Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Irene Iganzia Onnis

Geometria delle superfici in certi spazi omogenei tridimensionali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **9-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2006), n.2 (Fascicolo dedicato alle tesi di dottorato), p. 267–270.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2006_8_9A_2_267_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2006.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. IX-A, Agosto 2006, 267-270

Geometria delle superfici in certi spazi omogenei tridimensionali

IRENE IGNAZIA ONNIS

1. – Introduzione.

Tra tutte le famiglie di superfici dello spazio Euclideo, e più in generale di una forma spaziale, quelle a curvatura media costante (CMC) e quelle a curvatura Gaussiana costante hanno affascinato i matematici dai tempi di Minding, Beltrami, Bianchi, Dini, etc. Le notevoli applicazioni di queste superfici e, in molti casi, la loro bellezza estetica hanno trascinato queste ricerche sino ai giorni nostri affermandosi come una delle branche della geometria differenziale moderna.

Affianco a questa teoria, recentemente, è iniziato uno studio sistematico della geometria delle superfici in alcune varietà Riemanniane omogenee. Tale studio è in parte motivato dalla annunciata soluzione positiva, data nel 2003 da G. Perelman, alla congettura della geometrizzazione di Thurston: *l'interno di ogni* 3*-varietà compatta possiede una decomposizione canonica in pezzi che hanno una struttura geometrica.* Ricordiamo che una *struttura geometrica* o, semplicemente, una *geometria* è una varietà Riemanniana omogenea semplicemente connessa che possiede un quoziente compatto. Quelle di dimensione tre sono state classificate da W. Thurston e sono essenzialmente le seguenti otto: le forme spaziali, gli spazi prodotto $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, il gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}_3$, il ricoprimento universale del gruppo di Lie $SL_2(\mathbb{R})$ e lo spazio Sol.

Nella tesi di dottorato mi sono occupata dello studio delle superfici in alcune delle geometrie tridimensionali. In particolare, in questo riassunto, darò maggior enfasi allo studio delle superfici della geometria $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Come modello per il piano iperbolico $\mathbb{H}^2$ è stato scelto quello del semipiano superiore $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ munito della metrica $g_{\mathbb{H}} = (dx^2 + dy^2)/y^2$. Identificando, in modo naturale, tale modello con il gruppo delle trasformazioni affini proprie della retta, risulta che $\mathbb{H}^2$ è un gruppo di Lie e che la metrica $g_{\mathbb{H}}$ è invariante a sinistra. Conseguentemente, anche lo spazio prodotto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ con la struttura prodotto è un gruppo di Lie e la metrica prodotto $g = g_{\mathbb{H}} + dz^2$ è invariante a sinistra.

2. – I risultati.

2.1. – *Grafici minimi e superfici ombelicali in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.*

I primi risultati della tesi riguardano lo studio dei grafici minimi nello spazio $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, ovvero delle soluzioni $z = f(x, y)$, con $(x, y) \in \Omega$ dominio di $\mathbb{H}^2$, dell'equazione

$$(1) \qquad (1 + y^2 f_y^2) f_{xx} - y (f_x^2 + f_y^2) f_y - 2y^2 f_x f_y f_{xy} + (1 + y^2 f_x^2) f_{yy} = 0.$$

Come nel caso dello spazio Euclideo, il primo esempio interessante di grafico minimo è stato trovato imponendo che la soluzione della (1) fosse di tipo $f(x, y) = h(x^2 + y^2)$, dove h è una funzione reale. In tal caso, si ottiene il grafico minimo completo, denominato superficie a imbuto, dato da $f(x, y) = a \ln(x^2 + y^2) + b$, con $a, b \in \mathbf{R}$, la cui applicazione normale di Gauss ha rango 1. Un secondo esempio notevole di grafico completo, la cui applicazione normale di Gauss ha rango 2, dato da $f(x, y) = cx/(x^2 + y^2)$, $c \in \mathbf{R}$, si ottiene cercando soluzioni della forma $f(x, y) = a(x)/(x^2 + y^2)$, dove a è una certa funzione reale. Un'immediata conseguenza del risultato che segue e dell'armonicità in $\mathbf{R}^2$ di entrambe le funzioni degli esempi ora dati è il fatto che tali grafici sono rigati. Più precisamente:

