Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Fabio Nicola

Stime dal basso per operatori pseudodifferenziali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **9-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2006), n.2 (Fascicolo dedicato alle tesi di dottorato), p. 263–265.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2006_8_9A_2_263_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2006.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. IX-A, Agosto 2006, 263-265

Stime dal basso per operatori pseudodifferenziali

FABIO NICOLA

In questa tesi abbiamo studiato alcune stime per operatori e sistemi di operatori pseudodifferenziali a caratteristiche multiple. Qui illustreremo uno dei risultati, ottenuto in collaborazione con Marco Mughetti ([2]), e accenneremo velocemente agli altri.

Precisamente, sia X un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $P = P^* \in \mathrm{OP}S^m(X)$ un operatore pseudodifferenziale classico, a supporto proprio e formalmente autoaggiunto in X. Siamo interessati alla seguente stima:

Per ogni compatto $K \subset X$ esiste una costante $C_K > 0$ tale che

$$(Pu, u) \geq -C_K \|u\|^2_\mu, \quad \forall u \in C_0^\infty(K). \tag{1}$$

(Qui $\|\cdot\|_\mu$ denota la norma Sobolev di ordine μ). Questa disuguaglianza è banale per $\mu \geq m/2$, ed è interessante trovare il più piccolo μ per cui essa è valida. Affinché (1) valga con $\mu = (m-1)/2$ è necessario e sufficiente che il simbolo principale p_m di P sia ovunque non negativo (disuguaglianza sharp-Grding). In realtà la disuguaglianza di Fefferman-Phong afferma che (1) vale con $\mu = (m-2)/2$ se il simbolo totale p ha parte reale non negativa. Questa condizione tuttavia non è necessaria e si cercano quindi condizioni nei punti ρ dell'insieme caratteristico $\Sigma = \{(x,\xi) \in T^*X \setminus 0 : p_m(x,\xi) = 0\}$ sotto le quali (1) valga con $\mu = (m-2)/2$ anche se il simbolo subprincipale p^s_{m-1} è negativo vicino a ρ. Questo è esattamente l'oggetto della disuguaglianza di Hörmander (vedere [1], Thm. 22.3.2), che richiamiamo:

Supponiamo che

(a) *l'insieme caratteristico Σ sia una varietà C^∞ di $T^*X \setminus 0$;*

(b) *il rango della restrizione a Σ della 2-forma simplettica canonica $\sigma = \sum_{j=1}^n d\xi_j \wedge dx_j$ è localmente costante, i.e. l'applicazione $\Sigma \ni \rho \mapsto \dim(T_\rho\Sigma \cap T_\rho\Sigma^\sigma)$ è localmente costante ($T_\rho\Sigma^\sigma$ è lo spazio ortogonale simplettico di $T_\rho\Sigma$);*

(c) *$p_m(x,\xi)$ si annulla esattamente al secondo ordine su Σ.*

Allora (1) *vale con $\mu = (m-2)/2$ se e solo se P verifica*

$$\begin{cases} p_m(x,\xi) \geq 0, \ \forall (x,\xi) \in T^*X \setminus 0; \\ p^s_{m-1}(x,\xi) + \mathrm{Tr}^+ F_{x,\xi} \geq 0, \ \forall (x,\xi) \in \Sigma. \end{cases} \tag{2}$$

Qui abbiamo indicato con $\mathrm{Tr}^+ F_{x,\xi}$ la traccia positiva (di Melin) della matrice fondamentale $F_{x,\xi}$ associata a p_m in $(x,\xi) \in \Sigma$ (vedere [1]).

Il primo risultato della tesi tratta appunto la generalizzazione della disuguaglianza di Hörmander ad un operatore P con caratteristiche di molteplicità pari $k \geq 2$, i.e. il termine positivamente omogeneo di ordine $m-j$ nello sviluppo asintotico del simbolo si annulla sulla varietà caratteristica Σ all'ordine $k-2j$, per ogni $j \leq k/2$. Per un operatore siffatto diamo quindi condizioni sufficienti per la validità della stima (1) con $\mu = (m-k/2-1)/2$ che si riducono a quelle di Hörmander nel caso di operatori a caratteristiche doppie ($k=2$). La scelta di questo esponente Sobolev è dovuta al fatto che la disuguaglianza (1) diventa invariante per perturbazione di P con operatori di ordine $m-k/2-1$, che è l'ordine del primo termine, nello sviluppo asintotico del simbolo, che non ha un significato invariante.
Queste classi di operatori sono state considerate negli anni '70 da Sjöstrand, Boutet de Monvel, Grigis, Helffer, specialmente riguardo allo studio del problema della ipoellitticità. In quel contesto giocava un ruolo fondamentale l'operatore localizzato $P_\rho : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ associato a P: un operatore differenziale di ordine k, a coefficienti polinomiali e dipendente dal parametro $\rho \in \Sigma$, costruito a partire dallo sviluppo di Taylor del simbolo di P su Σ. Riguardo alle stime dal basso, Mohamed (1981) ha mostrato che, se $p_m \geq 0$ si annulla esattamente all'ordine k sulla varietà C^∞ Σ e per ogni $\rho \in \Sigma$ risulta $P_\rho \geq 0$ (come operatore autoaggiunto) e P_ρ è invertibile su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ allora vale la stima

$$(Pu,u) \geq c_K \|u\|^2_{(m-k/2)/2} - C_K \|u\|^2_{(m-k/2-1)/2}, \quad \forall u \in C_0^\infty(K),$$

