A.C., *Applied Nonlinear Semigroups*, John Wiley & Sons, Chichester (1998).

[3] CHOE Y.H., *C_0-Semigroups on a locally convex space*, J. Math. Anal. Appl., **106** (1985), 293-320.

[4] DYSON J.E. e WILLIAMS D.A., *The Physics of Interstellar Medium*, Institute of Physics Publishing, Bristol (1997).

[5] LISI M. e TOTARO S., *Inverse problem related to photon transport in an interstellar cloud*, Transp. Theory Stat. Phys., **32** (2003), 327-345.

Dipartimento di Matematica U. Dini, Università di Firenze
e-mail: lisi@math.unifi.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Firenze) - Ciclo XVII
Direttore di ricerca: Prof. Silvia Totaro, Università di Siena