TEOREMA 2.1. – *Sia $\mathcal{M}^2 \subset \mathbf{H}^2 \times \mathbf{R}$ una superficie minima data come grafico di una funzione differenziabile non costante $f : \Omega \subseteq \mathbf{H}^2 \to \mathbf{R}$. Allora, le curve di livello di f sono pre-geodetiche di $\mathbf{H}^2$ se e solo se f è armonica in $\mathbf{R}^2$.*

È importante osservare che, come nel caso Euclideo, le soluzioni della (1) definiscono grafici di area minima, ovvero:

TEOREMA 2.2. – *Se f soddisfa all'equazione* (1) *in Ω e si estende continuamente alla chiusura $\overline{\Omega}$, allora l'area del grafico $\mathcal{M}$, definito da f, è minore o uguale all'area del grafico $\widetilde{\mathcal{M}}$ definito da una funzione $\widetilde{f}$ che ha gli stessi valori di f sul bordo $\partial\Omega$. Inoltre, l'uguaglianza vale se e solo se f e $\widetilde{f}$ coincidono in Ω.*

Per quel che riguarda la classificazione delle superfici ombelicali, abbiamo prima provato che ogni superficie regolare di $\mathbf{H}^2 \times \mathbf{R}$ ammette localmente una delle seguenti parametrizzazioni: $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$ con $v > 0$, $Y(u, v) = (u, a(u), v)$ con $a(u) > 0$ oppure $Z(u, v) = (c, u, v)$ con $u > 0$. Tale rappresentazione locale ha permesso il seguente risultato di classificazione.

TEOREMA 2.3. – *Le superfici ombelicali di $(\mathbf{H}^2 \times \mathbf{R}, g)$ sono:*

1. *quelle totalmente geodetiche, ossia le sezioni orizzontali $z = c$ e i cilindri verticali su geodetiche di $\mathbf{H}^2$;*
2. *i grafici* $f(x, y) = \arctan\left(\dfrac{\lambda(x, y)}{\sqrt{j - \lambda(x, y)^2}}\right) + c_4$, *con* $\lambda(x, y) = \dfrac{1}{y}\left[\dfrac{c}{2}(x^2 + y^2) + {} + c_1 x - c_3\right]$, $j = 1 - c_1^2 - 2\,c\,c_3 > 0$ *e* $c, c_1, c_3, c_4 \in \mathbf{R}$.

2.2. – *Il Problema di Björling nei gruppi di Lie tridimensionali.*

Sia $\beta : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathcal{N}$ una curva analitica regolare in una varietà Riemanniana $(\mathcal{N}^3, g)$ di dimensione tre e $V : I \to T\mathcal{N}$ un campo di vettori unitario analitico lungo β, tale che $g(\dot{\beta}, V) \equiv 0$. Il Problema di Björling consiste nel determinare una superficie minima $f : \Omega_{(u,v)} \subseteq \mathbf{C} \to \mathcal{N}$, tale que $f(u, 0) = \beta(u)$ e $N(u, 0) = V(u)$, per ogni $u \in I$. L'insieme Ω rappresenta un dominio complesso che contiene l'intervallo reale I, mentre $N : \Omega \to T\mathcal{N}$ rappresenta l'applicazione normale di Gauss della superficie. Nella tesi abbiamo dimostrato che se $\mathcal{N}$ è un gruppo di Lie, munito di una metrica g invariante a sinistra, esiste un'unica soluzione del Problema di Björling. Gli ingredienti fondamentali della dimostrazione di questo risultato sono il Teorema di Rappresentazione di Weierstrass dato in [3], il Teorema di Cauchy-Kovalevskaya e un lema sulla dipendenza delle equazioni di olomorfia (che compaiono nelle formule di Weierstrass). Più precisamente, se indichiamo con $\{E_1, E_2, E_3\}$ una base ortonormale di campi invarianti a sinistra del gruppo di Lie e con ψ_i, $i = 1, 2, 3$, le funzioni a valori complessi che compaiono nelle formule di Weierstrass, le equazioni di olomorfia diventano:

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial \bar{z}} + \sum_{j,k} L^i_{jk} \overline{\psi_j} \psi_k = 0, \qquad i = 1, 2, 3, \qquad L^i_{jk} := g(\nabla_{E_j} E_k, E_i). \tag{2}$$

Il Lemma di olomorfia assicura che se le funzioni ψ_i, $i = 1, 2$, soddisfano alle prime due equazioni di (2), con $\psi_3 := \sqrt{-\psi_1^2 - \psi_2^2}$, allora ψ_3 verifica la terza equazione. Questo riduce il nostro problema allo studio di un sistema di PDE's di tipo Cauchy-Kovalevskaya il quale, in virtù dell'omonimo teorema, ha un'unica soluzione.

2.3. – *Superfici invarianti a curvatura media costante in* $\mathsf{H}^2 \times \mathsf{R}$.

Ricordiamo che una superficie $\mathcal{M}^2$ di una varietà Riemanniana $\mathcal{N}$ è detta *invariante* per l'azione di un gruppo G di isometrie dello spazio ambiente, quando sottoposta all'azione di tal gruppo "scivola su se stessa", ovvero $G\mathcal{M} = \mathcal{M}$. Nella tesi è stata data la classificazione completa delle superfici invarianti a curvatura media costante di $(\mathsf{H}^2 \times \mathsf{R}, g)$, dove $g = g_{\mathsf{H}} + dz^2$. Indicata con

$$X_1 = \frac{(x^2 - y^2)}{2} \frac{\partial}{\partial x} + xy \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_4 = \frac{\partial}{\partial z},$$

una base di campi di Killing per l'algebra di Lie delle isometrie infinitesimali, denotiamo con G_i il gruppo a 1-parametro di isometrie generato da X_i, $1 \le i \le 4$, e con G_{ij} quello generato da una combinazione lineare dei campi X_i e X_j. Per ridurre il numero di casi da studiare, ci serviamo della proprietà che quando due gruppi di isometrie sono coniugati per una isometria φ dell'ambiente, le rispettive superfici invarianti sono congruenti attraverso φ. Siamo così giunti a provare che:

PROPOSIZIONE 2.1. – *Una superficie di* $\mathsf{H}^2 \times \mathsf{R}$ *invariante per l'azione di un gruppo a 1-parametro* G_X, *generato dal campo di Killing* $X = \sum_{i=1}^{4} a_i X_i$, $a_i \in \mathsf{R}$, *è isometrica a una superficie invariante per l'azione di uno dei seguenti gruppi:* G_{24}, G_{34} *o* G^*_{124}, *dove* G^*_{124} *è il gruppo elicoidale generato da una combinazione lineare di* $X^*_{12} = X_1 + X_2/2$ *e* X_4.

Lo studio di questi tre casi è stato fatto usando tecniche di Geometria Equivariante; in particolare il Teorema di Riduzione [1], che consente di studiare la geometria delle superfici invarianti tramite la *curva profilo*, ovvero la curva ottenuta proiettando la superfice G_X-invariante sullo spazio delle orbite $(\mathsf{H}^2 \times \mathsf{R})/G_X$. Nella tesi si trova una descrizione accurata delle curve profilo per i tre tipi di superfici invarianti relative ai tre gruppi descritti nella Proposizione 2.1. Il caso delle superfici elicoidali in $\mathsf{H}^2 \times \mathsf{R}$, prendendo come modello per il piano iperbolico quello del disco di Poincaré, si trova anche in [4].