($c_K > 0$), che è ovviamente più forte di (1). Nel caso $k=2$ la condizione $P_\rho \geq 0$ è equivalente alla seconda condizione in (2), e questo induce a sospettare che, nella situazione di Mohamed, se P_ρ non è invertibile, si abbia comunque (1) con l'esponente cercato $\mu = (m-k/2-1)/2$. Questo è stato in effetti dimostrato da Parenti e Parmeggiani [5] nelle ipotesi che Σ sia regolare involutiva o simplettica (sotto certe ulteriori condizioni, di natura più tecnica ma essenziali, sulla parte bassa dello spettro di P_ρ). Il nostro risultato completa il lavoro [5] considerando il caso generale in cui Σ ha rango simplettico costante. La dimostrazione si appoggia sulle tecniche sviluppate da Boutet de Monvel, Grigis, Helffer, e Parenti e Parmeggiani [5].
Osserviamo che quando le condizioni di annullamento del simbolo prima richiamate non sono soddisfatte abbiamo pure alcuni risultati, per i quali rimandiamo a [4].

L'argomento successivo trattato nella tesi riguarda il seguente problema:

Fino a che punto si possono dedurre le proprietà spettrali di un operatore pseudodifferenziale formalmente autoaggiunto $P = p(x,D)$, a partire dal suo simbolo p?

In particolare, si vorrebbe costruire esplicitamente, a partire da p, proiettori spettrali approssimati positivi e negativi, vale a dire operatori Π^+, Π^- lineari e continui in L^2 tali che $\Pi^+ + \Pi^- = \mathrm{Id}+$ "termini trascurabili" e soddisfacenti, per ogni $u \in C_0^\infty(K)$, $K \subset\subset X$,

$$\mathrm{Re}(P\Pi^+ u, u) \geq -C_K \|u\|_0^2, \qquad -\mathrm{Re}(P\Pi^- u, u) \geq -C_K \|u\|_0^2.$$

Si tratta di un problema inizialmente studiato da D. Fujiwara (1984), che ha costruito tali proiettori nel caso in cui P ha ordine 1, basandosi su una decomposizione dello spazio delle fasi simile a quella introdotta da Beals e Fefferman (1974). Noi otteniamo un risultato microlocale per una classe di operatori *del secondo ordine*, combinando le tecniche di Beals-Fefferman e Fujiwara con quelle usate nella prima parte della tesi.

Infine ([3]) per una classe di sistemi $N \times N$ di operatori pseudodifferenziali a caratteristiche doppie studiamo la seguente stima dal basso con guadagno di 3/2 derivate:

Per ogni compatto $K \subset X$ esiste una costante $C_K > 0$ tale che

$$(Pu, u) \geq -C_K \|u\|^2_{(m-3/2)/2}, \quad \forall u \in C_0^\infty(K; \mathbb{C}^N).$$

Si tratta di una disuguaglianza intermedia tra la sharp-Grding, dimostrata per i sistemi da Lax e Nirenberg (1966), e quella di Hörmander, dimostrata recentemente da Parenti e Parmeggiani [6] (si veda anche [7]).

BIBLIOGRAFIA

[1] HÖRMANDER L., *The analysis of linear partial differential operators, III*, Springer-Verlag (1985).

[2] MUGHETTI M. e NICOLA F., *On the generalization of Hörmander's inequality*, Comm. Partial Differential Equations, **30** (2005), 509–537.

[3] NICOLA F., *A lower bound for systems with double charateristcs*, J. Anal. Math., **96** (2005), 297–311.

[4] NICOLA F. e RODINO L., *Remarks on lower bounds for pseudo-differential operators*, J. Math. Pures Appl., **83** (2004), 1067–1073.

[5] PARENTI C. e PARMEGGIANI A., *A generalization of Hörmander's inequality*, Comm. Partial Differential Equations, 25 (2000), 457–506.

[6] PARENTI C. e PARMEGGIANI A., *Lower bounds for systems with double charateristics*, J. Anal. Math., **86** (2002), 49–91.

[7] PARMEGGIANI A., *On lower bounds of pseudodifferential systems*, in "Hyperbolic problems and related topics", 269–293, Grad. Ser. Anal., Int. Press, Somerville, MA, 2003.

Dipartimento di Matematica, Politecnico di Torino
e-mail: fabio.nicola@polito.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Torino Università) – Ciclo XVI
Direttori di ricerca: Prof. Alberto Parmeggiani, Università di Bologna
Prof. Luigi Rodino, Università di Torino