2.4. – *Superfici invarianti a curvatura Gaussiana costante in una varietà tridimensionale.*

Nell'ultima parte della tesi si è dimostrato un procedimento di riduzione per determinare (localmente) le superfici a curvatura Gaussiana costante, in una varietà Riemanniana tridimensionale $(\mathcal{N}^3, g)$, invarianti per l'azione di un sottogruppo a 1-parametro di isometrie dello spazio ambiente. Questo metodo, che è poi stato applicato per descrivere esplicitamente tali superfici nel caso di $\mathsf{H}^2 \times \mathsf{R}$ e del gruppo di Heisenberg H_3, si riassume nel seguente teorema:

TEOREMA 2.4. – *Sia X un campo di Killing di $(\mathcal{N}^3, g)$ e G_X il sottogruppo a 1-parametro generato da X. Sia $f : \mathcal{M}^2 \to (\mathcal{N}^3, g)$ un'immersione G_X-equivariante e sia g_f la metrica indotta da g in $\mathcal{M}$. Sia $\gamma(s)$ la parametrizzazione per lunghezza d'arco della curva profilo di $\mathcal{M}$ e $\tilde{\gamma}(s)$ un suo sollevamento in $\mathcal{N}$. Allora, g_f è una metrica di curvatura Gaussiana costante K se e solo se la funzione $\omega(s) = \|X(\tilde{\gamma}(s))\|_g$ soddisfa all'equazione differenziale: $\ddot{\omega}(s) + K\omega(s) = 0$.*

Integrando quest'ultima equazione, otteniamo:

COROLLARIO 2.1. – *Se la metrica g_f è di curvatura Gaussiana costante K, allora:*
- *per $K = 0$, $\omega(s) = c_1 s + c_2$;*
- *per $K = 1/R^2 > 0$, $\omega(s) = c_1 \cos(s/R) + c_2 \sin(s/R)$;*
- *per $K = -1/R^2 < 0$, $\omega(s) = c_1 \cosh(s/R) + c_2 \sinh(s/R)$, con $c_1, c_2 \in \mathsf{R}$.*

Nel caso di $\mathsf{H}^2 \times \mathsf{R}$ e di H_3, si dimostra che la curva profilo di una superficie G_X-invariante può essere parametrizzata in funzione di ω. Pertanto, usando il Corollario 2.1, si trova la parametrizzazione esplicita delle curve profilo. Ricordiamo che il caso delle superfici di rotazione di H_3 a curvatura Gaussiana costante è presente in [2].

BIBLIOGRAFIA

[1] BACK A., DO CARMO M.P. e HSIANG W.Y., *On the fundamental equations of equivariant geometry*, (unpublished manuscript).

[2] CADDEO R., PIU P. e RATTO A., *Rotational surfaces in H_3 with constant Gauss curvature*, Boll. Un. Mat. Ital., **B (7)** (1996), 341-357.

[3] MERCURI F, MONTALDO S. e PIU P., *Weierstrass representation formulae of minimal surfaces in H_3 and $\mathsf{H}^2 \times \mathsf{R}$*, Acta Math. Sinica, to appear.

[4] MONTALDO S. e ONNIS I.I., *Invariant CMC surfaces in $\mathsf{H}^2 \times \mathsf{R}$*, Glasg. Math. J., **46** (2004), 311-321.

[5] MONTALDO S. e ONNIS I.I., *Invariant surfaces in a three-manifold with constant Gaussian curvature*, J. Geom. Phys., **55 (4)** (2005), 440-449.

[6] MONTALDO S. e ONNIS I.I., *Invariant surfaces in $\mathsf{H}^2 \times \mathsf{R}$ with constant (Gauss or mean) curvature*, Publ. de la RSME, **9** (2005), 91-103.

Dipartimento di Matematica, Università di Campinas, Brasile
e-mail: onnis@ime.unicamp.br
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Campinas)
Direttori di ricerca: Prof. Francesco Mercuri, Università di Campinas,
Prof. Stefano Montaldo, Università di Cagliari